STU DENTER EKSAMENS OPGAVER I MATEMATIK 1806 – 2000

MATEMATIK
LÆRERFORENINGEN
2 0 0 3

INDLEDNING

I det efterfølgende forudsættes det, at det er en *dansk* version af programmet Adobe Acrobat Reader, der er installeret på computeren. Acrobat Reader dansk version 5.0 forefindes på denne cd-rom og anbefales anvendt.

Indhold

Cd-rommen indeholder samtlige eksisterende eksamensopgaver, der under forskellige skolelove har været stillet til studentereksamen i matematik. Til venstre under overskriften Bogmærker vises de perioder, hvorunder de enkelte skoleloves opgaver er katalogiseret.

Valg af opgave

Ved med musen at klikke på + ud for perioden i kolonnen med bogmærker fås en oversigt over periodens årstal. Ved at klikke på det enkelte årstal fremkommer årets opgavesæt, hvis der kun er ét; ellers klikkes på + ud for årstallet for at få en oversigt over det pågældende års opgavesæt. Fra denne oversigt kan det ønskede opgavesæt vælges. Ved med musen at klikke på de - tegn, der fremkommer undervejs, lukkes underoversigterne.

Fra og med 1966 har hvert opgavesæt et nummer, f.eks. 66-8-1 for sommereksamen 1966, opgavesæt 1 på matematisk-fysisk gren. Bogmærket Opgavenummer indeholder en oversigt, hvorfra det ønskede opgavesæt kan vælges ved at klikke på opgavenummeret.

Bemærk, at især fra 1970'erne og frem fylder et opgavesæt flere sider.

Visning og udskrivning af opgaver

Acrobat Readers muligheder for at forstørre/formindske kan anvendes. Ligeledes dets muligheder for at Gå til næste/forrige side og Gå til første/sidste side. Derimod kan programmets muligheder for søgning (Find) *ikke* anvendes.

Der henvises endvidere til online Hjælp. Benyt en af følgende fremgangsmåder:

- Vælg Hjælp > Reader-hjælp
- Tryk på F1
- Filer > Luk afslutter hjælpeprogrammet, og der returneres til opgaverne.

Ved udskrift anbefales det at vælge

- Tilpas Store Sider til Papirets Størrelse i udskriftsdialogboksen.

Vær opmærksom på, at man ikke ved en fejltagelse kommer til at udskrive *alle* sider i pdf-filen.

- Hvis opgavesættet er på kun 1 side vælges Udskriv Aktuel Side.
- Hvis det er på f.eks. 3 sider vælges Udskriv Sider fra xx til xx+2 (sider frem).

Afslutning

Cd-rommen afsluttes ved at klikke på Afslut programmet eller afslutte Acrobat Reader.

Examen Artium 1806

Arithmetik og Geometrie

1) Hvorledes subtraheres en Brøk fra en anden? Som Exempler udregnes følgende Differenser: $\frac{51}{63}$, $\frac{30}{63}$, $\frac{7}{12}$, $-\frac{3}{6}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{7}{16}$.

2) Hvad er en Decimalbrøk, og hvorledes forvandles en sædvanlig Brøk til en Decimalbrøk? Til Exempel forvandles følgende Brøker til Decimaler:
$\frac{3}{8}$, $\frac{28}{75}$, $\frac{1}{3}$.

3) Det bevises, at en ret Linie, som i den ligebenede Triangel deler den mellem de lige store Been beliggende Vinkel i to lige Dele, ogsaa deler Grundlinien i to lige Dele, og staaer perpendiculair paa samme. Hvis Tiden tillader, vises, hvilke mærkværdige Egenskaber man i Følge heraf maa antage hos den ligebenede Triangel.

4) Det bevises, at Parallellogrammet deles ved en Diagonal i to lige store Dele. Man viser, saavidt muligt, de mærkværdigste Følger heraf for Parallellogrammets Natur.

Examen Artium 1807

Arithmetik og Geometrie

1) At addere Brøker; f.Ex. $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9}$.

2) At extrahere Roden af en Decimalbrøk; f.Ex. af 2,5

3) Det bevises, at, naar man i en Triangel trækker en Linie parallel med Basis, da blive Segmenterne af det ene Crus geometrisk proportionale med Segmenterne af det andet Crus.

4) Det bevises, at, naar to Triangler ere ligedannede, da forholder Trianglernes Indhold sig indbyrdes, som Qvadraterne af de i dem eensliggende Sider.

Examen Artium 1808

Arithmetik og Geometrie

1) Naar $2\frac{3}{5}$ Tønde koste $3\frac{2}{9}$ Rdlr., hvad koste da $11\frac{1}{3}$ Tønde?

2) At mutiplicere følgende Decimalbrøk og Heele med hinanden og bevise Reglerne.

0,0023	4,8723	4,25
0,39	25	3,21

3) At bevise, at i en retvinklet Triangel er Qvadratet paa Hypothenusen saa stort som Summen af Qvadratet paa begge Cathederne.

4) Det skal bevises, at tvende Parallelogrammer, som staae paa samme Grundlinie og mellem tvende Paralleler, ere lige store.

Examen Artium 1809

Arithmetik og Geometrie

1) Hvad forstaaes ved to eller flere Tals fælles Maal; hvorledes findes det største fælles Maal for Tallene: 65856 og 77616; ligesaa for 385 og 663, om de have noget? og hvad nyttig Anvendelse kan heraf gjøres paa Brøkregningen?

2) Dersom den danske Fod indeholder 139,13 af de samme Deele, af hvilke den hamborgske Fod indeholder 127, hvor mange hamborgske Fod udgjøre da 400 danske, og omvendt hvormange danske Fod udgjøre 400 hamborgske?

3) At drage en Tangent til en Cirkel
   1) fra et givet Punct i Cirkelens Peripherie;
   2) fra et Punct udenfor samme;

   med tilføiet Beviis for det Forlangtes rigtige Udførelse.

4) At bevise, at to Triangler ere ligedannede, naar alle Sider ere proportionerede. Grundene for de enkelte Sætninger angives i Korthed.

Examen Artium 1810

Arithmetik og Geometrie

1) At uddrage Qvadratroden af 78 indtil eller med trende Decimaler.

2) At forklare, hvori den geometriske Proportion bestaaer, og at bevise dens vigtigste Egenskaber.

3) Man forlanger, at der skal bevises,
   1) naar man i en ligebenet Triangel fra Toppen drager en Perpendiculær til Grundlinien, da deler den hele Trianglen, Vinklen ved Toppen og Grundlinien i tvende lige store Parter.
   2) Naar Grundlinien ved en Perpendiculær fra Toppen er deelt i tvende lige store Parter, da er denne Triangel en ligebenet Triangel.

4) Naar i en Triangel drages en Linie parallel ved Grundlinien, da at bevise, at de afskaarne Stykker af Siderne ere indbyrdes proportionale og proportionale med de hele Sider.

Examen Artium 1811

Arithmetik og Geometrie

1) Hvad er Productet, og hvad Quotienten af de tvende Brøker $\frac{5}{12}$ og $\frac{8}{12}$? og hvorledes findes hver især? Giør det i Product eller Quotient nogen Forskiel, om Brøkerne tages i den forandrede Orden: $\frac{8}{12}$ og $\frac{5}{12}$?

2) Naar man med 600 Rdlr. har i 4 Aar vundet 192 Rdlr., hvor stor maatte den Capital være, hvormed der med samme Lykke kunde i et Aar vindes 500 Rdlr.? Beregningen ledsages med fornødne Grunde.

3) Hvilken nærmere Bestemmelse behøves, for at bevise 2 Trianglers Congruence af 2 Sider og en modstaaende Vinkel, givne lige store i begge, og hvorledes føres da Beviset?

4) Naar i en Triangel en Linie drages saaledes, at den er parallel med een af Siderne, og skierer begge de andre; hvilke Proportioner finde da Sted mellem Triangelens Sider og disses Stykker, og hvordan udledes disse Proportioner?

Examen Artium 1812

Arithmetik og Geometrie

1) At forklare, hvad den geometriske Proportion er, og at bevise de vigtigste Læresætninger, denne Proportion vedkommende.

2) At bevise, at i en retvinklet Triangel er Qvadratet paa Hypothenusen saa stort som Summen af Qvadraterne paa begge Cathederne; og af dette Theorem at opløse følgende tvende Problemer:
   a) at lægge tvende givne Qvadrater sammen.
   b) fra en given større Qvadrat at drage en given mindre.

Afgangseksamen 1847

Geometrisk Opgave

At vise hvorledes man finder Fladeindholdet af en i Cirkel indskreven regulair Polygon, og at anvende dette paa en sexsidig og en tolvsidig Polygon i en Cirkel af 12 Fods Radius.

Arithmetisk Opgave

At uddrage Qvadratroden af 57398 og ligeledes Kubikroden; hvorfor der giøres Rede for Fremgangsmaaden.

Afgangseksamen 1848

Geometrisk Opgave

I en Cirkel, hvis Radius = 1´, indskrives en Triangel, hvis to Sider ere givne = ½´ og = 1/3´. At finde den tredie Side og Vinklerne.

Arithmetisk Opgave

At finde de to Tal, hvis Sum = 4 og hvis Qvadratrødders Differents = 1.

Afgangseksamen 1849

Geometrisk Opgave

At finde Sidens Længde og Sidefladens Areal i det regulaire Tetraeder, hvis Volumen er givet = 1 cub´.

Arithmetisk Opgave

At finde Udtrykkene for de to Tal, hvis Cubikrødders Product er givet = a, og som ere saadanne, at deres Sum divideret med deres Cubikrødders Sum og deres Differents divideret med deres Cubikrødders Differents give Qvotienter, hvis Sum er given = b.
Exempel $a = 20$, $b = 208$.

Afgangseksamen 1850

Geometrisk Opgave

I hvilke Tilfælde er en Triangel bestemt ved en given Vinkel og to givne Sider? Hvorledes eftervises Plangeometriens Sætninger herom ved Triangelens trigonometriske Opløsning?

Arithmetisk Opgave

At opløse enhver af de to Ligninger

$$x - \sqrt{27 - x^2} = 2 , \qquad x + \sqrt{27 - x^2} = 2 ,$$

og prøve Opløsningens Rigtighed ved de fundne Rødders Indsættelse i de samme Ligninger.

Afgangseksamen 1851

Geometrisk Opgave

Naar en ret Kegle, hvis Sidelinies Vinkel mod Aren er givet $= \alpha$, har sit Toppunkt i Centrum af en Kugle, hvad Forhold vil der da blive imellem det Stykke af Kuglefladen, som Keglen afskærer, og den hele Kugleflade?
Exempel: $\alpha = 60°$.

Arithmetisk Opgave

En arithmetisk Række af et givet Antal $m + p$ Led skal bestemmes saaledes, at den hele Sum af Leddene er lig en given Størrelse S, og de partielle Summer, tagne særskilt af de m første og af de p sidste Led, staae til hinanden i et givet geometrisk Forhold $= r$.
Exempler: 1) $m = 5$, $p = 9$, $r = 1/3$.
2) $m = 5$, $p = 7$, $r = 1/2$.

Afgangseksamen 1852

Geometrisk Opgave

Af et Triangels Areal T og de to Sider a og b at finde den tredie Side c og Vinklerne A, B, C.
Exempel: $T = 2 \,\square'$, $a = 1'$, $b = 5'$.

Arithmetisk Opgave

At bestemme det tociffrede Tal, som divideret med Ciffrenes Product giver en forelagt Qvotient A, og som adderet til Tallet $9B$ giver det omvendte tociffrede Tal (d. e. som skrives med de samme to Ciffre ombyttede).
Exempel: 1) $A = 2$, $B = 3$;
2) $A = 3$, $B = 2$.

Afgangseksamen Januar 1853

Geometrisk Opgave

I et Triangel ere to Vinkler A og B og de modstaaende Siders Sum f givne. At finde den tredie Vinkel og de tre Sider.
Exempel: $A = 15°$, $B = 36°$, $f = 1$.

Arithmetisk Opgave

To Reisende gaar samtidigen ud fra to Punkter A og B, og gaar hinanden imøde med constante Hastigheder, den ene fra A til B, den anden fra B til A. Den første ankommer til B m Timer efterat de har mødt hinanden, den anden ankommer til A n Timer efterat de har mødt hinanden.

At bestemme

1) Forholdet imellem deres Hastigheder, og
2) den Tid, som forløber fra deres Afreise til deres Møde, ligeledes
3) de Tider hvori de fuldende Reisen, den ene fra A til B, den anden fra B til A.

Exempel $m = 36$, $n = 9$.

Afgangseksamen 1853

Geometrisk Opgave

I et Triangel haves givne en Side a, Høiden h nedfældt paa samme Side og den Linie f, som forbinder Sidens Midtpunkt med det modstaaende Toppunkt. Heraf skal Trianglet construeres, og Formlerne angives til Bestemmelse af de to andre Sider og Vinklerne.
Exempel: $a = 12'$, $f = 5'$, $h = 3'$.

Arithmetisk Opgave

Om en Uhrskives Midtpunkt dreie sig eensformigen, Timeviseren, Minutviseren, Secundviseren, af hvilke den første gjør en Omdreining i 12 Timer, den anden i 1 Time, den tredie i 1 Minut. Idet alle tre Visere dække hinanden ved Klokkeslettet 12, saa spørges: efter hvilken Tids Forløb vil dernæst Secundviseren første Gang komme til nøiagtigen at halvere Vinklen mellem de to andre Visere?

Afgangseksamen 1854

Geometrisk Opgave

I et Triangel ere de fra Toppunkterne paa de modstaaende Sider nedfældte Høider proportionale med tre givne Tal m, n, p. Deraf skulle Trianglets Vinkler bestemmes.
Exempel: $m = 3$, $n = 4$, $p = 5$.

Arithmetiske Opgaver,

som begge forlangtes løste:

1. Hvilken Ligning maa finde Sted imellem tre Tal P, Q, R, saa at enhver af dem er bestemt ved de to andre, naar de som Led saavel i en arithmetisk Række (Differentsrække) som ogsaa i en geometrisk Række (Qvotientrække) skulle svare til de samme tre Indices p, q, r ?

2. Naar Folkemængden i et Land i en Række af n Aar voxer i et Forhold, som, foranderligt med Aarene, er betegnet $t_1, t_2, ..., t_n$, hvilket uforanderlig aarligt Middelforhold t vilde i de n Aar have givet Folkemængden den samme Tilvæxt?
Exempel: $n = 40$, $t_1 = t_2 = ...= t_{30} = 0{,}0065$ og $t_{31} = t_{32} = ...= t_{40} = 0{,}0076$.

Afgangseksamen 1855

Geometrisk Opgave

Forholdet imellem et Kuglesegment og den tilsvarende Kuglesector er *m*. Hvor stort er da Forholdet imellem Segmentets Høide og Kuglens Radius, hvor stor Toppunktvinklen i den tilhørende Kegle?
Exempel: Nr. 1) $m = \frac{5}{8}$, Nr. 2) $m = \frac{7}{8}$, Nr. 3) $m = \frac{9}{8}$.

Arithmetisk Opgave

1. Ligningen

$$(x^2 - a^2 - b^2)^2 - 2c^2(x^2 + a^2 + b^2) + c^4 = 0$$

opløses med Hensyn til x.

2. En Mand har udlaant to Summer, nemlig 1500 Rd. og 3000 Rd., til 5 pCt. Rente. Disse Summer ere med paaløbne Renter og Renters Renter tilbagebetalte, efterat den første Sum har udestaaet netop dobbelt saa længe som den sidste, med i alt 6272 Rd. 70 s. Hvorlænge have disse Gjældsposter staaet ubetalte?

Afgangseksamen 1856

Geometrisk Opgave

En Trekants tre Sider have Værdier, der danne en Differentsrække (arithmetisk Progression) paa tre Led. Dens Areal er 3/5 af en ligesidet Trekant med samme Perimeter.

Hvor store ere dens Vinkler?

Arithmetisk Opgave

Man skal opløse Ligningen

$$+\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=x-\frac{a}{2}$$

med Hensyn til x og prøve Rigtigheden af det Fundne, idet hver Qvadratrod tages med det i Ligningen foran samme staaende Fortegn.
Exempel 1) $a = 7$; 2) $a = 8$; 3) $a = 9$.

Afgangseksamen 1857

Geometrisk Opgave

Af en Trekants ene Side a og to hosliggende Vinkler B og C søges den indskrevne Cirkels Radius r, saaledes at Udtrykket er bekvemt for logarithmisk Beregning. Denne udføres for $a = 2'$, $\angle B = 28°40'16''$, $\angle C = 120°$.

Arithmetisk Opgave

Af Ligningen

$$7^{2+x} + 7^{2-x} = 2402$$

søges x.

Afgangseksamen 1858

Geometrisk Opgave

I hvilken Afstand fra en Kugles Centrum skal et lysende Punkt anbringes, naar det skal belyse Fjerdedelen af dens Overflade?

Hvis man formaaer det, ønskes tillige Afstanden angiven, naar, almindeligen, $\frac{1}{n}$ af Overfladen skal belyses.

Arithmetisk Opgave

At opløse Ligningen

$$x^2 - ax\sin\varphi + a^2\cos\varphi\sin^2\tfrac{\varphi}{2} = 0$$

og give Rødderne saa simpel en Form som muligt.

Ifald $a = 25$, $\sin\frac{\varphi}{2} = 3/5$, hvad bliver da Ligningen og dens Rødder?

Afgangseksamen 1859

Geometrisk Opgave

Hvormange Qvadrat -Tommer og Linier (Duodecimal-Maal) er Arealet af en regulair Nikant, hvis største Radius er 1 Fod?

Arithmetisk Opgave

Summen af 3 paa hinanden følgende Led i en geometrisk Progression (Quotientrække) er 49, Productet af dem er 2744.
Hvilke ere de 3 Tal?

Afgangseksamen 1860

Geometrisk Opgave

Fra to Punkter A og B, der ligge 500 Alen fra hinanden, kan man see til et tredie C; fra A under en Vinkel paa 63°27´ med AB, og fra B under en Vinkel med BA, der er 43°32´.

Hvor langt ligger Punktet C fra Linien AB og i hvilken Afstand fra A træffes denne af Perpendiculairen fra C ?

Svarene gives i Alen, Tommer og Linier, Decimalmaal.

Arithmetisk Opgave

Af følgende Ligninger

$$\begin{aligned} x &= 3(y-z) + y^3 - z^3 \\ ab &= 1 + yz \\ a^2 + b^2 &= 2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

skal man finde et muligst simpelt Udtryk for x ved a og b.

Afgangseksamen 1861

Geometrisk Opgave

At bestemme en Trekant, hvori man kjender Vinklen $A = 15°$, den hosliggende Side $b = 2´\,1´´$ og den modstaaende Side $a = 1´\,7´´$.

Arithmetisk Opgave

Ligningen

$$ax^2 + ab = 2ax\sqrt{b} + bx^2$$

opløses med Hensyn til x, og Værdierne angives dernæst for det Tilfælde, at $a = b$.

Afgangseksamen 1862

Geometrisk Opgave

Man skal bevise følgende Sætning:

Naar der om en Kugle er omskrevet en Cylinder og en ret Kegle, hvis Sidelinie er lig Grundfladens Diameter, saa er Cylinderens Volumen mellemproportional imellem Kuglens og Keglens Volumen, og Cylinderens hele Overflade mellemproportional imellem Kuglens og hele Keglens Overflade; og derefter skal man undersøge, om ikke samme Sætning gjælder for nogen Kegle af andre Dimensioner end den nævnte.

Arithmetisk Opgave

At opløse Ligningerne

$$x \operatorname{tg} a + y \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c$$
$$x \cot a + y \cot b = \cot c$$

med Hensyn til x og y, bringe disses Udtryk paa en for Logarithmeregningen bekvem Form, samt beregne x og y for

1) $a = 30°$, $b = 45°$ og $c = 60°$, og for
2) $a = 30°12'$, $b = 45°$ og $c = 59°48'$.

Afgangseksamen 1863

Geometrisk Opgave

Af en Trekant kjender man den ene Høide h og de to Vinkler A og B, der ligge ved Grundlinien. Trekantens Sider og Areal skulle udtrykkes ved h, A og B i Formler bekvemme for Logarithmeregning, og beregnes for h = 10 Alen, A =30°, B = 63°28´45´´.

Arithmetisk Opgave

Naar man til to ubekjendte Tals Produkt lægger deres Sum, faaer man et bekjendt Tal a, og naar man fra deres Produkt trækker Summen, faaes et andet bekjendt Tal b.

Hvorledes udtrykkes de to ubekjendte Tal ved a og b ?

Hvorledes maa a afhænge af b, for at de ubekjendte Tal skulle blive ligestore, og hvor store blive de i saa Tilfælde?

Afgangseksamen 1864

Geometrisk Opgave

En Cirkelsector med Radius r og Centrivinkel α er givet. Man skal

1) finde Radius i den Cirkel, som kan indskrives i Sektoren, d.v.s. den, som berører alle Sektorens begrænsede Linier,

2) finde Forholdet mellem denne Cirkels og Sektorens Areal,

3) bestemme Sektorens Centrivinkel saaledes, at den indskrevne Cirkels Areal forholder sig til Sektorens Areal som Vinkelen β til Centrivinkelen α,

4) angive, inden hvilke Grænser Vinkelen β maa ligge, og

5) søge α for følgende Værdier af β:

a) $\beta = 10°$, b) $\beta = 40°$, c) $\beta = 90°$, d) $\beta = 120°$.

Arithmetisk Opgave

A har udlaant d. 1. Jan. 1848 24 000 Rd. og faaet Laanet med Renter og Renters Rente tilbagebetalt d. 1. Jan. 1864 med 97 520 Rd.. B har udlaant d. 1. Jan. 1848 2/3 af sin daværende Formue og d. 1. Jan. 1856 et Beløb saa stort som 1/5 af samme Formue; begge Laanene med Renter og Renters Rente tilbagebetales d. 1. Jan. 1864 med det 3dobbelte af, hvad hans Formue udgjorde i 1848.

Hvor mange pro cento pro anno har A, hvor mange B faaet?

Afgangseksamen Januar 1865

Tirsdagen den 10de Januar 1865, Eftermiddag

Geometrisk Opgave

En Kugle er deelt i to Sektorer, hvis Volumina forholde sig som p til q.

I hvilket Forhold staae saa Høiderne i de tilhørende Kuglekalotter til hinanden?

I hvilket Forhold staae Kalotternes Overflader?

Hvilken Formel kan faaes til Beregning af Toppunktsvinklen i den til Sektoren hørende Kegle?

Beregningerne udføres for: 1) $p = 1$, $q = 3$; 2) $p = 3$, $q = 4$.

Onsdagen den 11te Januar 1865, Formiddag.

Arithmetisk Opgave

Af Ligningerne

$$x^{\log y} = a$$
$$x^p y^q = b$$

søges x og y; idet log betegner den briggiske Logarithme, udføres Beregningen for det Tilfælde, hvor $a = 0{,}5$, $b = 0{,}4$, $p = 2$, $q = 1$.
Rigtigheden af det Fundne prøves.

Afgangseksamen 1865

Geometrisk Opgave

At udvikle de forskjellige Tilfælde, som kunne opstaa, naar man, saa vel ved Konstruktion som ved Beregning, skal bestemme en Trekant af en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side.
Som Exempel findes den tredje Side, naar den givne Vinkel er 30°, den hosliggende Side 300 Alen og den modstaaende 210 Alen.

Arithmetisk Opgave

Først udvikles de Formler, der ligge til Grund for Theorien af Kvotientrækker (geometriske Progressioner), derpaa forklares disse Formlers Anvendelse saaledes , at det ses, hvilke og hvor mange Størrelser vedkommende disse Rækker der maa være givne, for at andre skulle kunne findes, og endelig bestemmes til Exempel den Kvotientrække, som begynder med 1 og ender med 177147, og hvis Led have Summen 265720.

Afgangseksamen Januar 1866

Geometrisk Opgave

At udvikle de Relationer, der finde Sted mellem en Cirkels Radius, Korden til en Cirkelbue og Korden til den dobbelt saa store Bue, samt vise, hvorledes deraf kan udledes de tilsvarende trigonometriske Relationer mellem sinus og cosinus til to Buer, af hvilke den ene er dobbelt saa stor som den anden.

Arithmetisk Opgave

Paa hvilke Sætninger bero de praktiske Fordele ved Regning med Logarithmer, hvorledes bevises disse Sætninger, og hvorledes anvendes de til Beregning af

$$x = 0{,}87932^{\sqrt[10]{10}}.$$

Afgangseksamen 1866

Geometrisk Opgave

At udvikle den Formel, hvorved man af de to Sider a og b og den mellemliggende Vinkel C i en Trekant umiddelbart kan beregne den lige for Siden a beliggende Vinkel A.

Til Exempel søges A, naar $a = 1000$ Alen, $b = 363{,}25$ Alen, $\angle C = 62°24'10''$.

Arithmetisk Opgave

At udvikle den Fremgangsmaade, hvorved dobbelt irrationale Størrelser af Formen $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, hvor b ikke er kvadratisk, gjøres enkelt irrationale, og at anvende den derved fundne almindelige Formel paa Exemplet $\sqrt{98-18\sqrt{17}}$.

Afgangseksamen Januar 1867

Geometrisk Opgave

At vise, hvorfor de trigonometriske Formler til Bestemmelse af Vinklerne i en Trekant ved Hjælp af Siderne ogsaa kunne bruges, naar alene Forholdet mellem Siderne er bekjendt, og at anvende dem til Beregning af Vinklerne, naar Siderne a, b, c staa i følgende Relation : $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$.

Arithmetisk Opgave

At fremsætte og bevise den Lov, hvorefter Koefficienterne i en ordnet kvadratisk Ligning sammensættes af Rødderne, og at anvende den ved Opløsningen af de to Ligninger

$$xy = 2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 + x + y = 8.$$

Afgangseksamen 1867

Geometrisk Opgave

Hvorledes beregnes Volumen af en afkortet Kegle?

Af en Kegle, hvori et Snit vinkelret paa dens Axe er en Cirkel, er mellem to saadanne Snit med indbyrdes Afstand 1 Fod afskaaret et Volumen paa 314,159265 Kubikfod; naar derhos Keglens halve Toppunktsvinkel er 60°, hvor store ere saa begge Snits Afstande fra Toppunktet?
Der forlanges to rigtige Decimaler i Resultatet.

Arithmetisk Opgave

Først bevises følgende Sætning :

Naar a og α, b og β ere rationale Tal, men $\sqrt{b}$ og $\sqrt{\beta}$ irrationale, og $a+\sqrt{b} = \alpha+\sqrt{\beta}$, saa maa man have $a=\alpha$ og $b=\beta$.

Dernæst anvendes den til at finde to rationale Tal, hvis Kvadratrødder ere irrationale, og som ere saaledes beskafne, at Differensen mellem de to Størrelser, der fremkomme ved Addition af det ene Tal og det andets Kvadratrod, bliver lig $2-\sqrt{3}$.

Endelig prøves Rigtigheden af de fundne Værdier.

Afgangseksamen 1868

Geometrisk Opgave

En regelmæssig Mangekants Sideantal forudsættes givet; hvilke Størrelser (Stykker) i Mangekanten ere dermed ogsaa givne? Hvor mange andre Stykker maa end videre være givne, for at Mangekanten skal være ganske bekjendt?

Hvorledes kan man af en indskreven regelmæssig Mangekants Sideantal n og dens Perimeter P finde den i samme Cirkel indskrevne regelmæssige $2n$kants Areal A?

En regelmæssig 23kants Perimeter er 1200 Alen, hvor stort er da Arealet af en 46kant, som er indskrevet i samme Cirkel, og hvor stor er en af de Diagonaler i samme 46kant, som deler den i to uregelmæssige Mangekanter med 6 og med 42 Sider?

Arithmetisk Opgave

At fremsætte de almindelige Eliminationsmethoder og at opløse Ligningerne :

$$y^2 + xy = ax \qquad \text{og} \qquad x^2 - y^2 = b(x - y).$$

Afgangseksamen Januar 1869

Geometrisk Opgave

Hvad forstaas ved et regulært Tetraeder og et regulært Oktaeder?

Hvorledes kan man bevise:

1) at det sidste udskæres af det første ved plane Snit gjennem Midtpunkterne af hver 3 sammenstødende Kanter;
2) at Vinkelen mellem to af Oktaedrets i en Kant sammenstødende Planer er Supplementvinkel til Vinkelen mellem to af Tetraedrets Grænseflader?

Hvorledes beregnes disse Vinklers Størrelse i hvert Legeme for sig?

Arithmetisk Opgave

Hvorvidt kan en Sum af Størrelser under irrational Form (som $\sqrt[n]{A}$, hvor A er rational) reduceres til et enkelt Led?

Hvilken Sammendragning af Leddene er mulig i venstre Side af Ligningen:

$$\sqrt[x]{a^{5x+2}} + \sqrt[x]{a^{4x+2}} + \sqrt[x]{a^{3x+2}} + \sqrt[x]{a^{2x+2}} + \sqrt[x]{a^{x+2}} + \sqrt[x]{a^{2}} = a^2 + a + 1 \ ?$$

Hvorledes kan x findes udtrykt ved a af denne Ligning, og hvilken Talværdi faar x, naar 1) a =11 og 2) a = 0,99 ?

Afgangseksamen 1869

Geometrisk Opgave

At udvikle Formlen for tg. (tangens) af to Vinklers Sum ved tg. af de enkelte Vinkler. Denne Formel anvendes i følgende Opgaver.

1) At finde Summen af de Vinkler, som have 1/2, 1/5 og 1/8 til tg.

2) At bestemme Vinklerne i den inderste Firkant, der dannes, naar man fra de to modstaaende Vinkelspidser i en Rektangel, hvis Siders Forhold er α, trækker rette Linier til Sidernes Midtpunkter, og at beregne Vinklerne i Grader, Minutter og Sekunder, naar Rektanglen bliver til et Kvadrat.
Tillige findes de Grænser, hvorimellem Vinklerne maa ligge, naar α gjennemløber alle mulige positive reelle Værdier (d.v.s. at finde Betingelsen for reelle α).

Arithmetisk Opgave

At fremsætte og bevise de Sætninger, i Følge hvilke Talregninger kunne lettes ved Brugen af Logarithmer. Anvendelse gjøres paa følgende Opgaver:

1) Beregning af $(-1{,}0009)^{435}$.

2) En Lovovertrædelse straffes med en vis Mulkt og hver senere Overtrædelse med en Mulkt, som er 25 pro Cent større end den for den nærmest foregaaende Overtrædelse. Hvor ofte er Loven overtraadt af den, som i alt har erlagt Mulkter til et Beløb, som er 33,2532 Gange saa stort som den første Mulkt var?

Afgangseksamen Januar 1870

Geometrisk Opgave

En Trekants Højde er givet lig h, og man ved, at den deler den Vinkel, fra hvis Spids den er draget, i de to Vinkler p og q.

Hvorledes udtrykkes Trekantens Areal ved h, p og q ?
Hvorledes gjøres dette Udtryk bekvemt for Logarithmeregning?
Hvor stort bliver Arealet, naar $h = 3$ Fod, $p = 88°$, $q = 11°59'59''$?

Arithmetisk Opgave

At udvikle den almindelige Formel til Beregning af en Kapital, som er opstaaet ved, at en anden given Kapital har været udsat paa Rente til en given Rentefod i et givet Antal Terminer saaledes, at Renten stedse er lagt til Kapitalen og forrentet med denne.

Af Formlen gjøres følgende to Anvendelser :

1) Bestemmes, hvor mange Terminer en Kapital maa staa paa Rente til 5 pCt. for at blive halvanden Gang saa stor, som den oprindelig var;

2) Søges Rentefoden, hvorved en vis Kapital i 17 Terminer bliver lige saa stor som den tre og en halv Gang saa store Kapital i 8 Terminer.

Afgangseksamen 1870

Geometrisk Opgave

Hvorledes maales Vinkelen mellem en ret Linie og en Plan?

Hvor stor er Vinkelen mellem et regelmæssigt Tetraeders Kant og Grundflade?

En skjæv cirkulær Kegles største Sidelinie kaldes s, den mindste t, Grundfladens Radius r, Vinkelen mellem s og Grundfladen v.

Hvor stor er da

$$1)\ v,\ \text{naar}\ \frac{r}{1} = \frac{s}{5} = \frac{t}{4}\ ,\ \text{og}\ \ 2)\ r,\ \text{naar}\ s = 7,\ t = 5\ ,\ v = 45°\ ?$$

Arithmetisk Opgave

Hvorledes anvendes den Maade, hvorpaa den kvadratiske Ligning opløses, til at finde alle Rødderne i Ligningen $x^4 - 2ax^2 + b^2 = 0$, idet x er ubekjendt, a og b bekjendte?

Hvorledes bringes disse Rødder paa den simpleste Form?

Hvilke Værdier har x i Ligningen $x^{\log. x} = \sqrt{\frac{10}{x}}$, idet log. betyder den briggske Logarithme?

Hvorledes prøves Værdiernes Rigtighed?

Afgangseksamen Januar 1871

Geometrisk Opgave

Hvorledes findes den krumme Overflade af en ret Kegle udtrykt:

1) Ved Højden og Grundfladen,

2) Ved Toppunktsvinkelen og Grundfladen?

Hvilket Udtryk faas for den rette Keglestubs (afkortede Kegles) krumme Overflade ved Endefladernes Radier og Toppunktsvinkelen?

Hvorledes bestemmes Toppunktsvinkelen ved Endefladernes Radier, naar Keglestubbens krumme Overflade er lige stor med den plane?

Til Exempel antages Forholdet mellem Endefladernes Radier givet = n, og Udregningen udføres saa vel for $n = \sqrt{3}$ som for $n = 2$.

Arithmetisk Opgave

Hvad forstaas ved exponentielle Ligninger?

Hvilken arithmetisk Theori forudsættes ved deres Opløsning?

Hvorvidt kan denne være afhængig af kvadratiske Ligningers Opløsning?

Anvendelse paa Exemplet $1{,}0375^{x} + 1{,}0375^{-x} = 2{,}1370$.

Afgangseksamen 1871

Geometrisk Opgave

Man skal

1) bevise, at parallele plane Snit i et Hjørne give lige dannede plane Figurer,

2) angive, hvorledes man bestemmer Forholdet mellem Volumina af de ved Snittene afskaarne Pyramider.

3) Gjennem et tresidet Hjørne, hvis Sider ere 60°, 90° og 120°, lægges et plant Snit, som afskærer lige store Kanter af Hjørnet. Man skal beregne Vinklerne i den i Snittet liggende Trekant, enhver for sig uafhængig af de to andre, og prøve Resultatets Rigtighed.

Arithmetisk Opgave

1) En Mand faar af 27874 Rd. 3 Mk. en aarlig Rente, som er 2005 Rd. og 2 Sk.; hvor mange pCt. er det?

2) Hvor meget ejer den samme Mand efter 10 Aars Forløb, naar han hvert Aar lægger Renten til Kapitalen og faar den samlede Sum forrentet til samme Rentefod som forhen?

3) Hvor stor skulde Rentefoden have været, naar Kapitalen ved Tillæg af Rente og Rentes Rente skulde have fordoblet sig i 10 Aar?

Der forlanges en kort, men tydelig Redegjørelse for, hvorledes de Ligninger faas, hvorpaa Beregningen støttes.

Afgangseksamen Januar 1872

Geometrisk Opgave

Beregning af Kuglesegmentets Volumen.

Anvendelse paa at finde en Formel for det Volumen, som ligger mellem en Kugleflade og to parallele Planer i Afstanden a og $2a$ fra Centrum til samme Side deraf, idet Kuglens Radius kaldes r og man antage $r \geq 2a$.

Arithmetisk Opgave

At opløse Ligningen $x^2 - x + \frac{1}{4}\sin^2 2v = 0$ med Hensyn til x og beregne denne Størrelses Værdier for $v = 35°15'7''$.

Dernæst findes Værdien af Udtrykket : $\dfrac{x^2 - x + \frac{1}{4}\sin^2 2v}{x^2 + \mathrm{tg}^2 v \cdot (1+\cos^2 v)x - 1}$ for $x = \cos^2 v$.

Afgangseksamen 1872

Geometrisk Opgave

1. Af en spids Vinkel A og dens modstaaende Side a i en retvinklet Trekant beregnes de andre Stykker.

2. Saa vel ved Konstruktion som ved Beregning bestemmes en Trekant af dens ene Vinkel A og Højderne h_b og h_c paa dens to tilstødende Sider. Beregningen udføres for $A = 100°$, $h_b = 4'$, $h_c = 5'$, saaledes at Sider, Vinkler og Areal findes.

Arithmetisk Opgave

1. At udvikle Formler for

   a) Summen af Leddene i en Differentsrække (arithmetisk Progression).
   b) Summen af Leddene i en Kvotientrække (geometrisk Progression).
   c) Produktet af Leddene i en Kvotientrække.

2. En Kvotientrække begynder med 1,001, Kvotienten er $1{,}001^2$, Produktet af de n første Led er 1,105116; hvor stor maa n være?

3. Hvor stort maa det første Led i en Differentsrække være, naar Differentsen er $(½)^n$ og Summen af dens n første Led skal være lig en Kvotientrækkes Sum, hvis første Led er 1, hvis Kvotient er ½ og som har n Led.
Ex. $n = 10$; $n = 1000$.

Afgangseksamen 1873

Geometrisk Opgave

En Pyramide har en regelmæssig $n$kant til Grundflade og ligesidede Trekanter til Sideflader; hvorledes indses, at n hverken kan være over 5 eller under 3 ?

Naar Pyramidens Kant er k, hvorledes findes saa dens Volumen, dens Sideliniers og Sidefladers Vinkler med Grundfladen, for $n = 3$, $n = 4$ og $n = 5$?

Hvorvidt ere disse Pyramider regelmæssige Polyedre eller Dele deraf?

Arithmetisk Opgave

Hvad forstaas ved to Tals største fælles Maal og mindste fælles Mangefold?
Der forlanges en kort Angivelse af Maaden, hvorpaa de findes.

Hvad forstaas ved to Polynomiers største fælles Maal og mindste fælles Mangefold?

Hvorledes findes de for

$$2x(x^2 + 11) + 8(2x^2 - 5)$$
$$\text{og}\quad 126x(x + 1) + 18(x^3 - 15)\ ?$$

At finde to Tal, hvis største fælles Maal er 12, hvis mindste fælles Mangefold er 7308, og hvis Sum er 600.

Kan man altid finde to Tal, hvis største fælles Maal er a, hvis mindste fælles Mangefold er b, og hvis Sum er c, hvilke hele Tal man end vælger for a, b og c?

Afgangseksamen 1874

Geometrisk Opgave

At fremsætte og bevise Egenskaberne ved de Firkanter, som kunne indskrives i en Cirkel.

I en saadan Firkant ere givne Siderne $AB = 5$ og $BC = 3$, Diagonalerne $CA = 7$ og $BD = 8$.

Hvilken Radius har da den omskrevne Cirkel?

Hvor store blive Vinklerne ABC og ADC? Hvilken Størrelse kunne Siderne AD og CD have?

Hvor store blive Firkantens andre to Vinkler BAD og BCD?

Arithmetisk Opgave

1. At udvikle en almindelig Formel, hvorved $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$ ændres til Formen $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, naar a, b, α, β ere reelle.

Formlen anvendes paa a) $\sqrt{p + \frac{1}{2}(p^2 - 1)\sqrt{-1}}$

og paa b) $\sqrt{2 - \sqrt{-8\sqrt{-1}}}$

I Resultaterne maa ingen anden Rodstørrelse end $\sqrt{-1}$ forekomme.

2. At bestemme de reelle Værdier af x og y, som tilfredsstille Ligningen

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{y + x\sqrt{-1}}\,.$$

Afgangseksamen Januar 1875

Geometrisk Opgave

Efter en kort Angivelse af den Maade, hvorpaa Formlerne for en Trekants Vinkler ved Hjælp af de 3 Sider findes, vises, at disse Formler ogsaa tjene til Vinklernes Beregning, naar blot Sidernes Forhold ere givne.

Naar Siderne a, b og c staa i følgende Relationer $\dfrac{a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \dfrac{b}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{c}{\sqrt{5}+1}$ hvilke ere da de nøjagtige Værdier for Vinklernes sinus og cosinus og hvor store ere Vinklerne selv?

Arithmetisk Opgave

Hvorledes opløses et Trinomium af anden Grad med Hensyn til x i Factorer af første Grad?

Anvendes til Opløsning af $x^2 - 2ax\mathrm{tg}v - a^2$ og derefter afgjøres, for hvilke x dette Trinomium bliver Nul, naar $a = 5$, $v = 60°$.

Endelig findes Værdien af Brøken $\dfrac{x^2 - 2ax\mathrm{tg}v - a^2}{x^2 - \dfrac{2ax}{\cos v} + a^2}$ for $x = a\cdot\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{v}{2})$.

Afgangseksamen 1875

Geometrisk Opgave

Udtrykkene for en Trekants Areal T og ene Side c ved de to andre Sider a og b og deres mellemliggende Vinkel udvikles.

De anvendes dernæst

a) til Bestemmelse af Vinklen C ved T, $a + b$ og c, og

b) til Bestemmelse af a og b ved T, c, C.

Exempler: til a) $a + b = 12'$, $c = 11'$, $T = 11{,}5\ \square'$.
til b) $c = 6'$, $T = 12\ \square'$, kos $C = 7/25$.

(Naar en af Anvendelserne a) og b) er gjort, bør Exemplet derpaa regnes, inden der begyndes paa den anden Anvendelse, fordi i Reglen en Besvarelse med et Exempel er bedre, end en med begge Anvendelser uden Exempler).

Arithmetisk Opgave

Hvilke Hovedformler gjælde for Kvotientrækker (geometriske Progressioner)?

Hvor mange Størrelser maa være kjendte ved disse Rækker, for at de øvrige skulle kunne findes?

Kaldes Kvotientrækkens første led a, Kvotienten q, Leddenes Antal n, hvorledes findes da disse Størrelser udtrykte ved x, naar Summen af Leddene er $\dfrac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$, naar det andet Led trukket fra det første giver $2\sin^2\frac{x}{2}$, og det tredje ligeledes trukket fra det første giver $\sin^2 x$?

Hvilke Værdier kan x faa, naar $q^4 + q^{-4} = \dfrac{6562}{81}$?

Afgangseksamen Januar 1876

Geometrisk Opgave

I en Trekant ABC kjender man sinus af hver af de to Vinkler A og B; hvorledes bestemmes da $\sin C$?

I Trekanten ABC er givet $\sin A = \frac{p}{q} < 1$ og den modstaaende Sides Forhold til den hosliggende $\frac{a}{b} = \frac{q}{p}$.

Hvorledes findes de andre Vinkler?

Hvorledes findes Siderne a og b, naar tillige Arealet T er givet?

Ex. $p = 5$, $q = 12$, $T = 330\frac{5}{9}$ Kvadratfod.

Arithmetisk Opgave

Hvorvidt kan man bestemme Summen af Leddene i en uendelig Kvotientrække?

En uendelig Kvotientrække har Summen af Leddene lig 245, men Summen af hvert tredje Led, deri fra det første at regne, lig 125.

Hvad er det for en Række?

Hvis Summen af hvert n^{te} Led i denne Række ikke maatte overstige 100, hvor stor maatte n da vælges?

Afgangseksamen Juni 1875

Beregningsopgave

Til en Cirkel hører en om- og en indskreven regulær Syvkant, hvis Perimetres Forskel er 1 Decimaltomme. Hvor stor er Cirklens Radius, og hvor stor Forskellen imellem Syvkanternes Arealer?

Projektionstegning

En Omdrejningskegle (ret cirkulær Kegle) staar paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan) og er gennemskaaret af et ret tresidet Prisme, hvis Grundflade er en i Keglens Grundflade indskreven, ligesidet Trekant, hvis ene Side er vinkelret paa den lodrette Billedplan. Man skal tegne dem i begge Projektioner og give Udfoldningen af Prismet med Skæringskurverne.

Geometri

I en Keglestub (afkortet Kegle) er der indskrevet en Pyramidestub (afkortet Pyramide) med regelmæssige n-Kanter til Endeflader.

I hvilket Forhold staar Keglestubbens Volumen til Pyramidestubbens?

Hvorvidt kan der i begge disse Legemer indskrives Kugler?

Hvorvidt kan der omskrives Kugler om dem?

Hvor stor er n, naar Keglestubbens Forhold til den tresidede Pyramidestub med to Centraltrekanter i n-Kanterne til Endeflader er 9,7749?

Forudsat, at Keglestubben kan have baade en omskreven og en indskreven Kugle, hvad er da Forholdet imellem disse Kuglers Volumina, idet Forholdet imellem Endefladernes Radier er m?

Arithmetik

1. Hvorledes udtrykkes x og y som rationale Funktioner af a og b, naar

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \quad \text{og} \quad \frac{xy}{ab}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}.$$

2. Naar man til 1 lægger Antallene af Kombinationer
   - af 1 Element iblandt n,
   - af 2 Elementer iblandt $n+1$,
   - af 3 Elementer iblandt $n+2$, o.s.v.

indtil Antallet af p Elementer iblandt $n+p-1$, saa udkommer Antallet af Kombinationer af p Elementer iblandt $n+p$.

Hvorledes bevises det?

Afgangseksamen Januar 1876

Beregningsopgave

En Omdrejningskeglestub (ret afkortet Kegle) har en krum Overflade paa 267,035 □ Alen, Endefladernes Radier tilsammen 17 Alen, Højden 4 Alen. Man skal finde Volumen deraf, Volumen af hele Keglen og Keglens Toppunktsvinkel.

Projektionstegning

Et Legeme begrænses af en Del af en Kegleflade og to plane Figurer, den ene en Cirkel, den anden en Ellipse; det er en skæv cirkulær Kegles tilbageblivende Del, efter at Spidsen er skaaret bort ved et plant Snit, som giver en Ellipse. Man forlanger først de to retvinklede Projektioner, idet den cirkulære Grundflade ligger i den vandrette Plan, og dernæst den krumme Overflades Udfoldning. (Det sidste sker med Tilnærmelse, idet Cirkelperiferien deles i f. Eks. tolv Dele, for hvilke tages de tilsvarende Korder).

Geometri

I en Cirkel med Radius R er indskreven en Trekant med en Vinkel A og med Forholdet $b : a = n$ imellem dennes hosliggende og modstaaende Side.

Man skal

1) konstruere Trekanten med de givne Størrelser R, A, n,

2) beregne Udtryk for Trekantens Sider og Vinkler ved de samme Størrelser,

3) vise, hvorledes Opløsningens Beskaffenhed afhænger af de givne Stykker, og

4) udføre Beregningen, naar $A = 30°$ og $n = \frac{8}{5}$.

Arithmetik

1. At angive den algebraiske Ligning, hvis Rødder ere

$$\cos\frac{2\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5} \quad \text{og} \quad \cos\frac{4\pi}{5} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}$$

2. Hvilket Udtryk for x findes af Ligningen

$$\begin{vmatrix} x-a & x-b & x-c \\ x-b & x-c & x-a \\ x-c & x-a & x-b \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

Vis, at $3x$ bliver af hel Form.

Afgangseksamen Juni 1876

Beregningsopgave

Et Laan paa 2 Millioner Kroner er afsluttet paa følgende Betingelser:

a) der svares i aarlig Rente $4\frac{1}{2}$ pCt.;
b) der betales 200000 Kroner i Renter og Afdrag aarlig i 10 Aar;
c) Resten af Gælden afgøres ved, at der i de næste 5 Aar betales en vis Sum aarlig i Renter og Afdrag.

Hvor stor bliver denne Sum?
(Saafremt der ønskes flere Decimaler i Logaritmen af 1 + Rentefoden, end Tavlerne i Almindelighed indeholde, meddeles, at dens Mantisse har følgende 10 Decimaler 0191162904).

Projektionstegning

Et regelmæssigt Oktaeder hviler paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan). Dets to Billeder (Projektioner) tegnes. Det skæres med en lodret Plan saaledes, at Snittet bliver en Sekskant. Dennes Projektioner og sande Størrelse angives.- Stillingen skal være saadan, at hverken den skærende Plan eller nogen af Oktaedrets Kanter staar vinkelret paa eller er parallel med den lodrette Billedplan. - Tegningen fordres optrukken, det synlige og usynlige tydelig skelnet fra hinanden.

Geometri

1. Bevis, at Forbindelseslinierne imellem Midtpunkterne af to Par modstaaende Kanter i et Tetraeder ligge i samme Plan parallel med det tredie Par modstaaende Kanter.
Bevis dernæst, at i Tetraedre med hvert Par modstaaende Kanter lige store vil Forbindelseslinien imellem det ene Pars Midtpunkter staa vinkelret paa Planen igennem de to andre Forbindelseslinier.

2. Man skal finde en Ligning imellem en Trekants ene Side a, de to hosliggende Vinkler B og C og den indskrevne Cirkels Radius r.
Anvendes til at finde Vinklerne B og C i en Trekant, naar Vinklen A er givet, og den indskrevne Cirkels Radius skal være $\frac{p}{q}$ af den omskrevnes.

Eks. $A = 60°$, $p = 1$, $q = 3$.

Arithmetik

1. At finde x af Ligningen $\sqrt{x+18}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+14}-\sqrt{x+5}=0$.

2. En Kvotientrækkes første Led er a, Kvotienten q, Leddenes Antal $N + 1$. Naar N er et Multiplum af k, hvad bliver da Produktet P_k af alle de Led, som staa paa første, $(k + 1)^{\text{te}}$, $(2k + 1)^{\text{te}}$ o.s.v., hver k^{te} Plads hele Rækken igennem, udtrykt ved a, q, N og k ?

Bevis dernæst at $P_k^{\frac{k}{N+k}} = P_i^{\frac{i}{N+i}}$, idet N ogsaa er et Multiplum af i.

Find endvidere en Relation imellem tre Indices h, i, k, der alle gaa op i N, og de tilsvarende Produkter P_h , P_i , P_k .

Hvad udtrykker denne Relation, naar P_i er mellemproportional imellem P_h og P_k ?
Anvendes til at finde N og P_4 , naar man har givet $P_2 = 2^{3660}$, $P_3 = 2^{2460}$.

Afgangseksamen Juni 1877

Beregningsopgave

En Cirkels Diameter er 194; fra dennes Endepunkter ere dragne to Korder i samme Halvcirkel, den ene er 69,644, den anden 78,790. Disses to andre Endepunkter forbindes ved en ret Linie, som skærer den forlængede Diameter i O.
Hvilke Afstande har O fra de to Korder?

Projektionstegning

Et ret tresidet Prisme, som har en ligebenet Trekant til Endeflade (hver af de lige lange Sider skal være dobbelt saa stor som Grundlinien, der bør have en Længde af en Tomme eller derover), og hvis Sidekanter ere fire Gange saa store som Endefladens Grundlinie, hviler paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan) paa den Sideflade, som indeholder Endefladernes Grundlinier, men saaledes at ingen af dets Kanter staar vinkelret paa den lodrette Billedplan. Det skæres af en Kugle med Centrum i Midten af den øverste Kant og med en Radius halv saa stor som Trekantens Højde. Skæringskurvens to Projektioner søges, hvorved særlig dens laveste Punkt maa bestemmes.

Geometri

1. Et Cirkelsegment (Afsnit) drejer sig om een igennem Cirklens Centrum gaaende Akse, der ikke skærer Segmentet. Forholdet imellem Volumen af det ved en hel Omdrejning af Segmentet frembragte Omdrejningslegeme og hele Overfladen af det samme Legeme er $\frac{1}{n}$ af Cirklens Radius.
Hvilket Udtryk faas til Bestemmelse af den tilsvarende Cirkelbues Gradeantal?
Hvor stort er dette for $n = 6$? Hvilke Værdier kan man give n?

2. Vinklen B i Trekanten ABC og dens Nabovinkel halveres. Halveringslinierne skære Siden $AC = b$ og dens Forlængelse henholdsvis i M og N.
Hvorledes udtrykkes Forholdet imellem Trekanterne MBN og ABC ved Hjælp af Vinklerne i ABC?
I hvilket Forhold maa Siden $AB = c$ staa til Siden $BC = a$, for at de to Trekanter skulle blive lige store?
Hvilke Værdier faa Trekantens Vinkler, naar $\angle B = 90°$ og $\Delta\, MBN = \Delta ABC$?
Hvilken Form faa Trekanterne MBC og ABN i dette Tilfælde?

Arithmetik

1. x Tal, af hvilke det første er a og hvert følgende y Gange saa stort som det foregaaende, have Produktet p, medens x andre Tal, af hvilke det første ogsaa er a, men hvert følgende y gange mindre end det foregaaende, have Produktet q.
Hvor mange og hvilke ere Tallene?
Eks. $a = 10^4$, $p = 2^{10} \cdot 10^{20}$, $q = 5^{10} \cdot 10^{10}$.

2. Imellem de fire Ligninger

$$\begin{aligned} xs + at + bu + cv &= 0 \\ -as + xt + du + ev &= 0 \\ -bs - dt + xu + fv &= 0\,, \\ -cs - et - fu + xv &= 0 \end{aligned}$$

elimineres $s, t, u, v,$ saa at der dannes en ordnet Ligning til Beregning af x ved a, b, c, d, e, f.

Afgangseksamen Juni 1878

Beregningsopgave

Af

$$e^{\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos y}} = 5{,}6046$$

$$5e^{\sqrt[3]{\cos x}} + 2e^{\sqrt[3]{\cos y}} = 16{,}7655$$

hvor e = 2,71828 søges x og y .

Projektionstegning

En Omdrejningscylinder staaende paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan) halveres ved et plant Snit lagt igennem Cylinderens Midtpunkt vinkelret paa den lodrette Billedplan og under 45° med den vandrette. Derpaa drejes den øverste Halvdel 180° om en Akse vinkelret paa Snittet i dets Midtpunkt. - Endelig drejes det saaledes frembragte Legeme 45° om Cylinderens oprindelige Akse. Man forlanger begge Projektioner af disse Stillinger og Udfoldning af den ene Halvdel af Cylinderen.

Geometri

1. Et Parallelepipedum begrænset af seks kongruente Rhomber kaldes et Rhomboeder. Hvorledes udtrykkes Rhomboedrets Volumen og dets indskrevne Kugles Radius ved Rhombens Side og den Vinkel deri, som begrænser Rhomboedrets ligesidede Hjørne? Naar Rhomboedrets Volumen er lig Kubus af den indskrevne Kugles Diameter, hvor stor er saa denne Vinkel? Alle fremmede Opløsninger maa fjernes.

2. En Trekants Sider ere a, b, c.
Hvilke Afstande har en Sides Berøringspunkt med den indskrevne Cirkel fra Sidens og dens Forlængelses Berøringspunkter med de udvendige Berøringscirkler?
Vis, at de to yderste af disse fire Punkter have samme Midtpunkt, som de to inderste.

3. Konstruktion af en Trekant af en Vinkel, den modstaaende Side og den indskrevne Cirkels Radius.

Arithmetik

I Ligningerne

$$x + y = t$$

$$ax + by = u$$

$$a^2 x + b^2 y = v$$

ere a og b bekendte, ulige store Størrelser, x, y, t, u, v ubekendte Størrelser.

Hvilken Betingelse maa t, u, v opfylde, for at x og y skulle kunne bestemmes saaledes, at de tre Ligninger ere tilfredsstillede?

Naar $a = 25$, $b = -10$, findes t, u og v i positive hele Tal, idet tillige $13080 > v > 13070$, saaledes at x og y da kunne findes.

Bevis, at disse x's og y's Værdier danne hver sin Differensrække.

Vis endelig, at naar a er positiv hel og $b = 1$, saa maa t og u være to paa hinanden følgende Led i en Differensrække, hvis første Led er v.

Afgangseksamen Juni 1879

Beregningsopgave

I en Tærning beregnes Diagonalens Vinkler med Kanten og med Sidefladen.
En Tærning har en Kant paa 30 Fod, og paa dens Diagonal tænkes afsat fra det ene Hjørne A en Længde AE lig 30 Fod. Fra E tænkes draget Linier EB, EC, ED til det andet Endepunkt af hver af Hjørnet A's Kanter, og tre andre Linier, EF vinkelret paa ABC, EG paa ACD, EH paa ADB, samt lagte Planerne EBF, EFC, ECG, EGD, EDH, EHB. Derved tænkes dannet et konvekst Polyeder med Hjørner i A, B, C, D, E, F, G, H.
Dets Overflade, Volumen og indskrevne Kugles Radius søges, tillige med Hjørnet E's Sider ($\angle BEF$, $\angle FEC$ o.s.v.).

Projektionstegning

Et Legeme er sammensat af et ret Parallelepipedum paa kvadratisk Grundflade og en Halvkugle, af hvis begrænsende Storcirkel en Del falder i een af Parallelepipedets rektangulære Sideflader med Centrum i Linien imellem to modstaaende Kvadratsiders Midtpunkter og tangerende een af de øverste Kvadratsider. Parallelepipedets Højde er dobbelt saa stor som Halvkuglens Diameter og Kvadratsiden lig Halvkuglens Radius.
Der forlanges Afbildninger (Projektioner) af dette Legeme paa en vandret og en lodret Billedplan (Projektionsplan), idet Halvkuglen rører, og den nederste Kvadratside hviler i den vandrette Plan. - Den lodrette Billedplan kan vælges parallel med Parallelepipedets to lodrette Sideflader.

Geometri

1. En vilkaarlig Trekant med Siderne a, b, c og en Cirkel med Radius r ligge i samme Plan, den ene uden for den anden.
Hvorledes udtrykkes ved a, b, c og r Siderne a_1, b_1, c_1 i en Trekant indskreven i den givne Cirkel, naar de skulle være parallelle med henholdsvis a, b og c?
Hvorledes kan man konstruere Trekanten (i to Stillinger)?

2. Radierne r og r_a i en Trekants indskrevne og ene udvendige Røringscirkel ere givne tillige med Afstanden d imellem Cirklernes Røringspunkter med samme Side a.
Sider og Vinkler søges udtrykte ved r, r_a og d.
Eks. a) $d = 0$, b) $r = 4$, $d = 5$, $r_a = 6$.

Arithmetik

1. Naar Ligningen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ har to Par lige store Rødder, hvorledes maa da Koefficienterne b og d være udtrykte ved a og c, og hvor store blive Rødderne, ligeledes udtrykte ved a og c?
Eks. $x^4 + 4x^3 + \frac{9}{2}x^2 + x + \frac{1}{16} = 0$.

2. At finde x og y af Ligningerne :

$$x \cdot y^{\log x} = 8000,$$
$$y \cdot x^{\log y} = 16.$$

Logaritmerne tagne i det briggiske System.
De fundne Værdiers Rigtighed prøves.
(Løsningen af denne Opgave betragtes kun som fuldkommen tilfredsstillende, naar den er gennemført uden at støttes paa Opslag i Tavlen; men en fuldstændig Gennemførelse ved Opslag er at foretrække for en ufuldstændig Gennemførelse).

Afgangseksamen Juni 1880

Beregningsopgave

En Pyramide paa regelmæssig Grundflade har dennes Side $a = 0{,}514094'$, dens omskrevne Cirkels Radius $r = 0{,}751555'$ og alle Sidekanterne lige store med $b = 1{,}954043'$.
Man søger Pyramidens Sideantal, Volumen, indskrevne Kugles Radius, Sidekantens og Sidefladens Vinkler med Grundfladen.

Projektionstegning

En regelmæssig femsidet Pyramide (ret Pyramide med en regelmæssig Femkant til Grundflade) tegnes staaende paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan) med Sidekanter, der danne Vinkler paa 60° med Grundfladen, og af dem er den ene parallel med den lodrette Billedplan. Ved et plant Snit vinkelret paa Midten af denne Kant skæres Pyramidens øverste Del af, glider ned af Snitplanen, indtil den naar dennes vandrette Spor, og drejer sig derpaa om dette, indtil Spidsen kommer ned i den vandrette Billedplan. I denne Stilling tegnes det afskaarne Legemes to Projektioner, tillige angives dets Udfoldning.

Geometri

1. Bestem Vinklerne i en Trekant ABC med en given Vinkel A saaledes, at Projektionen af Siden b paa c er lig Siden a.
Under hvilken Betingelse er Opgaven mulig?
Særlig findes Betingelserne for, at Vinklen C bliver spids, ret eller stump.

2. En Kugle med Radius r skæres af en Omdrejningskegle med Toppunktsvinkel $2b$ i to parallele mindre Cirkler, hvorimellem der paa en Storcirkel, hvis Plan gaar igennem Keglens Akse, afskæres en Bue, hvis Gradeantal er $2a$.
Man skal bestemme Udfoldningen saavel af den indenfor Kuglen liggende Keglestubs (afkortede Kegles) krumme Overflade (beregne Længder og Vinkler ved a, b og r), som af en Del deraf imellem to Sidelinier paa Keglen, hvis mellemliggende Buer paa Cirklerne i Gradeantal ere n.
Anvendes paa Jorden betragtet som en Kugle med Radius $r = 845$ Mile,
$2b = 111°\,21'46''$, $2a = 5°$, $n = 4°\,30'$.
Den sidste Udfoldning falder nær sammen med det Areal, som behøves til et Kort over Danmark.

Arithmetik

1. For Udtrykket $(-119 - 120\sqrt{-1}\,)^{\frac{1}{4}}$ søges dets fire Værdier af Formen $x + y\sqrt{-1}$, hvor x og y ere reelle.

2) Ved Anvendelse af Binomialformlen paa $(a \pm b\sqrt{-1}\,)^m$ bevises, at enhver Potens af to Kvadrattals Sum, $(a^2 + b^2)^m$ er en ny Sum af to Kvadrattal .

Hvilke to Kvadrattals Sum er $(5^2 + 9^2)^4$?

Afgangseksamen Juni 1881

Beregningsopgave

En Kommune behøver et Laan paa 1000000 Kroner. A vil udlaane denne Sum til 4½ pCt. aarlig imod at faa den betalt med Renter og Renters Renter i lige store aarlige Beløb i 18 Aar.
Hvor store blive disse Beløb?

B tilbyder Laanet til 5 pCt. og vil betales med 70000 Kroner aarlig, indtil Kapitalen med Renter og Renters Renter er betalt.
Hvor længe varer det inden Gælden er betalt?

En Rigmand C i selve Kommunen tilbyder at yde 2500 Kroner til hver af Kommunens aarlige Udbetalinger, saafremt det første Tilbud til den lavere Rentefod modtages, imod at han, efter 19 Aars Forløb, naar alle Afdrag til A ere erlagte, faar sit hele Tilgodehavende betalt paa een Gang.
Hvilken Kapital tilkommer der ham med Renter og Renters Renter til $4\frac{1}{2}$ pCt.?

$$\log 1{,}045 = 0{,}01911629.$$

Projektionstegning

Et tresidet Prisme med uligesidet Grundflade i den vandrette Billedplan (Projektionsplan) og med Sidekanterne skraat stillede imod begge Billedplaner er givet. Fra hver Vinkelspids i Grundfladen afsættes op ad Sidekanten et Stykke dobbelt saa langt som den lige over for Vinklen liggende Side i Grundfladen. Sporene for den ved Endepunkterne af disse tre Stykker bestemte Plan konstrueres tillige med den sande Størrelse af den Trekant, der har de samme Endepunkter til Vinkelspidser.

Geometri

1. I et Tetraeder $ABCD$ træffer Aksen i en Omdrejningskegleflade (ret cirkulær Kegleflade), der tangerer de tre Hjørner ved D begrænsende Planer, Trekanten ABC i Punktet O.

Bevis at
$$\frac{\Delta BOC}{\Delta BDC} = \frac{\Delta AOB}{\Delta ADB} = \frac{\Delta COA}{\Delta CDA}.$$

2. I en Trekant ACB, hvor Vinklerne A og B ere spidse, er trukket Højderne paa a og b. En Cirkel, hvis Radius er given, er indskreven i den af Højderne og Siden c dannede Trekant, og dens Berøringspunkt med Siden c deler denne i de givne Stykker p og q.

Sider og Vinkler i ΔABC udtrykkes ved p, q, r.
Vis, at Opgaven forudsætter r mindre end saa vel p som q.
For $r = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $q = 3$, udføres Regningerne, og derefter undersøges, hvorledes r maa være, naar $p = 2$, $q = 3$, for at gøre Vinklen C spids, ret eller stump.

Arithmetik

At bestemme x, y, z under den simpleste Form saaledes, at $u + \frac{1}{u} = xu^2 + yu + z$ tilfredsstilles, naar de tre Størrelser a, b, c sættes i Stedet for u.
Opløsningen kræves ikke udført ved Determinanter, men det ønskes paavist, hvorledes det for x fundne Udtryk fremkommer ved Anvendelsen af Determinanter.
Eks. Hvor store blive x, y, z, naar a, b, c ere de tre Rødder i Ligningen $125\,t^4 + 100\,t^3 - 1 = 0$, hvis fjerde Rod er $\frac{1}{5}$?

Afgangseksamen Juni 1882

Beregningsopgave

I en Cirkel trækkes to paa hinanden vinkelrette Diametre, og fra Midten af den ene Radius trækkes en ret Linie til eet af den derpaa vinkelrette Diameters Endepunkter. Om dette Punkt som Centrum slaas med den nævnte Linie som Radius en Cirkelbue, til den skærer den givne Periferi til begge Sider. Derved deles den givne Cirkels Areal i to Dele, A paa Buens konkave Side, B paa den konvekse.

Forholdet $\frac{A}{B}$ findes med 4 Decimaler.

Projektionstegning

I Grundlinien (Projektionsaksen) ligge fra Venstre til Højre 6 Punkter i følgende Orden: a_L, b_L, c, d_L, o, p saaledes, at $a_Lb_L = a$; $b_Lc = 2a$; $cd_L = a$; $d_Lo = 5{,}4\ a$; $op = 3{,}6\ a$. De fire første ere lodrette Billeder (Projektioner) af de fire Vinkelspidser af en Firkant, hvis tilsvarende vandrette Billeder ere a_V, b_V, c, d_V, idet $a_La_V = 2a$, $b_Lb_V = 4a$, $d_Ld_V = 3a$. Toppunktet af en Pyramide med Firkanten til Grundflade ligger i en Plan vinkelret paa Grundlinien igennem o over den vandrette, foran den lodrette Plan, saaledes at begge Billeder (Projektioner) af Pyramidens Kant fra c til Toppunktet ere $8a$. En Plan har sit lodrette Spor igennem p og Toppunktets lodrette Billede o_L og sit vandrette Spor igennem Toppunktets vandrette Billede o_V. Find Pyramidens Snit med Planen og drej Planen med samt Snittet ned i den vandrette Billedplan. Vis desuden, at Planen maa være vinkelret paa Kanten fra c til Toppunktet.

($\overset{a}{\overline{\hspace{3cm}}}$) Vælges a af hostegnede Længde, kan hele Tegningen optage et Areal af c. 9 Tommer i Kvadrat.

Geometri

1. I en Halvcirkel med Diameter $AB = 2r$ er indskrevet en Trekant ABC.
Hvorledes udtrykkes de to Volumina, som Segmenterne AC og BC beskrive ved at drejes helt rundt om AB, ved r og Vinklen A?
Find denne Vinkel, naar det Volumen, AC beskriver, er $\frac{1}{9}$ af det ved BC dannede.

2. I Trekanten ABC kender man Vinklerne, af hvilke C er den største. Naar Siderne a og b drejes ned paa Siden c ved Cirkelbuer, slagne om henholdsvis B og A som Centrer, afskæres derved af c imellem Buerne et givet Stykke d.
Find logaritmiske Udtryk for den indskrevne Cirkels Radius og for Siderne, samt vis, hvorledes Trekanten kan konstrueres.

Arithmetik

1. Ved Binomialformlens Hjælp vises, at

$$6[(a + (b + c))^n - ((b + c) - a)^n - (a - (b - c))^n - (a + (b - c))^n]$$

altid er delelig med $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (a - (b - c))^3 - (a + b - c)^3$, saafremt n er ulige. Kvotienten findes, naar $n = 5$ og $n = 7$.

2. Summen af to Kvotientrækker med samme Kvotient, den ene med dobbelt saa mange Led som den anden, er – 2; det første Led i begge er 1 mindre end Kvotienten, og Summen af andet, fjerde, sjette o.s.v. hvert andet Led i den af de to Rækker med flest Led er $-\frac{1}{11}$. Rækkerne bestemmes og prøves.

Afgangseksamen Juni 1883

Beregningsopgave

Tetraedret O-ABC har $AB = 6'$, $BC = CA = 5'$, $OA = OB = 9'$, $OC = 8'$. Igennem AB er lagt en Plan, som halverer Tetraedret.

Hvilke Vinkler danner denne Plan med Tetraedrets tilstødende Sidevægge, og hvor store ere de to Volumina? (Irrationale Størrelser, som maatte opstaa i Regningen, beholdes, indtil den endelige Bestemmelse af de søgte Størrelser skal ske).

Projektionstegning

Paa en Tærning staar en Omdrejningskegle (ret Kegle) hvis lodrette Billede er en retvinklet Trekant, og hvis Grundflade er den indskrevne Cirkel i det Tærningen begrænsende Kvadrat. En Plan vinkelret paa Midten af en Sidelinie i Keglen, som ikke er parallel med den lodrette Billedplan, skærer Legemerne. Find Snittets Projektioner og sande Størrelse.

Geometri

1. En Omdrejningskeglestub (ret afkortet Kegle), som er omskreven om en Kugle, har imellem sin Akse og Sidelinie en Vinkel paa 30°.
I hvilket Forhold staar dens Volumen til Kuglens?
Hvorledes findes Vinklen, naar dette Forhold er n ?
Eks. $n = \frac{21}{8}$.

2. Ved Hjælp af Parablens Definition findes Ligningen for den Parabel, hvis Ledelinie har Ligningen $y + x = 0$, og hvis Brændpunkt er (a,a).
Vis, at Parablen tangerer begge Koordinatakser, og find dens Skæring med den rette Linie, hvis Ligning er $y = \ x + b$.

Aritmetik

1. Vis, at de periodiske Kædebrøker

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{x}}} \quad \text{og} \quad x = -\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}}$$

ere Rødder i den samme kvadratiske Ligning.
Naar denne Ligning er $11x^2 - 36x - 7 = 0$, hvilke hele positive Værdier have da a, b, og c ? Hvilke Værdier faa Kædebrøkerne i dette Tilfælde?

2. En Mand har laant en Kapital A, hvoraf han svarer Rente til en aarlig Rentefod r. En uventet Indtægt af Kapitalen B sætter ham i Stand til at betale sin Gæld. Han vil imidlertid ikke straks udbetale mere end, at han med Renten af sin tilbage værende Del af Kapitalen B (til samme Rentefod r) som lige store aarlige Afdrag kan betale den resterende Del af Laanet i n Aar.

Den udbetalte Sum udtrykkes ved A, B, r og n.
Hvilke Grænser maa B have, for at Løsningen af Opgaven skal være mulig.

Afgangseksamen Juni 1884

Beregningsopgave

En regelmæssig femsidet Pyramide med alle sine Kanter lige store har Grundfladens Diagonal 12 Fod lang. Find Radius i den indskrevne Kugle.

Projektionstegning

Hjørnerne A, B, C, D i et Tetraeder, som ikke har nogen Kant parallel med nogen af Projektionsplanerne, ere givne ved deres Projektioner.
Find Sporene af Planen ABC, Projektioner og Spor af den fra D paa ABC vinkelrette Linie, Udfoldning af Tetraedret samt den sande Længde af Højden fra D.

Geometri

1. Af en Trekant kender man en Vinkel A; den modstaaende Side a og Perimeter $2s$.

Find Formler til Beregning af de to andre Sider b og c.
Eks. $A = 120°$, $a = 7'$, $2s = 15'$.

2. En ret Linie AB deles af et Punkt M i to Stykker af de givne Længder $AM = p$, $BM = q$; dens Endepunkter A og B glide henholdsvis paa Ordinataksen og paa Abscisseaksen. Hvad bliver da det geometriske Sted for M ?
Hvorvidt kan AB i nogen af sine Stillinger blive Tangent til dette geometriske Sted?

Arithmetik

1. Hvorledes findes x af Ligningen $\sin x \cos x + a \sin^2 x = b$?

Beregn de Værdier af x imellem 0° og 360°, som tilfredsstille Ligningen, naar $a = 5$, $b = 3$.

2. Find Middeltallet af de virkelig 10-cifrede Tal, som skrives med de 10 Cifre uden Gentagelser (deriblandt altsaa ikke de, der begynde med 0).

Afgangseksamen Juni 1885

Beregningsopgave

Vinklen imellem to Tangenter til en Cirkel er givet $2u = 84°48'10''$ tillige med Tangentvinklens Ben $a = 10'3''$ (Duodecimalmaal). En ret Linie igjennem Tangenternes Skæringspunkt under Vinklen $v = 54°56'18''$ med det ene Ben skærer Cirklen.
Find den Korde, Cirklen afskærer af Linien i Fod og Tommer, og Forholdet imellem de to Udsnit (Sektorer), som svare til de Buer, hvori Linien deler Periferien, udtrykt i hele Tal.
De nødvendige Logarithmeregninger forlanges udførte ved Formler, som ere bekvemme for denne Regning.

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan afsættes Sporet af en Plan og uden for dette en Cirkel med en indskreven vilkårlig Femkant. Planens andet Spor bestemmes saaledes, at Planen danner en Vinkel paa 60° med den vandrette Plan, og derpaa drejes Cirklen med Femkanten om det vandrette Spor saaledes, at den kommer til at ligge i Planen. Begge Billeder (Projektioner) af Cirklen og Femkanten konstrueres.

Geometri

1. Et plant Snit igjennem en af Grundfladens Kanter i et regulært Tetraeder afskærer nærmest Grundfladen et nyt Tetraeder, hvis Volumen er en Trediedel af det hele.
Hvor stor Vinkel danner Snittet med Grundfladen?

2. Efter at have bestemt et Punkt O inden for en ligesidet Trekant, hvis Afstande fra Siderne forholde sig som $1 : \sqrt{m} : \sqrt{m}$, tages dette Punkt til Begyndelsespunkt for et retvinklet Koordinatsystem, hvis Abscisseaxe er parallel med den første Side (Afstanden a der fra betragtes som bekjendt), og hvis Ordinataxe altsaa falder paa Høiden til den samme Side.
Find dernæst det geometriske Sted for de Punkter M, som have Kvadratet paa deres Afstand MP fra den første Side lig $\frac{1}{m}$ af Rektanglet af Afstandene MQ og MR fra de to andre Sider, disse Afstande tagne positive imod Trekantens Sider.
Ex. 1. $m = 1$. 2. $m = \frac{1}{4}$.

Arithmetik

1. At danne og opløse de symmetriske Ligninger, der give saadanne rationale Værdier for x og y, at $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 = 217 + 88\sqrt{6}$.

2. Naar Rødderne α og β i en kvadratisk Ligning skulle tilfredsstille $x^n = Ax + B$, hvorledes maa da A og B bestemmes ved disse Rødder?
Anvendes til at finde A og B saaledes, at $x^{½} = Ax + B$, naar $x^2 - 32x + 1156 = 0$, hvorved mærkes, at der faas fire Udtryk for $x^{½}$, parvis forskjellige i Fortegn.

Afgangseksamen Juni 1886

Beregningsopgave

Et sexkantet Areal *MNPQRS* paa 75 Td. Land deles af Diagonalen $MQ = 1200$ Alen i to lige store Stykker. Man ved desuden, at Siderne *MN* og *MS* ere lige store, hver lig 860 Alen, at Diagonalerne *MP* og *MR* ere 1140 Alen hver, samt at $\angle MQP = \angle MQR = 69°20'$, men Trekanterne *MQP* og *MQR* ere dog ikke kongruente.

Hvor store ere Vinklerne *QMN* og *QMS* ?
1 Td. Land = 14000 Kvadratalen.

Projektionstegning

En ret Keglestub (ret afkortet Kegle) staar paa den vandrette Billedplan (Projektionsplan), dens Højde er halvanden Gang Grundfladens Radius og dens øverste Endeflades Radius det halve af den sidstnævnte. I Centrum af Keglestubbens øverste Endeflade hviler en Kugle med samme Radius, som Keglestubbens Grundflade har.
Konstruer en Plan, som tangerer Keglestubben i en Frembringer, der ikke er parallel med den lodrette Billedplan, og find Planens Skæring med Kuglen baade i begge Billedplaner og i sand Størrelse.

Geometri

1. Forholdet imellem en Omdrejningskegles (ret cirkulær Kegles) omskrevne og indskrevne Kugles Overflade er m.
Hvor stor er Keglens Toppunktsvinkel, og hvilke Værdier kan m have?
Ex. $m = \frac{81}{16}$.

2. I et retvinklet Koordinatsystem er der givet en ret Linie med Ligning $x + y = 0$ og et Punkt $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.
Find Ligningen for den Kurve, hvis Punkter have samme Afstand fra den rette Linie og fra Punktet, og vis, at den kan bringes paa Formen $\pm\sqrt{\frac{y}{a}} \pm \sqrt{\frac{x}{a}} = 1$.
Hvilket Keglesnit maa Kurven være, og hvorledes maa det ligge i Koordinatsystemet?

Arithmetik

1. En Differensrække paa x^p Led har til første Led $x^{p+1} - x^p + 1$ og Summen x^{2p+1}.

Find Differensen og sidste Led.
Vis dernæst, hvorledes enhver Potens af et helt Tal med ulige Eksponent kan udtrykkes ved en Sum af flere paa hinanden følgende ulige Tal.

Paa hvilke Maader kan man ad denne Vej opløse 5^{5^5} i en Sum af paa hinanden følgende ulige Tal, og hvor mange Led findes der i hver af de saaledes dannede Summer?

2. En Mand sætter i n paa hinanden følgende Terminer samme Sum ud paa Rente og Rentes Rente, men hæver i hver af de næste n Terminer den samme Sum.
Hvor meget har Manden tilbage af sin Kapital umiddelbart efter den sidste Hævning?
Hvor stor maa n være, naar denne Rest er p Gange den oprindelig udsatte Sum?
Ex. $p = 13$, Renten 5 pro Cent.

Afgangseksamen Januar 1887

Beregningsopgave

Beregn Overfladen af Tetraedret *ABCD*, naar $\angle CAD = 42°8'16''$, $\angle DAB = \angle BAC = 57°19'42''$, $AB = 0{,}5183'$, $BC = BD = 0{,}4958'$, og naar det er givet, at Trekanterne *BAC* og *BAD* ikke ere kongruente.
Beregn endvidere de Stykker, hvori Kanten *CD* deles af *AB*'s Projektion paa Planen *CAD*.

Projektionstegning

Tre Punkter *a*, *b*, *c* ere givne, hvert ved sine to Billeder (Projektioner), og ingen af disses Forbindelseslinier er parallel med eller vinkelret paa Grundlinien (Projektionsaxen). Der søges Billederne (Projektionerne) af Skæringslinien mellem de Kugler med Centrum *a* og *b*, som gaa igjennem *c*, samt det vandrette Spor af en Kegleflade gjennem denne Skæringslinie og med Toppunkt i det Punkt af den ene Kugle, som er fjernest fra den vandrette Billedplan.

Geometri

1. En regelmæssig 5-sidet Pyramidestub er omskreven om en Kugle. Radierne i Grundfladernes indskrevne Cirkler ere *R* og *r*.
Find Stubbens Volumen og hele Overflade.

2. Gjennem et givet Punkt af en Parabel ere dragne Liniepar, hvis Vinkler halveres af Parablens Normal.
Bevis, at Forbindelseslinien mellem et saadant Liniepars andre Skæringspunkter med Parablen gaar igjennem et fast Punkt.
I hvilke Punkter berøres Parablen af Tangenter fra dette Punkt?

Arithmetik

1. Hvilke hele og positive Værdier af *x* og *y* tilfredsstille Ligningen

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 14\,,$$

naar alle Rodstørrelserne skulle have de i Ligningen angivne Fortegn?
Det mindste Par fundne Værdier prøves ved Indsættelse i den givne Ligning.

2. En Mand køber 1. Januar 1865 et Stykke af en Byggegrund for 1000 Kroner og 1. Januar 1870 det øvrige for 3000 Kroner. Han bortsælger 1. Januar 1875 et Stykke for 8000 Kroner og 1. Januar 1880 det øvrige for 4000 Kroner.

Hvor mange pCt. p.a. har han havt af denne Forretning?

Afgangseksamen Juni 1887

Beregningsopgave

1. Find x af Ligningen $\cos 3x = (\cos \alpha)^{\cos \alpha}$, naar $\alpha = 57°3'15''$.

2. 178530 Kroner udlaanes til 4 pCt. i aarlig Rente. Gjælden med Rente og Rentes Rente afbetales ved aarlige Udbetalinger, den første 3 Aar efter, at Gjælden er stiftet. Udbetalingerne ere paa 20000 Kroner undtagen den sidste, som er mindre. Hvor mange Udbetalinger ere nødvendige, og hvor stor maa den sidste Udbetaling være?
(log1,04 = 0,0170333).

Projektionstegning

Tegn først Billederne (Projektionerne) af tre kongruente og rette (retstaaende) Kegler, hvis Grundflader ligge i den vandrette Billedplan (horizontale Projektionsplan) og berøre hinanden to og to, og hvis Toppunkter ligge over den nævnte Billedplan. Beliggenheden skal være saadan, at ingen af de fælles Tangentplaner til Keglerne staar vinkelret (lodret) paa den lodrette Billedplan (vertikale Projektionsplan). Konstruer dernæst Billederne af en fjerde Kegle, som er kongruent med de tre første, men med Toppunktet nedad, og hvis vandrette Spor berører hver af de førstes Grundflader. Keglerne betragtes som uigjennemsigtige. - Tillige konstrueres det lodrette Billede af den Kurve, hvori den fjerde Keglefladès Forlængelse ud over sin Grundflade skærer en ydre, fælles Tangentplan til to af de tre første Kegler, samt denne Skæringskurves sande Figur. Kegleﬂadens Forlængelse og Tangentplanen betragtes som gjennemsigtige, og Skæringskurvens Projektion og sande Figur trækkes fuldt op.

Geometri

1. En Cylinder med Højden h er indskreven i en Kugle med Radius r.
Find Diameteren i den Kugle, der har samme Volumen (Rumfang) som det ringformede Legeme, der begrænses af Cylinderens krumme Overflade og af et Bælte (en Zone) af Kuglefladen.
Hvor stort maa Forholdet $\frac{h}{r}$ være, naar n saadanne Kugler skulle kunne ligge saaledes inden i Cylinderen, at enhver af dem berører to andre samt Cylinderens krumme Overflade? Expl. $n = 6$.

2. Find Ligningen for det geometriske Sted for et saadant Punkt, at Tangenter derfra til to givne lige store Cirkler danne en given Sum. (Tangenterne ere regnede mellem Punktet og Røringspunkterne. Koordinatsystemet vælges saaledes, at Ligningen faar en simpel Form).
Hvilke Kurver kan den fundne Ligning fremstille?

Arithmetik

1. Løs Ligningen $37[x^2 - 2(m-1)x + m^2] + 17m = 3142$
med Hensyn til x, og find de hele og positive Værdier af m, for hvilke Rødderne blive reelle hele Tal.
Det bør af Løsningen fremgaa, at den eller de fundne Værdier for m virkelig ere de eneste brugelige.

2. Find en Differensrække med et lige Antal Led, naar dette Antal $2n$, Leddenes Sum s og Forskjellen f mellem Summen af Kvadraterne af Leddene med lige Nummer og Summen af Kvadraterne af Leddene med ulige Nummer ere givne.
Expl. $n = 3$, $s = f = 21$.

Afgangseksamen Januar 1888

Beregningsopgave

I en sfærisk trekant ABC med Siderne (udtrykte i Grader) a, b, c, har man

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

og de analoge, hvor s betyder Sidernes halve Sum.

Beregn Forskellen mellem Arealet af den sfæriske Trekant ABC, liggende paa en Kugle med Radius 1, og den plane Trekant med de samme Vinkelspidser, idet $a = 32°16'$, $b = 26°12'20''$; $c = 38°44'$.

Projektionstegning

En ret cirkulær Cylinder med et indskrevet regulært 6-sidet Prisme fremstilles ved sine Projektioner, idet Cylinderens Frembringer ikke er parallel med nogen af Billedplanerne. Dernæst konstrueres Sporene af en Plan, der rører Cylinderen langs een af det indskrevne Prismes Sidekanter.

Geometri

1. Et regulært Tetraeder kan ved Drejning om forskellige Akser bringes til at dække sig selv. Hvor mange saadanne Akser gives der, og hvorledes ere de beliggende?

2. Fra Punktet A med Koordinaterne x og y trækkes en Linie, der skærer Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ ,\ \ (a > b)$$

i Punkterne B og C.
I hvilken Retning skal Linien trækkes, for at Produktet $AB \cdot AC$ skal blive saa lille som mulig? (A antages at ligge udenfor Ellipsen, og der tages intet Hensyn til, om Skæringspunkterne ere reelle eller imaginære.)

3. Konstruer en Trekant af Højden og Medianen til en Side og denne Sides modstaaende Vinkel.
Kandidaten kan efter Behag løse Opgaven ved geometrisk Konstruktion eller gennem Beregning.

Arithmetik

1. En Brøk udvikles paa sædvanlig Maade i Kædebrøk, kun at man stadig som ufuldstændige Kvotienter tager de nærmest højere hele Tal, saa at Kædebrøken faar Formen

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 \ldots}}\ .$$

Hvorledes beregnes efterhaanden Konvergenterne, og hvorledes kunne disse Kædebrøker anvendes til Løsning af den ubestemte Ligning $ax - by = 1$?

2. Af en vilkaarlig Størrelse x_0 beregnes efterhaanden $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ ved Formlen

$$x_{n+1} = a - \frac{1}{d + x_n}\ ;\ \ (n = 0,1,2,3,\ldots).$$

Angiv de Relationer, der maa findes mellem a og d, for at derved skal faas identisk enten $x_2 = x_0$ eller $x_3 = x_0$ eller $x_4 = x_0$.

Afgangseksamen Juni 1888

Beregningsopgave

1. Beregn Værdien af cos. tg. log. π.

2. Vis, at $\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\cdot\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9$, naar $x+y+z=0$.

Projektionstegning

Et Monument er dannet af en ret Cylinder, der er stillet lodret paa et Fodstykke, som er et paa den vandrette Projektionsplan liggende Kors; dettes fire Arme ere Tærninger og Cylindrens Højde er to Gange Tærningens Kant. Cylindrens Grundflades Periferi gaar gjennem de fire Punkter, hvor Tærningerne støde sammen; den lodrette Projektionsplan maa ikke faa nogen i Forhold til Monumentet særlig simpel Stilling.
Monumentet væltes, idet det drejes om en i den vandrette Plan liggende Linie, der gaar gjennem to af Korsets yderste Spidser; (til Cylindrens øverste Endeflades Periferi rører den vandrette Plan).- Tegn de to Projektioner af det væltede Monument.

Geometri

1. Find Koordinaterne til Midtpunktet af den Korde, der forbinder Røringspunkterne for de to Tangenter, der kunne trækkes fra Punktet (m, n) til Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Vis, at den Linie, der forbinder dette Midtpunkt med Punktet (m, n), er en Diameter.

2. To Kugler med Radierne R og r skære hinanden saaledes, at to Radier til et Punkt af Skæringslinien ere vinkelrette paa hinanden; find Volumen af det Legeme, der begrænses af de to Kugleflader og ligger inderfor dem begge.

3. Tre Punkter A, B, C og en Linie gjennem C ere givne i samme Plan; i Linien skal bestemmes et saadant Punkt, at AB og BC derfra ses under lige store Vinkler.

Arithmetik

1. Løs Ligningerne $\quad zy-y^2=5+5z-6y \quad$ og $\quad zy-z^2=-10+3z-5y$.

2. I Polynomierne

$$x^4-2x^3+3x^2+2x+y \quad \text{og} \quad x^4-3x^3+4x^2+3x+z$$

skulle for y og z sættes saadanne Tal, at de to Polynomier faa en fælles Faktor af anden Grad; vis at y og z da netop bestemmes ved de to under 1. givne Ligninger.

3. I Differensrækken

$$a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots,\ a+nd$$

mærkes p vilkaarlige af Leddene ($p<n$), deriblandt det sidste. Under de første Led af Rækken skrives $b, b, b, \ldots$, saaledes at det sidste b kommer under det første mærkede Led, derpaa under de følgende Led $b+d$, $b+d$, …, saaledes at det sidste $b+d$ kommer under det andet mærkede Led, derpaa $b+2d$ paa lignende Maade o.s.v.; under det sidste Led kommer derved $b+(p-1)\cdot d$.
Find Summen af alle Leddene i den nederste Række plus de mærkede Led i den øverste Række.

Afgangseksamen Januar 1889

Beregningsopgave

1. I en Cirkel er indskrevet en Trekant, hvis Sider ere Femkantsiden, dennes Supplementkorde og en Diameter; Figuren drejes en Gang rundt om denne Diameter.
Find Forholdet mellem de Volumina, der beskrives af Trekanten og af det Afsnit (mindre end Halvcirklen), hvis Korde er Femkantsiden. Resultatet gives med 3 Decimaler uden Brug af Logarithmer.
2. Beregn $\sin\sqrt{\cos\sqrt{\log\pi}}$.

Projektionstegning

En ret cirkulær Kegle, hvis Vinkel ved Toppunktet er 60°, ligger paa den vandrette Plan, som den rører langs en Sidelinie, der danner en Vinkel paa 45° med Projektionsaxen. Spidsen afskæres ved en Cylinderflade, hvis Projektion paa den vandrette Plan er en Cirkel, der har sit Centrum i Keglens Toppunkt, og hvis Radius er Keglens halve Sidelinie. Tegn Projektionerne samt Udfoldningen af den afskaarne Spids.

Geometri

1. Bevis, at for hver enhver Trekant er

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R\,,$$

hvor R er Radius til den omskrevne Cirkel, medens r_a, r_b, r_c, r ere de fire Røringscirklers Radier.

2. Find Ligningen for en Cirkel, som rører Ordinataxen og gaar gjennem Brændpunktet for Parablen $y^2 = px$.
Søg derpaa det geometriske Sted for det Punkt paa Cirkelperiferien, der ligger diametralt modsat Brændpunktet.

3. I en given Cirkel skal indskrives en Trekant; man kjender Længden og Retningen af dens ene Side samt et Punkt af dennes modstaaende Vinkels Halveringslinie.

Arithmetik

1. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + 3xy = 4a^2 \text{ og } (\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (2a - x) = 3 \cdot (x + y) \cdot \sqrt{x}\,.$$

2. Find Værdien af en Determinant af ulige Orden, hvor alle Elementer i Diagonalrækken ere Nul, og hvor hvilkesomhelst to Elementer, der staa symmetrisk med Hensyn til Diagonalrækken, ere lige store med modsatte Fortegn.

Afgangseksamen Juni 1889

Beregningsopgave

1. En Person betaler i 21 Aar ved Begyndelsen af hvert Aar en Sum x og opnaar derved, at han i de følgende 10 Aar, ved Slutningen af hvert Aar, kan hæve 1200 Kr. Renten er $3\frac{3}{4}$ pCt. p.a.
Find x.

2. Bevis, at man for en hvilken som helst Trekant har

$$\frac{b-2a\cos C}{a\sin C}+\frac{a-2c\cos B}{c\sin B}+\frac{c-2b\cos A}{b\sin A}=0.$$

Projektionstegning

Fire lige store Kugler ligge saaledes, at enhver af dem rører de tre andre, de tre hvile paa den vandrette Plan, medens de forøvrigt ikke indtage nogen særlig simpel Stilling i Forhold til Projektionsplanerne.

Tegn Projektionerne og bestem den øverste Kugles Røringspunkt med en af de Planer, som røre denne og to andre af Kuglerne.

Geometri

1. To Cirkler med Radierne R og r skære hinanden under Vinklen v (Tangenternes Vinkel i eet af Skæringspunkterne). Hvor stor er den krumme Overflade, som dette Stykke af Cirklernes fælles Tangent, der ligger mellem Røringspunkterne, beskriver, naar den hele Figur drejer sig en Gang rundt om Centerlinien?

2. Ved hvilken Ligning bestemmes Retningskoefficienterne for Normalerne til de to Tangenter, som kunne trækkes fra et givet Punkt til en Ellipse, og hvilket bliver dette Punkts geometriske Sted, naar de to Tangenter skulle være parallele med et Par konjugerede Diametre?

3. I en spidsvinklet Trekant deler en Højde Siden a i Stykkerne a_1 og a_2, Vinklen A i A_1 og A_2. Hvorledes konstrueres Trekanten, naar Højden, $a_1 - a_2$ og $A_1 - A_2$ ere givne.

Arithmetik

1. Først bevises følgende Sætninger, hvor p betegner et Primtal:
a) Største fælles Maal for $x^p - 1$ og $x^n - 1$ (n positiv, hel og $< p$) er $x - 1$;
b) Er α en af Rødderne (Roden 1 undtagen) i $x^p - 1 = 0$, da ere α, α^2, α^3, …, α^p alle Rødderne.
Derpaa søges Summen af alle Røddernes m'te Potenser (m positiv, hel).

2. I et Spil, hvor der trækkes Rødt eller Sort, holder en Spiller stadig paa Sort; hans første Indsats er 1, og han gjør sin Indsats 1 større, hver Gang han taber, 1 mindre, hver Gang han vinder. Rødt er hvert Øjeblik under hele Spillet kommet hyppigst, og naar Spilleren standser, er Rødt kommet m Gange, Sort n Gange (hvor $m > n$).
Bevis, at Spillerens Gevinst eller Tab er uafhængig af den Orden, i hvilken de to Farver ere udtrukne (dog med den ovenfor angivne Indskrænkning) og angiv Størrelsen af Gevinsten eller Tabet.

Afgangseksamen Januar 1890

Beregningsopgave

I et Trapez ere de ikke parallele Sider (a og b), den Linie (l), der forbinder disse Siders Midtpunkter, og den Linie (m), der forbinder Midtpunkterne af de parallelle Sider, givne saaledes:

$$a = 22{,}3607;\ b = 14{,}1421;\ l = 31{,}6228;\ m = 17{,}3205.$$

Beregn Længderne af de parallele Sider og Diagonalerne samt Trapezets Vinkler og Areal.

Projektionstegning

En Kugle, der ligger paa den vandrette Billedplan, foran den lodrette, omskrives med en Cylinderflade, hvis Frembringere ere parallele med den lodrette Billedplan og danne en Vinkel paa 36° med den vandrette Plan.
Bestem Cylinderfladens Røringslinie med Kuglen samt dens Skjæring med den vandrette Plan og med den med denne parallele Tangentplan til Kuglen.
Cylinderfladen skal ikke fortsættes ud over disse to Planer.

Geometri

1. En Omdrejningskegleflades Axe gaar gjennem en Kugles Centrum. Afstanden fra dette til Keglefladens Toppunkt er lig Kuglens Diameter, og Arealet af den Del af Kuglefladen, der ligger indenfor Keglefladen, er dobbelt saa stort som Arealet af den Del af Keglefladen, der ligger udenfor Kuglefladen.
Find Keglefladens Toppunktsvinkel.

2. Gjennem Koordinatsystemets Begyndelsespunkt O gaa to faste Linier, der skjæres af en tredie Linie i A og B, saaledes at Arealet af Trekanten AOB er konstant lig k.
Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af AB, og søg Stedets Skjæringspunkter med de to faste Linier.
Vis endvidere, at AB rører Kurven.

3. Tegn en Cirkel med en given Radius, som gaar gjennem et givet Punkt, og som af en given Linie afskjærer en Korde med given Længde.

Arithmetik

1. Find de reelle Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningen:

$$y\sqrt{2} - x\sqrt{-3} = \left(\frac{x}{2} + y\sqrt{-6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Bevis (lettest ved Induktion), at Kvadratet af Summen af de n første tal i Talrækken er lig Summen af Tallenes Kuber.

3. Bevis, at $x^7 - x$, hvor x er et vilkaarligt helt Tal, er delelig med 42.

Afgangseksamen Juni 1890

Beregningsopgave

I en konvex indskrivelig Firkant $ABCD$ forholde AB, BC og AC sig som $(\sqrt{3}-1) : 2 : \sqrt{6}$, og Arealet af Trekanten ACD er dobbelt saa stort som Arealet af Trekanten ABC.

Beregn Firkantens Vinkler.

Projektionstegning

En regelmæssig Femkant ligger i den vandrette Billedplan foran den lodrette; en af dens Sider er vinkelret paa Skjæringslinien mellem Billedplanerne. Tegn Billederne (Projektionerne) af det regelmæssige Flerplanslegeme (Polyeder), i hvilket den givne Femkant er en af Sidefladerne.

Geometri

1. To Breddecirkler, hvis sfæriske Afstand er $p°$, begrænse et Bælte, hvis Areal er $\frac{1}{n}$ af hele Jordkuglens Overflade.
Hvorledes findes Breddecirklernes sfæriske Afstande fra Ækvator?
Find endvidere Forholdet mellem Rumfanget af den Del af Jorden, der ligger udenfor Keglefladen gjennem de to Breddecirkler, og hele Jordkuglens Rumfang.
Expl. $p = 90°$, $n = \sqrt{2}$.

2. Find Arealet af den Firkant, der begrænses af Tangenterne til Skjæringspunkterne mellem de to Keglesnit, som i et retvinklet Koordinatsystem fremstilles ved Ligningerne

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ og } 2ay^2 = 3b^2x.$$

3. En Trekant ABC er given. Der skal konstrueres en anden Trekant $A_1 B_1 C_1$ med samme Areal som den givne, saaledes at $\angle A = \angle A_1$ og at $A_1 B_1 + A_1 C_1$ er lig med en given Linie.

Arithmetik

1. Idet

$$\begin{aligned} &p + q = a \\ &px + qy = b \\ &px^2 + qy^2 = c \\ &px^3 + qy^3 = d \end{aligned}$$

skal der findes en kvadratisk Ligning, i hvilken baade x og y ere Rødder, og hvis Koefficienter hverken indeholde p eller q.

2. Hvor mange Led er der i den Kvotientrække, hvis Sum er 3,964, naar det første Led i Rækken er 2½, det sidste 5,184 ?

Afgangseksamen Januar 1891

Beregningsopgave

I en Trekant med Siderne a, b, c ere disse delte henholdsvis i Stykkerne a_1 og a_2, b_1 og b_2, c_1 og c_2 (i den angivne Orden, naar man gaar rundt om Trekanten) og Delingspunkterne forbundne.

Beregn Vinklerne i den lille Trekant, naar

$$a = 17{,}1;\ b = 17{,}5;\ c = 17{,}9;\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{23}{27}\ .$$

Projektionstegning

Tegn Projektionerne af en Kugle med et indskrevet, regulært Tetraeder, der ikke indtager nogen særlig simpel Stilling i Forhold til Projektionsplanerne. Tillige tegnes Projektionerne af een af de sfæriske Trekanter, hvis Vinkelspidser ere tre af Tetraedrets Hjørnespidser. Kuglen tænkes gennemsigtig.

Geometri

1. Et regulært Tetraeder er indskrevet i en Kugle med Radius r. En anden Kugle har sit Centrum i Tetraedrets ene Hjørnespids og gaar gennem de tre andre.
Find Volumen og Overflade af det Legeme, der begrænses af de to Kugleflader.

2. Vis, at der i Almindelighed kan trækkes tre Normaler fra et Punkt (a,b) til en Parabel $(y^2 = px)$ og beregn Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Normalernes Endepunkter.

3. Konstruer en Trekant ABC, idet Højden og Vinklens Halveringslinie fra A (h_a og v_A) ere givne tilligemed Forskellen mellem de Stykker, i hvilke Højden deler Siden a.

Aritmetik

1. Hvilke positive Tal mindre end 10^4 give ved Division med 19, 29 og 43 henholdsvis Resterne 16, 1 og 11 ?

2. Idet α, β, γ betegne Rødderne i Ligningen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

og m er et givet Tal, beregnes Værdien af

$$(m - \alpha^2)(m - \beta^2)(m - \gamma^2)\ .$$

3. Paa hvor mange Maader kunne n forskellige Elementer deles i 2 Grupper ?
(En Gruppe skal have mindst 1 Element, og en Gruppes Elementer tænkes ikke ordnede).

Afgangseksamen Juni 1891

Beregningsopgave

En Trekants Sider have Længderne 47,2351; 19,8604; 35,9007.

Beregn Vinklerne og Siderne i den Trekant, der har sine Vinkelspidser i Centrerne til den givne Trekants udvendige Røringscirkler.

Projektionstegning

Tegn Projektionerne af en Terning, som har en Hjørnespids liggende i den vandrette Projektionsplan, medens den derfra udgaaende Diagonal hverken er lodret paa eller parallel med nogen af Projektionsplanerne. Tegn dernæst Sporene af en Plan, vinkelret paa Midten af denne Diagonal, Projektionerne af Planens Skæringslinie med Terningens Overflade og endelig Skæringslinien i sand Størrelse. Planen tænkes ikke gennemsigtig.

Geometri

1. I en Omdrejningskeglelade, hvis Toppunktsvinkel er 90°, er der paa samme Side af Toppunktet indskrevet to Kugler, der røre hinanden, og hvis Centerlinie er a.
Find Volumen af det Legeme, der begrænses af Keglefladen og de to Kugler.

2. Bestem Produktet af de Stykker, som Kurven

$$(x^2+y^2)^2 = m^2(x^2-y^2)$$

afskærer af en vilkaarlig ret Linie gennem Punktet (a,b), Stykkerne regnede fra Punktet.

3. En Cirkel og et Punkt A ere givne. Konstruer en Trekant ABC med en given Vinkel B og en given Side AC, saaledes at BC rører den givne Cirkel i B.

Aritmetik

1. Hvilken Ligning maa finde Sted mellem Koefficienterne i Ligningen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

naar den ene Rod skal være Mellemproportional mellem de to andre?
Idet denne Betingelse tænkes opfyldt, søges Rødderne udtrykte ved a og c.

2. $\frac{Y_{r-1}}{Z_{r-1}}$ og $\frac{Y_r}{Z_r}$ ere to paa hinanden følgende Konvergenter til en Kædebrøk med de ufuldstændige Kvotienter $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, a_r$.
Vis, at $\frac{Y_r}{Y_{r-1}}$ og $\frac{Z_r}{Z_{r-1}}$ kunne udvikles i Kædebrøker, der begge faa de ufuldstændige Kvotienter $a_r, a_{r-1}, a_{r-2}, \dots$ i den angivne Orden.

Hvorledes slutter Rækken af ufuldstændige Kvotienter i de to Tilfælde?

Afgangseksamen Juni 1892

Beregningsopgave

Arealet af et konveks Trapez er 581,267, en af de ikke parallele Sider 27,614, en af Diagonalerne 35,208, og dennes Vinkel med de parallele Sider 31°19´14´´.

Beregn Sider og Vinkler i Trapezet.

Projektionstegning

En Plan er given ved sine Spor, to Punkter i Planen ved deres Projektioner.

Tegn Projektionerne af et regelmæssigt Tetraeder, der har en Sideflade i Planen, en af denne Sideflades Vinkelspidser i det ene givne Punkt, og dens Centrum i det andet Punkt.

Ved Optrækningen tænkes den givne Plan at være gennemsigtig.
De givne Linier og Punkter maa ikke indtage særegne Stillinger mod Projektionsplanen.

Geometri

1. I en given Trekant skal der indskrives en anden, hvis Sider to og to danne lige store Vinkler med den Side i den givne, der indeholder deres Skæringspunkt.

2. En ret Vinkels Ben tangere en given Parabel.
Bevis, at den Linie, der forbinder Røringspunkterne, gaar gennem et fast Punkt, og find det geometriske Sted for Vinklens Toppunkt.

3. I en firsidet Pyramide *O-ABCD* ere a, b, c, d Midtpunkterne af OA, OB, o.s.v., m, n, p, q ere Midtpunkterne af AB, BC, CD og DA. En Prismatoide har Endefladerne *abcd* og *mnpq*, medens Sidefladerne bestemmes ved den brudte Linie *aqdp*…
Hvor stort er Prismatoidens Volumen i Forhold til Pyramidens?

Aritmetik

1. Hvilke Værdier kan y have, naar Rødderne i den kvadratiske Ligning

$$yx^2 + (2y + 3)x + 2y - 1 = 0$$

skulle være reelle?
Løses Ligningen med Hensyn til y, faar man en Brøk.
Hvilken er den største, og hvilken den mindste Værdi, som denne Brøk kan faa, naar x kan være et hvilket som helst positivt eller negativt Tal?
Hvor stor maa x være, naar y skal have den ene eller den anden af disse Værdier?
Endelig spørges der om, for hvilke Værdier af x den nævnte Brøk bliver Nul, positiv, negativ?

2. Find x af Ligningen

$$\text{tg } x + \text{tg } 2x + \text{tg } 3x = 0.$$

3. Hvilke fælles Faktorer kunne $x + y$ og $x - y$ have, naar x og y ere indbyrdes primiske, og for hvilke Værdier af de indbyrdes primiske Tal x og y bliver $x^2 - y^2$ et Kvadrat?

Afgangseksamen Januar 1893

Beregningsopgave

I et konveks, tresidet Hjørne er den ene Toplansvinkel 147°13´24´´, og de hosliggende Sider ere hver 53°26´49´´. Beregn de to andre Toplansvinkler og den tredje Side samt den Vinkel, som den givne Toplansvinkels Kant danner med den modstaaende Side.

Projektionstegning

Tegn Billederne af et Legeme, som begrænses af følgende tre Flader: En Cirkel, der rører den vandrette Billedplan, med hvilken den danner en Vinkel paa 45°; en Cylinderflade gennem Cirklen med Frembringerne vinkelrette paa dennes Plan; den vandrette Billedplan. Cirklens Plan maa ikke være vinkelret paa den lodrette Billedplan.

Geometri

1. Konstruer en Trekant af de to Stykker, hvori den ene Vinkels Halveringslinie deler den modstaaende Side, samt en af de Vinkler, der ligge ved denne Side.

2. Find en Trekants Sider og Vinkler udtrykte ved en Side (a) og Radierne (r_b og r_c) i de to Røringscirkler, som begge røre den givne Sides Forlængelser.

3. Find Ligningerne for de to Cirkler, som begge gaa gennem Begyndelsespunktet og Punktet (0, a), medens den ene tillige gaar gennem Punktet (b, 0), den anden gennem (c, 0).
Find dernæst Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af en vilkaarlig Linie MN gennem Begyndelsespunktet, naar M og N ere dens andre Skæringspunkter med Cirklerne.

Aritmetik

1. Hvilken Ligning vil have a, b og c til Rødder, naar

$$\begin{aligned} p + aq + a^2 r + a^3 &= 0 \\ p + bq + b^2 r + b^3 &= 0 \;. \\ p + cq + c^2 r + c^3 &= 0 \end{aligned}$$

Find ved Hjælp af denne Ligning p, q og r udtrykte ved a, b og c.

2. Ligningerne

$$\begin{aligned} 8x^2 + 10xy + 3y^2 - 8x - 5y + 8 &= 0 \\ 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 9x - 6y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

skulle løses med Hensyn til x og y.

Afgangseksamen Juni 1893

Beregningsopgave

Sidefladerne i en femsidet Pyramide med regulær Grundflade ere ligesidede Trekanter. Beregn Vinklen mellem en Sidekant og Grundfladen, Toplansvinklen mellem en Sideflade og Grundfladen, Toplansvinklen mellem to Nabosideflader og Forholdet mellem Pyramidens om - og indskrevne Kuglers Rumfang.

Projektionstegning

Grundfladen i en Pyramide *t-abcdef* er en regelmæssig Sekskant, hvis Side er omtrent 1½ Tomme lang; Kanten *ta* er dobbelt saa lang som Grundfladens Side, og Vinklerne *tab* og *taf* ere hver 72°.
Tegn Billederne af denne Pyramide, idet den staar paa den vandrette Billedplan, og *cd* ligger i Grundlinien (Projektionsaksen).
Tegn dernæst Billederne af det retstaaende tresidede Prisme, hvis Grundflade er Trekanten *bdf*, og hvis Højde er halv saa stor som Pyramidens.
Tegn endelig Billederne af de to Legemers Skæringslinie.

Geometri

1. Konstruer en Trekant af en Side, Differencen mellem de to Vinkler, der ligge ved denne Side, og den omskrevne Cirkels Radius.

2. I en spidsvinklet Trekant fældes Højderne, og deres Fodpunkter forbindes med rette Linier. Find den derved dannede Trekants Vinkler, Sider, samt omskrevne og indskrevne Cirkels Radius udtrykte ved den første Trekants Vinkler og omskrevne Cirkels Radius.

3. Til et Punkt (a, b) af Parablen $y^2 = px$ trækkes Tangenten. Find Koordinaterne til denne Tangents Pol med Hensyn til Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$, og find dernæst det geometriske Sted for denne Pol, naar Punktet (a, b) gennemløber Parablen.

Aritmetik

1. Ved en Indsamling, som foretoges i et Selskab, der bestod af baade Mænd, Kvinder og Børn, men af flere Mænd end Kvinder, indkom der i alt 20 Kr. 50 Øre, idet hver Mand gav 2 Kr. 25 Øre, hver Kvinde 3 Kr. 50 Øre, og hvert Barn 75 Øre.
Hvor mange Mænd var der, hvor mange Kvinder, og hvor mange Børn?

2. En Gæld afbetales i tre Aar ved aarlige Afdrag, af hvilke det første, der betaltes et Aar efter Gældens Stiftelse, kun udgjorde eet Aars Rente af Gælden, det andet var tre Gange saa stort som det første, og det sidste dobbelt saa stort som det andet.
Hvor stor var den aarlige Rentefod?

Afgangseksamen Juni 1894

Beregningsopgave

I en konveks, indskrivelig Firkant $ABCD$ ere

$$AC = 30{,}408;\ BD = 27{,}614;\ \angle A = 123°17'45''\ ;\ \angle AOD = 64°35'19'',$$

idet O er Diagonalernes Skæringspunkt.

Beregn Firkantens øvrige Vinkler, den omskrevne Cirkels Radius og Siderne.

Projektionstegning

Først tegnes Billederne af en ret Linie, hvis Spors vandrette Billeder begge ere givne, og hvis Vinkel med den vandrette Billedplan er 45°.
Dernæst tegnes Skæringslinierne mellem Billedplanerne og en Omdrejningscylinderflade, som har den rette Linie til Akse, og hvis Radius har en given Længde.

Geometri

1. Konstruer et Trapez, der skal have samme Areal som et givet Kvadrat, af de to Sider, som ikke ere parallele, og den Linie, der forbinder de parallele Siders Midtpunkter.
Hvor mange Løsninger kan Opgaven faa?

2. Fire lige store Kugler røre hverandre saaledes, at enhver af dem rører de tre andre; de ere omskrevne med en Kegleflade, som rører en af dem langs en Cirkel og de tre andre i hver sit Punkt.
Find denne KeglefIades Toppunktsvinkel.

3. Find Ligningen for en Cirkel, som gaar gennem Koordinaternes Begyndelsespunkt (retvinklet System) og rører de to Linier

$$3x + 2y = 0 \text{ og } 3x - 2y = 1.$$

Aritmetik

1. Ligningen

$$x^5 - 7x^4 + 13\,x^3 - 17\,x^2 - 18x + 20 = 0$$

er tilfredsstillet af $x = 1 - 2\sqrt{-1}$. Find de andre Rødder.

2. Find den største Værdi, som $y = 2 + x\sqrt{6} - 3x^2$ kan faa for reelle Værdier af x.

3. Bevis, at

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

og opløs derpaa den første Determinant i fire Faktorer af første Grad.

Afgangseksamen Juni 1895

Beregningsopgave

Grundfladen i en Pyramide er et Trapez, der er omskrevet om en Cirkel, og hvori de to Sider, som ikke ere parallele, ere lige store. En af disse Sider er $a = 2{,}3456$, en af de parallele Sider er $b = 4{,}3312$, og Pyramidens Højde, hvis Fodpunkt ligger i Centret til den i Trapezet indskrevne Cirkel, er $\frac{b}{2}$.

Beregn Pyramidens Rumfang og Overflade, Sidekanternes Vinkler med Grundfladen, samt Toplansvinklerne mellem denne og Sidefladerne.

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan danner Linien AB, der er mere end 2 Tommer lang, en Vinkel paa 60° med Grundlinien (Projektionsaksen); den er Kant i et regelmæssigt Oktaeder, som ligger saaledes, at de to Sideflader, der støde sammen i AB, danne lige store Toplansvinkler med den vandrette Billedplan. Tegn Oktaedrets vandrette og lodrette Billeder.
Oktaedrets Diagonaler ere AA_1, BB_1 og CC_1 . Tegn Billederne af Skæringslinierne mellem Oktaedrets Overflade og de to Planer, af hvilke den ene er bestemt ved Midtpunkterne af AB, AC_1 og BC, den anden ved Midtpunkterne af A_1B_1, A_1C_1 og B_1C.
Ved Optrækningen betragtes begge de nævnte Planer som gennemsigtige, men Oktaedrets Overflade som ugennemsigtig.

Geometri

1. I en Trekant ABC ere Vinkel A og Forholdet n mellem Siderne AB og AC givne.
Find den Vinkel, som Siden BC danner med sin Median.
Ekspl. $A = 35°15´53´´$, $n = 1{,}73205$.

3. O er Toppunktet i Parablen $y^2 = px$, L et vilkaarligt Punkt af Ledelinien, og M et Punkt af Parablen, idet LM er parallel med dennes Akse.
Find det geometriske Sted for Centret i Trekant OLM 's omskrevne Cirkel, og vis, at det er en Parabel.

3. Konstruer en Trekant, naar to af dens Vinkler og Differensen mellem deres modstaaende Sider ere givne.

Aritmetik

1. Find x, y og z af Ligningerne

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + 2b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3. \end{aligned}$$

2. Bevis, at 4 gaar op i $a^3 + (a + 2)^3$, naar a er et helt positivt Tal, og at den Kvotient, som faas ved Division med 4, ikke kan være noget Primtal, medmindre a er 1.

Afgangseksamen Juni 1896

Beregningsopgave

1. En Gæld afbetales paa den Maade, at der ved Slutningen af hvert af de første 12 Aar efter Gældens Stiftelse betales 5½ pro Cent af den oprindelige Gæld, og ved Slutningen af hvert af de næste 8 Aar en vis Sum.
Hvor mange pro Cent af den oprindelige Gæld maa denne Sum udgøre?
De 12 første Aar er Renten 4 pro Cent pro anno, men derefter bliver den nedsat til 3½ p. C. p. a.

2. I en Trekant er den ene Side 0,53207 og de to hosliggende Vinkler henholdsvis 41°17´´ og 69°28´37´´.
Beregn Radierne i Trekantens ind- og omskrevne Cirkler.

Projektionstegning

Hjørnespidserne i et regulært Tetraeder ere A, B, C og D. A ligger i den vandrette Billedplan, Kanten BC er parallel med denne, men hverken parallel med eller vinkelret paa den lodrette, og Toplansvinklen mellem Sidefladen ABC og den vandrette Billedplan er 45°. Tegn
1) Tetraedrets Billeder;
2) Billederne af den indskrevne Kugles Berøringspunkter med Sidefladerne;
3) det vandrette Billede af den Cirkel, der er bestemt ved de tre Røringspunkter med Sidefladerne DAB, DBC og DCA.

Geometri

1. I ΔABC er $\angle B$ stump. Paa Linien AB skal findes to Punkter X og Y saaledes beliggende, at $XA = AY$ og $\angle XCB = \angle BCY$.

2. MN er en Korde i Parablen $y^2 = px$ gennem et givet Punkt A af dens Akse. MP er vinkelret paa Parablens Tangent i N, NP vinkelret paa Tangenten i M.
Find Stedet for Punktet P, naar MN drejer sig om A.

3. Højden fra A i Tetraedret A-BCD er h, de tre fra B udgaaende Kanter forholde sig som tre givne Tal p, q og r, Toplansvinklen mellem ABC og DBC er α, $\angle ABC = \beta$ og $\angle DBC = \gamma$. Find Tetraedrets Volumen.

Aritmetik

1. Bevis, at Summen af to uforkortelige Brøker med forskellige Nævnere ikke kan være lig med et helt Tal.

2. Find den mindste og den største Værdi, som Brøken

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

kan faa for reelle Værdier af x.

3. I Polynomiet $ax^5 - bx^4 - cx^3 + 1$ skal der i Stedet for a, b og c indsættes saadanne positive hele Tal, at $(x-1)^2$ gaar op i det.

Afgangseksamen Juni 1897

Beregningsopgave

1. I en Trekant ABC er $\angle A = 123°45'18''$, Højden fra A er 56,789 og Vinkel A's Halveringslinie er 72,453.
Beregn Trekantens Sider og Vinkler.

2. Et Polyeder er begrænset af to parallele Rektangler og fire Trapezer. Det ene Rektangels Sider ere a og b, det andet A og B ($a \neq A$, $b \neq B$).
Beregn Polyedrets Rumfang, naar $a = 1{,}3507$, $b = 0{,}94618$, $A = 2{,}8045$, $B = 1{,}52602$, og Afstanden mellem de to Rektanglers Planer er 4,73251.

Projektionstegning

I en Omdrejningskegle er indskrevet en Tærning saaledes, at fire af dens Hjørnespidser ligge i Keglefladen, de fire andre i Grundfladen; Keglens Højde er dobbelt saa stor som Tærningens Kant. Denne Kegle ligger paa den vandrette Billedplan, som den rører langs en af de fire Sidelinier gennem Tærningens Hjørnespidser, og denne Sidelinie er vinkelret paa Grundlinien (Projektionsaksen). Tegn disse Legemers vandrette og lodrette Billeder, idet Tærningens Kant har en given Længde. Ved Optrækningen betragtes hele Keglens Overflade som gennemsigtig, Tærningens som ugennemsigtig.

Geometri

1. Find den Synsvinkel, hvorunder en Kugle ses fra et Punkt, naar Forholdet mellem den synlige og usynlige Del af Kuglens Overflade er m.
Hvor stort er dette Forhold, naar Synsvinklen er ret?

2. $ABCD$ er et givet Parallelogram. Tegn et andet Parallelogram $A_1B_1C_1D_1$ saaledes, at A_1 ligger paa AB, B_1 paa BC, C_1 paa CD og D_1 paa DA, idet Siden A_1B_1 gaar gennem et givet Punkt P, og Diagonalen B_1D_1 har en given Længde.

3. Cirklen $x^2 + y^2 + ax = b^2$ skæres af Ordinataksen i Punkterne A og A_1 og af en vilkaarlig ret Linie gennem Begyndelsespunktet O i B og B_1.
Find det geometriske Sted for det Skæringspunkt mellem Trekanterne OAB og OA_1B_1's omskrevne Cirkler, der ikke ligger i O.

Aritmetik

1. Løs Ligningerne

$$\begin{aligned}
&(a-b)x + ay + bz = -\ 3a \\
&3ax + by + (a+b)z = a - b \\
&(2a+b)x - ay + (a-b)z = 4a
\end{aligned}$$

med Hensyn til x, y og z.
Find Betingelserne for, at Opgaven faar enten een Løsning eller ingen eller uendelig mange Løsninger.
Naar $b = 0$, men $a \neq 0$, findes de hele Værdier af x, hvortil der svarer hele positive Værdier af y og z.

2. Den rette Linie AB deles i n lige store Dele, og over hver Del som Diameter tegnes en Cirkel. Naar disse Cirkler ere de eneste Veje, der fører fra A til B, ad hvor mange forskellige Veje kan man da gaa fra A til B uden at gaa nogen Omvej?

Afgangseksamen Januar 1898

Beregningsopgave

En Kugle deles i to Dele af en Omdrejningskeglefladе, hvis Akse gaar gennem Kuglens Centrum. Beregn disse to Deles Volumen samt Arealerne af deres Overflader, naar Keglefladens Toppunktsvinkel er 42°2´34´´, den Del af Keglefladens Frembringer, som ligger i Kuglen, er 3,27506´´, og den Vinkel, hvorunder dette Liniestykke ses fra Kuglens Centrum, er 61°17´52´´.

Projektionstegning

I et Tetraeder O-ABC er $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 60°$. $\angle COA = 90°$. Kanterne OA, OB og OC forholde sig som 7 : 6 : 5 og Højden fra O har en given Længde (ikke mindre end 2 Tommer). Tegn Billederne af dette Tetraeder, naar ΔABC ligger i den vandrette Billedplan og ingen af dens Sider er parallel med eller vinkelret paa Projektionsaksen. Tegn endvidere Sporene af den Plan, der er bestemt ved Midtpunkterne af AB, OA og OC.

Geometri

1. Tangenten til et Punkt af en Parabel skærer Tangenten til Toppunktet i S; Normalen til samme Punkt skærer Parablens Akse i N. Naar S og N ere givne Punkter, skal Parablens Toppunkt O findes, idet $ON = 2\ OS$; tillige findes Brændpunkt og Ledelinie.

2. Af en Trekant er givet den ene Side a, Højden h paa en af de andre Sider og Radius R til den omskrevne Cirkel.
Find Trekantens to andre Sider og Vinklerne udtrykte ved a, h og R samt Betingelserne for Opgavens Mulighed.
Eks. $a = 2{,}7$; $h = 2{,}1$; $R = 1{,}5$.

3. Gennem et vilkaarligt Punkt af en Ellipse trækkes to Korder parallele med to konjugerede Diametre; naar Kordernes Længder betegnes ved $2c_1$ og $2c_2$, Diametrenes ved $2d_1$ og $2d_2$ $(2c_1 \neq 2d_1)$, skal det bevises, at

$$\frac{c_1^{\ 2}}{d_1^{\ 2}} + \frac{c_2^{\ 2}}{d_2^{\ 2}} = 1 \ .$$

Aritmetik

1. Produktet af de x første Led af en Kvotientrække er y, og Produktet af de y første Led er x.
Find Produktet af de $(x + y)$ første Led.

2. Paa hvor mange forskellige Maader kunne Tallene

$$1, 2, 3, \ldots, 2n$$

deles i to Grupper med n Tal i hver Gruppe, saaledes at Summen af ethvert af Tallene i den ene Gruppe og eet af Tallene i den anden er lig et bestemt Tal k ?

Hvis i to saadanne sammenhørende Grupper Summen af Tallene er henholdsvis a og b, Summen af Tallenes Kvadrater henholdsvis A og B, hvad er da $(A - B) : (a - b)$?

Afgangseksamen Juni 1898

Beregningsopgave

Længderne af Kanterne i et Tetraeder *O-ABC* ere givne saaledes: $OA = BC = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $OB = AC = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $OC = AB = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Paa Kanterne *OA*, *OB*, *OC* ligge henholdsvis Punkterne A_1, B_1, C_1 saaledes, at $OA_1 = \sqrt{2}$; $OB_1 = \sqrt{3}$ og $OC_1 = \sqrt{5}$. Beregn Arealet af Trekant $A_1B_1C_1$.

Projektionstegning

To Punkter *C* og *T* ere givne ved deres Billeder. Linien *CT* er parallel med den lodrette Billedplan og danner en Vinkel paa 45° med den vandrette. *C* er Centrum for en Kugle med given Radius; den omskrives med en Keglеflade, der har sit Toppunkt i *T*. Tegn Billederne af denne Kegleflades Røringscirkel med Kuglen samt Keglefladens Spor i den vandrette Billedplan.
Ved Optrækningen betragtes Keglefladen som ugennemsigtig.

Geometri

1. Find den Vinkel, hvorunder 2 Cirkler skære hinanden, naar Centerlinien er *m* Gange saa lang som den ene Cirkels Radius, og Vinklen mellem denne Cirkels Radius til det ene Skæringspunkt og Centerlinien er *v*.
Find dernæst Forholdet mellem Centerlinien og den anden Cirkels Radius.

2. En Ellipse har sit ene Brændpunkt i et givet Punkt *F* og rører en given Linie i et givet Punkt *M*. Konstruer det andet Brændpunkt, naar Ellipsens Centrum har en given Afstand fra Tangenten.

3. Find Ligningen for den Cirkel, som er bestemt ved Punktet (–1, 2) og ved Skæringspunkterne mellem Linien $y = 3x + 2$ og Cirklen $x^2 + y^2 - 3x + y = 2$.

Aritmetik

1. Ti hele Tal, af hvilke det tredje er negativt, det fjerde positivt, danne en Differensrække, hvis Sum er 65.
Find Tallene.

3. Bevis, at en Determinant af *n*'te Orden, i hvilken ethvert Element i det principale Led (Diagonalrækken) er *a*, medens ethvert af de øvrige Elementer er *b*, er lig med

$$(a + (n-1)\cdot b)\cdot (a-b)^{n-1} \quad .$$

Afgangseksamen Januar 1899

Beregningsopgave

En Cirkel, hvis Radius er 2,3456, har sit Centrum paa Siden AB i en Trekant ABC, gaar gennem Vinkelspidsen A, skærer Siden AC i D og rører Siden CB. Buen AD er 67°5´28'', og Vinklen ACB er 100°43´52´´.
Beregn Trekantens Sider og Areal.

Projektionstegning

En Omdrejningskeglestub staar paa den vandrette Billedplan; Radius r i den nederste Endeflade er omtrent 2 Tommer lang, Højden er lig med r, og Sideliniens Vinkel med den vandrette Billedplan er 60°. Paa Keglestubben ligger et linseformet Legeme, begrænset af to kongruente Kuglekalotter med Radier lig med $r\sqrt{3}$; den øverste Kalots Centrum ligger i Keglestubbens nederste Endeflades Centrum.
Tegn disse Legemers Billeder.
En Tangentplan til Keglestubben er vinkelret paa den lodrette Billedplan.
Tegn Billederne af denne Tangentplans Skæringslinie med Linsens Overflade.

Geometri

1. OAB er et givet Cirkeludsnit. I Buen AB skal der findes et saadant Punkt P, at Radierne OA og OB og Linier gennem P parallele med disse Radier danne et Parallelogram, hvis Perimeter har en given Længde.

2. Gennem det ene Endepunkt A af en Diameter AB i en Cirkel trækkes en ret Linie, der skærer Cirklen i C og Cirklens Tangent til B i D, og Figuren drejes en Omdrejning om AB.
Bestem Vinkel BAC saaledes at Arealet af den Cirkel, som BD beskriver, er lig med Arealet af den Flade, som Buen AC beskriver.

3. Bevis, at de to Akser i en Ellipse ses under Vinkler, der ere Supplementvinkler, fra et hvilket som helst af Skæringspunkterne mellem Ellipsen og Diagonalerne i det Rektangel, hvis Sider tangere Ellipsen i dens Toppunkter.

Aritmetik

1. Bevis, at dersom venstre Side af Ligningen $x^2 + ax + b = 0$ bliver positiv for $x = p$ og negativ for $x = q$ (a, b, p og q ere reelle), saa ere Ligningens Rødder reelle, og den ene ligger mellem p og q.

2. Bevis at 2^n+1 ikke kan være et Kvadrattal for andre Værdier af n end 3 og ikke kan være et Kubiktal (n positiv, hel).

Afgangseksamen Juni 1899

Beregningsopgave

1. I Trekant ABC er Siden $BC = 0{,}43267''$, $\angle B = 57°16'23''$ og $\angle C = 41°25'52''$. Beregn Højden paa BC og de to Stykker, hvori denne Side deler den Diameter i Trekantens omskrevne Cirkel, der gaar gennem A.

2. Man skal uden at bruge Logaritmer beregne $\sqrt[3]{2{,}486^3 - 2{,}513^3}$ med to rigtige Decimaler.

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan ligger en regelmæssig Femkant $ABCDE$, af hvis Sider ingen er parallel med eller vinkelret paa Projektionsaksen; den er Grundflade i en Pyramide, hvis Toppunkt O ligger lodret over Femkantens Centrum og har en Afstand fra dette, der er dobbelt saa stor som Femkantens Side. Tegn Billederne af denne Pyramide og af et plant Snit gennem AB og Punktet D_1 i OD, idet $OD_1 = \frac{1}{3}OD$.
Den femsidede Pyramide, som det nævnte Snit afskærer af den første Pyramide, drejes dernæst om AB, indtil Trekanten AOB falder i den vandrette Billedplan, og endelig udfoldes dens Overflade i denne Plan saaledes, at Udfoldningen bliver symmetrisk med Hensyn til Trekant AOB's Symmetriakse.

Geometri

1. En Plan skærer en Omdrejningskegleflade i en Parabel, hvis Parameter er lig med dens Toppunkts Afstand fra Keglefladens Toppunkt.
Find Keglefladens Toppunktsvinkel.

2. A og B ere to givne Punkter med Koordinaterne $(a,0)$ og $(-a,0)$, C er er et vilkaarligt Punkt af AB, AC og BC ere Diametre i to Cirkler.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem disse Cirklers Fællestangent i C og en af de andre Fællestangenter.

3. En Cirkel med Centrum O og et Punkt P uden for Cirklen ere givne. Tegn en saadan Sekant PAB, at Vinkel AOB er lig med Vinkel OPA.

Aritmetik

1. Bevis, at 23 gaar op i $5^{2n+1} + 9 \cdot 2^{n+1}$, naar n er et helt positivt Tal.

2. I Rækken

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$$

er Differensen mellem ethvert Led med lige Indeks og det nærmest foregaaende Led lig med d, og Differensen mellem ethvert Led med ulige Indeks (fra det tredje) og det nærmest foregaaende Led lig med δ.

Find a_p udtrykt ved a_1, d, δ og p samt find Summen af de p første Led.

3. Bevis, at $x + \dfrac{1}{x}$ er reel, naar x er en hvilken som helst af Rødderne i Ligningen $x^n = 1$, hvor n er et helt Tal.

Afgangseksamen Juni 1900

Beregningsopgave

I en Cirkel med Centrum C er AB en Korde, og D et Punkt i denne Kordes Forlængelse. AB er 15,8114´´, CD er 19,3649´´, og D's Potens med Hensyn til Cirklen er lig med Arealet af det Kvadrat, hvis Side er 5,7735´´.

Beregn Arealet af hele Overfladen af det Legeme, der beskrives af Cirkelafsnittet AB, naar det drejes om CD, samt dette Legemes Rumfang.

Projektionstegning

I et tresidet Hjørne med Kanterne OA, OB og OC er $\angle AOB = 60°$, og $\angle AOC = 45°$; OA ligger i Grundlinien (Projektionsaksen), OB i den forreste Del af den vandrette, og OC i den øverste Del af den lodrette Billedplan.
Tegn Billederne af en Kugle, der er indskreven i dette Hjørne, og hvis Radius har en given Længde, samt af dens Røringspunkt (a) med Siden BOC.
Tegn dernæst Billederne af den rette Linie, der gaar gennem Kuglens Centrum (c) og O, og af denne Linies Skæringspunkter (p og q) med Kuglefladen; og tegn endelig Sporene af Tangentplanen til det øverste af disse Punkter.
Ved Optrækningen betragtes baade denne Tangentplan og Hjørnets Side BOC som gennemsigtige, men Kuglen som uigennemsigtig.
Tegningen faar en passende Størrelse, naar Kuglens Radius er omtrent 1 Tomme.

Geometri

1. En Trekant ABC og et Punkt D i Siden BC ere givne.
Konstruer en ret Linie, som er parallel med Linien AD, og som skærer Siderne AB og BC henholdsvis i X og Y, saaledes at $AX + CY = XY$.

2. Bevis, at Forholdet mellem en Omdrejningskegles og den indskrevne Kugles Rumfang er lig med Forholdet mellem Arealet af Keglens hele Overflade og Arealet af Kuglefladen. Hvor stor er Keglens Toppunktsvinkel, naar dette Forhold er lig med n? Hvilke Værdier kan n have? Ekspl. $n = 3$.

3. M er et vilkaarligt Punkt paa en Ellipse, N er Skæringspunktet mellem Normalen til M og den store Akse, og P er et Punkt, der deler den store Akse i to Stykker, som ere lige store med Brændstraalerne til M.
Bevis, at MN er halv saa stor som den Korde i Ellipsen, der gaar gennem P og er vinkelret paa den store Akse.

Aritmetik

1. Idet n betegnet et helt, positivt Tal, skal $\sqrt{n^2 + 2n}$ udvikles i en uendelig, periodisk Kædebrøk.
Anvendes til at beregne $\sqrt{15}$ med 6 rigtige Decimaler.

2. Find et fircifret Kvadrattal, i hvilket de to første Cifre ere lige store, og de to sidste Cifre ogsaa ere lige store.

3. Af Ligningerne $x + \dfrac{1}{x} = a$, $y + \dfrac{1}{y} = b$ og $x^2 + y^2 = cxy$ skulle x og y elimineres, saa at der dannes en Ligning, der er rational med Hensyn til a, b og c.

Afgangseksamen September 1900

Beregningsopgave

I en Firkant *ABCD* kender man alle fire Vinkler samt Siden *AB* og Diagonalen AC. Find de øvrige Sider samt Diagonalen BD, idet AB = 3,1623; AC = 6; $\angle$ B = 77°28´13´´; $\angle$ C = 81°9´29´´ ; $\angle$ D = 49°16´5´´.

Projektionstegning

Givet en Omdrejningskegle med lodret Akse og en mod begge Billedplanerne skraat stillet Plan; tegn lodret og vandret Billede af Skæringskurven. Drej dernæst den øverste afskaarne Del af Keglen en Vinkel paa 180° om en Akse, der gaar gennem Snitkurvens Centrum og er vinkelret paa dennes Plan.
Tegn den øverste Del af Keglen i dens nye Stilling.
Omridslinierne forlanges ikke konstruerede med Passer og Lineal. - Den nævnte øverste Del af Keglen tegnes punkteret i sin oprindelige, men fuldt optrukken i sin nye Stilling.

Geometri

1. Beregn Vinklerne og de ubekendte Sider i en Trekant *ABC*, hvori man kender $a = 37'$; $b - c = 27'$, og den indskrevne Cirkels Radius $r = \frac{16'}{3}$.

2. Læg en Vinkel af en given Størrelse v med sit Toppunkt i et givet Punkt *A* saaledes, at der mellem Vinklens Ben afskæres et Stykke af en given Længde paa en given ret Linie (der ikke gaar gennem *A*).
Særlig behandles det Tilfælde, hvor $v = 90°$.

3. Find Ligningerne for de Tangenter, der udgaa fra Punktet (14,1) til Kurven

$$x^2 + 4y^2 = 100.$$

Aritmetik

1. Opløs $2^{13} - 2$ i Primfaktorer.
   Opløs $n^{13} - n$ i Faktorer.
   Vis, at $n^{13} - n$ er delelig med $2^{13} - 2$, naar n ikke er delelig med 3.

2. Beregn Værdien af den følgende Determinant, der har n Søjler og n Rækker :

$$\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & n+1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & n+1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & n+1 \end{vmatrix}$$

Afgangseksamen Januar 1901

Beregningsopgave

I en konveks Firkant $ABCD$ er givet $AB = 241'$; $BC = 409'$; $CD = 424{,}26'$;
$\angle ABC = 133° \, 4' \, 32''$, $\angle BCD = 62° \, 3' \, 42''$.
Find den ubekendte Side, Diagonalerne og Vinklerne i Firkanten.

Projektionstegning

En regelmæssig femsidet Pyramides Grundflade danner en Vinkel paa 75° med enhver af Sidefladerne. Tegn Billederne af Pyramiden, idet Grundfladen ligger i den vandrette Billedplan. Konstruer dernæst Billederne af den indskrevne og af den omskrevne Kugles Centrer.
Ingen af Femkantens Sider maa være vinkelret paa eller parallel med Grundlinien. - Femkantsiden bør ikke være mindre end 1 Tomme.

Geometri

1. En Omdrejningscylinderflade har samme Akse som en Omdrejningskegle og halverer dens Rumfang.
Find Forholdet mellem Radius i Cylinderfladens Normalsnit og Radius i Keglens Grundflade.

2. Konstruer en ligebenet Trekant ABC ($AC = BC$) af Højden paa et af Benene og Linien AD, idet D er et Punkt paa BC, og $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$.

3. En Cirkel med Centrum C er bestemt ved Ligningen $x^2 + y^2 = 2ax + 3a^2$.
M er et vilkaarligt Punkt paa denne Cirkel, og P dets Projektion paa den Diameter, der er parallel med Y - Aksen.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem CM og den Linie, der er bestemt ved P og Punktet $(-a, 0)$.

Aritmetik

1. Find x af Ligningen $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \sqrt{b}$

2. I den uendelige Kædebrøk

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

betegnes Tælleren i den $(r + 1)$'te Konvergent ved Y_r, og Nævneren ved Z_r .
Bevis (ved Induktion) $Y_r = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^r - (1-\sqrt{2})^r)$ og $Z_r = Y_{r+1}$.

3. Bevis, at et Tal, som gaar op baade i $(a + b)$ og i ab, ogsaa gaar op i $a^n + b^n$, idet a, b og n er hele positive Tal.

Afgangseksamen Juni 1901

Beregningsopgave

I et Tetraeder er det ene Hjørnes Kanter $OA = 67{,}203'$; $OB = 51{,}197'$; $OC = 75{,}826'$ og Siderne $BOC = 100°16'25''$; $COA = 72°49'18''$; $AOB = 68°31'36''$.
Beregn de tre andre Hjørners Sider og ubekendte Kanter.

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan er der givet en Cirkel, hvis Radius er omtrent 1½ Tomme; den er det vandrette Spor af en Omdrejningskegleflade, hvis Toppunktsvinkel er 120°. Endvidere er der givet en Plan, hvis vandrette Spor er vinkelret paa Grundlinien (Projektionsaksen) og afskærer en Bue paa 60° af den givne Cirkel, og hvis lodrette Spor danner en ligebenet Trekant med Grundlinien og det lodrette Billede af Keglefladens Akse.
Tegn det vandrette Billede af Skæringslinien mellem Planen og Keglefladen, saaledes at baade Asymptoterne og Brændpunkterne bestemmes; af selve Skæringsliniens Billede tegnes kun den Del, der ligger inden for den givne Cirkel.
Tegn endvidere denne Skæringslinie med Asymptoter og Brændpunkter, efter at Planen er drejet 135° om sit vandrette Spor ned i den vandrette Billedplan.
Ved Optrækningen betragtes baade Planen og Keglefladen som ugennemsigtige.

Geometri

1. Længderne af en Trekants Sider danner en Differensrække, i hvilken Differensen er lig med Længden af den indskrevne Cirkels Radius. Find Trekantens Vinkler.

2. Konstruer en Trekant ABC af Højden fra A, $\angle A$'s Halveringslinie og Forholdet mellem Siderne AB og AC.

3. To lige store Cirkler gaar begge gennem Koordinaternes Begyndelsespunkt, den ene desuden gennem Punktet $(a,0)$, den anden gennem $(b,0)$. Find det geometriske Sted for det Skæringspunkt mellem Cirklerne, der ikke ligger i Begyndelsespunktet.

Aritmetik

1. I Rækken $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ er a_4 den fjerde Proportional til a_1, a_2 og a_3 ; a_5 den fjerde Proportional til a_2, a_3 og a_4 osv.
Find a_n og Summen af de n første Led i Rækken, begge udtrykte ved n, a_1, a_2 og $k = \dfrac{a_3}{a_1}$, baade naar n er lige, og naar n er ulige.

2. En Maalestok, hvis Længde er l, er delt i p lige store Dele ved sorte Streger, der er mærkede med 1, 2, 3,…, $p-1$, og desuden delt i q lige store Dele ved røde Streger, der er mærkede med 1, 2, 3, …, $q-1$, saaledes at de to Delestreger, der begge er mærkede med 1, er nærmest ved samme Ende af Maalestokken.
Find de sorte Streger, som falder sammen med de røde Streger, naar det største fælles Maal for p og q er m.
Bevis, at ingen sort Streg kan falde sammen med en rød, hvis p og q er indbyrdes primiske. Find under denne Forudsætning den korteste Afstand mellem en sort og en rød Streg, og angiv, hvorledes man kan finde de Streger, der har denne Afstand.
Ekspl. a) $p = 24$, $q = 20$. b) $p = 22$, $q = 15$.

Afgangseksamen Januar 1902

Beregningsopgave

I en Omdrejningskegle er Højden 11,2´ og den halve Toppunktsvinkel 20° 30´.
Find Volumen af de Dele, hvori Keglen deles af den indskrevne Kugles Overflade.

Projektionstegning

Et regulært Tetraeder staar paa den vandrette Billedplan, og en Kugle berører denne Plan samt de Kanter i Tetraedret, der ikke ere vandrette. Tegn Billederne af Tetraedret, af Kuglen og af dennes Skæringslinie med en af Tetraedrets skraatliggende Sideplaner. Tetraedret antages at være ugennemsigtigt.

Geometri

1. I en Trekant ABC er Siden AB lig med Summen af Radierne i de to udvendige Røringscirkler, der røre henholdsvis Siderne AC og BC, og BC er Mellemproportionalen mellem AB og AC.
Find Trekantens Vinkler.

2. Konstruer et Trapez, der baade kan indskrives i og omskrives om en Cirkel, af en Diagonal og de parallele Siders Sum.

3. En ret Linie gennem Punktet $A(a, 0)$ skærer Linierne

$$y = ax \quad \text{og} \quad y = -ax$$

i Punkterne P og Q, saaledes at $\frac{OP}{OQ} = \frac{p}{q}$, idet O er Begyndelsespunktet.
Find Ligningerne for de geometriske Steder for P og Q, naar a varierer, og vis, at de skære X - aksen i to Punkter, der ere konjugerede med Hensyn til O og A.

Aritmetik

1. Bevis, at 9 gaar op i $a^6 - b^6$, dersom a og b er hele Tal, der ikke ere delelige med 3.

2. Find de Grænser, større end 0 og mindre end 2π, hvorimellem v maa ligge, naar

$$2\sin^2 v - \sin v - 1$$

skal være positiv.

3. Find x, y og z af Ligningerne

$$y^2 + yz + z^2 = 19$$
$$z^2 + zx + x^2 = 13$$
$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

Afgangseksamen Juni 1902

Beregningsopgave

I en Trekant er Summen af de to Sider 12,97 Cm, og Højderne paa disse Sider 3,567 Cm og 4,543 Cm.
Beregn Trekantens Sider, Vinkler og Areal.

Projektionstegning

Tegn først Billederne af en Kugle, der berører begge Billedplanerne, og hvis Radius ikke maa være mindre end 1 Tomme.
En ret Linie L, der er parallel med den vandrette Billedplan, men hverken parallel med eller vinkelret paa den lodrette, er given ved sine Billeder; disse skal vælges saaledes, at intet af dem skærer noget Billede af Kuglen.
Tegn Sporene af en af de Planer gennem L, der skærer Kuglen i en Cirkel, hvis Diameter er lig med Kuglens Radius. Og tegn endelig begge Billeder af denne Cirkel.
Kuglen tænkes ugennemsigtig.

Geometri

1. Man skal bestemme k saaledes, at Ligningen

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 10y + k = 0$$

fremstiller to rette Linier, og dernæst finde disse Liniers Ligninger.

2. Man danner et Polyeder derved, at man bortskærer Hjørnerne af en Tærning ved otte plane Snit gennem Midtpunkterne af hvert Hjørnes Kanter.
Af hvilke Polygoner begrænses dette Polyeder?
Hvor mange Hjørner og Kanter har det?
Er det omskrevet om Tærningens indskrevne Kugle?
Find Forholdet mellem Arealerne af Polyedrets og Tærningens Overflader, samt Forholdet mellem deres Rumfang.

3. I et givet Kvadrat skal ved Konstruktion indskrives en given ligesidet Trekant, saaledes at to af dens Vinkelspidser skal ligge i to modstaaende Kvadratsider.
Find Betingelserne for Opgavens Mulighed samt Arealerne af den mindste og den største ligesidede Trekant, som kan indskrives i et Kvadrat med Siden a.

Aritmetik

1. Find et tocifret Tal, der har de samme Tiere og Enere som dets Kvadrat.

2. En Gæld G tilbagebetales derved, at Skyldneren i n paa hinanden følgende Aar, første Gang eet Aar efter Gældens Stiftelse, udbetaler en bestemt Sum, der altsaa indbefatter baade et Afdrag paa Gælden og Renter af den Restgæld, som han endnu skylder efter den sidste Udbetaling.
Hvor stor maa denne Sum være?
Hvor meget af den Sum, der betales p Aar efter Gældens Stiftelse, er Renter, og hvor meget er Afdrag? Den aarlige Rentefod er r.
Eks. $G = 20000$ Kr.; $n = 60$; $r = 0{,}035$; $p = 30$.

Afgangseksamen Januar 1903

Beregningsopgave

En af Siderne i en Trekant er 75,62´´, Højden fra et af dens Endepunkter er 42,94´´, og Medianen fra samme Punkt er 63,12´´.
Beregn Trekantens Vinkler, ubekendte Sider og Areal.

Projektionstegning

En skæv Kegle har en given Cirkel i den vandrette Billedplan til Grundflade, dens Højde er lig med Cirkelens Diameter og det vandrette Billede af Toppunktet ligger i Endepunktet af den Diameter, der er parallel med Projektionsaksen.
Konstruer en Tangentplan til Keglen, der danner en Vinkel paa 60° med den vandrette Billedplan.
Parallel med den fundne Tangentplan lægges en Plan, hvis vandrette Spor gaar gennem Cirkelens Centrum. Af Skæringslinien mellem Keglefladen og den sidstnævnte Plan tegnes i vandret Billede den Del, der ligger over den vandrette Billedplan.

Geometri

1. Konstruer et Parallelogram, i hvilket Perimeteren og begge Højderne har givne Længder.

2. A, B, C og D er Hjørnespidserne i et Tetraeder; A_1 er den indskrevne Kugles Røringspunkt med Sidefladen BCD, B_1 Kuglens Røringspunkt med ACD osv. Trækkes rette Linier fra hver Siderflades Vinkelspidser til dens Røringspunkt med Kuglen, dannes der tre Vinkler ved hvert Røringspunkt.
Bevis, at hvilke som helst to af disse Vinkler, der spænder over en og samme Kant, er lige store (f. Eks. AB_1C og AD_1C); og bevis dernæst, at det er de samme tre Vinkler, der ligger ved alle fire Røringspunkter.

3. I et foranderligt Rektangel $ABCD$ ligger A fast i et givet Punkt af X - aksen, medens den modstaaende Vinkelspids C glider paa Y - aksen; Siderne danner spidse Vinkler paa 45° med Koordinatakserne.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem BD og den vinkelrette paa Y - aksen i C.

Aritmetik

1. Find Betingelserne for at Ligningerne

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ og } x^2 + px + q = 0$$

har een Rod fælles.

2. Opløs $n^4 + n^2 + 1$ i to reelle Faktorer, der begge er af 2den Grad med Hensyn til n.

Afgangseksamen Juni 1903

Beregningsopgave

1. En lodret Stok, der er 157 Cm lang, kaster en Skygge paa 115 Cm i det Øjeblik, da Solen staar lige i Syd; desuden er der givet, at Solens Deklination samtidig er 19°20´5´´(nordlig). Beregn Stedets geografiske Bredde.

2. En Embedsmand laaner 3700 Kr. Til Afbetaling af denne Gæld kan han af sine sædvanlige Indtægter kun yde 157 Kr. 25 Øre aarlig, og dette Beløb, som han første Gang betaler eet Aar efter Gældens Stiftelse, udgør netop den aarlige Rente af Gælden. Men hvert femte Aar, første Gang 3 Aar efter Gældens Stiftelse, faar han Bonus i Livsforsikringsanstalten og bliver derved i Stand til at betale et Ekstraafdrag.
Hvor stort er dette, naar Gælden er helt afbetalt efter 24 Aars Forløb?

Projektionstegning

Tegn Billederne af et regulært Oktaeder, om hvilket der er givet: at det ene Endepunkt af en Diagonal ligger i den vandrette Billedplan, at denne Diagonal danner en Vinkel paa 45° med sit vandrette Billede, at dettes Vinkel med Grundlinien er 30°, og at to af de Kanter i Oktaedret, som ikke gaar gennem noget Endepunkt af den nævnte Diagonal, er parallele med den vandrette Billedplan. Diagonalen skal være 2 à 3 Tommer lang.

Geometri

1. En Omdrejningskegle og en Omdrejningscylinder er omskrevne om samme Kugle. Find Keglens Toppunktsvinkel, naar Kuglens, Cylindrens og Keglens Rumfang danner en Differensrække.
Bevis dernæst, at ogsaa Arealerne af de tre Legemers Overflader danner en Differensrække.

2. Af en Hyperbel er givet to Punkter P og Q, endvidere Tangenten til P samt det ene Brændpunkt F. Konstruer det andet Brændpunkt.

3. A og B er Centrerne i to givne Cirkler med Radierne a og b, AA_1 og BB_1 er to paa hinanden vinkelrette Radier, og M er Midtpunktet af A_1B_1.
Find det geometriske Sted for M. (Linien AB kan tages til X-akse, og Midtpunktet af AB til Begyndelsespunkt).

Aritmetik

1. Løs Ligningen

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

med Hensyn til x, og vis, at de fundne Rødder tilfredsstiller den forelagte Ligning.

2. Find den største og den mindste Værdi, som

$$y = \frac{4ax^2 + b(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

kan faa for reelle Værdier af x, idet a og b er reelle og desuden $a > b$.

Afgangseksamen Juni 1904

Beregningsopgave

Et Legeme er begrænset af to Rektangler $ABCD$ og $A_1B_1C_1D_1$ ($AB \neq A_1B_1$ og $AD \neq A_1D_1$) samt fire Trapezer; det Hjørne, hvis Toppunkt er A, har Kanterne AB, AD og AA_1.
Beregn dette Legemes Rumfang, naar følgende Størrelser er givne:
$\angle A_1AB = 53°49'8''$, $\angle A_1AD = 76°21'14''$, $AA_1 = 4{,}185$; $AB = 5{,}283$; $AD = 4{,}712$; $A_1B_1 = 3{,}825$; $A_1D_1 = 2{,}174$.

Projektionstegning

En given Plans vandrette og lodrette Spor danner med Grundlinien Vinkler, der er henholdsvis 60° og 15°. Tegn Billederne af en ret Linie, som ligger i denne Plan og er vinkelret paa dens vandrette Spor.
Et Stykke ab af denne Linie, hvis ene Endepunkt a ligger i den vandrette Billedplan, tages til Kant i en Tærning, der skal ligge saaledes paa Planen, at denne danner lige store Toplansvinkler med de to i ab sammenstødende Sideflader.
Tegn denne Tærnings Billeder. Tegn endelig det lodrette Billede af den Storcirkel i Tærningens indskrevne Kugle, der ligger i Diagonalplanen gennem ab.
Liniestykket ab maa vælges saaledes, at alle Tærningens Punkter kommer til at ligge i 1ste Rumvinkel. – Tærningens Sideflader er ugennemsigtige.

Geometri

1. Konstruer en ret Linie, som er parallel med de parallele Sider i et givet Trapez, og som halverer dets Areal.
2. Alle Siderne i en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er 30°, er delte indvendig, efter samme Omløbsretning, i Forholdet 1 : 2.
Find Vinklerne i den Trekant, der har Delingspunkterne til Vinkelspidser.
3. En vilkaarlig ret Linie gennem et givet Punkt P skæres i A og B af en given Parabel med Brændpunktet F; L er Ledeliniens Skæringspunkt med den rette Linie, der gaar gennem Midtpunktet af Korden AB og er parallel med Parablens Akse.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linierne PAB og LF.

Aritmetik

1. Find de hele Værdier af x og y, der tilfredsstiller Ligningen $x^2 - y^2 = p$, hvor p er et Primtal.

2. Af to Størrelser, x og y, dannes to andre x_1 og y_1, ved Ligningerne

$$x_1 = a \cdot x + b \cdot y + c \quad \text{og} \quad y_1 = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma.$$

Af disse dannes atter to andre Størrelser, x_2 og y_2 ved to Ligninger af samme Form, nemlig

$$x_2 = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \text{ og } \quad y_2 = \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \gamma.$$

Find de tre Koefficienter a, b og c udtrykte ved de tre andre α, β og γ, naar x_2 og y_2 skal være identisk lige store med henholdsvis x og y.
Alle Koefficienterne antages at være forskellige fra Nul.

3. I en uendelig, rent periodisk Kædebrøk bestaar Perioden af 5 ufuldstændige Kvotienter, som alle er positive hele Tal; den 4de Konvergent er $\frac{7}{5}$, og den 5te $\frac{25}{18}$.
Find Kædebrøken og Periodens ufuldstændige Kvotienter.

Afgangseksamen Januar 1905

Beregningsopgave

En Gæld afbetales derved, at der hvertandet Aar, første Gang eet Aar efter Gældens Stiftelse, betales en Sum, der er $1\frac{3}{5}$ Gange den aarlige Rente af den oprindelige Gæld, og hvertandet Aar en Sum, der er $1\frac{4}{5}$ Gange Renten. Naar der er ydet saa mange Afbetalinger som muligt af denne Art, bliver der en Restgæld, som er mindre end enhver af de aarlige Ydelser. Hvor mange pCt. af den oprindelige Gæld udgør denne Restgæld? Gælden forrentes med 4½ pCt. p.a.

Projektionstegning

En Omdrejningscylinder (ret cirkulær Cylinder) rører den vandrette Billedplan langs en Sidelinie, der er parallel med Grundlinien. Denne Sidelinie er Diagonal i et Kvadrat, der ligger i den vandrette Billedplan og er Grundflade i en regelmæssig (retstaaende) Pyramide, hvis to modstaaende Sidekanter tangerer Cylinderfladen.
Tegn begge Billeder af disse Legemer og af deres Overfladers Skæringslinie.
Cylindrens Sidelinie skal være 2½ Gange saa lang som Grundfladens Diameter, der ikke maa være mindre end 1 Tomme.

Geometri

1. Konstruer en Trekant af Højden paa den ene Side, Differensen mellem Vinklerne ved denne Side og den omskrevne Cirkels Radius.

2. En Diameter og en Korde i en Cirkel skærer hinanden saaledes, at Diameteren deles i Forholdet 2 : 3, medens det ene af Kordens to Stykker er $\frac{5}{6}$ af Cirklens Radius.
Find Kordens Vinkel med Diameteren.

3. Til Ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ med Centrum O trækkes to parallele Tangenter med Røringspunkterne Q og Q_1. Den vinkelrette fra O paa disse Tangenter skærer Ellipsen $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ i to Punkter, af hvilke det ene er P. Idet M er Midtpunktet af PQ, og M_1 er Midtpunktet af PQ_1, skal man bevise, at Firkanten $OMPM_1$ er et Parallelogram, og finde dettes Sider udtrykte ved a og b.

Aritmetik

1. Vis, at Ligningerne $6x^3+x^2-5x-2=0$ og $4x^3-7x-3=0$
har en Rod fælles, og løs dem derefter fuldstændigt.

2. Af Ligningerne $xy=a$ og $\log_y x+\log_x y=b+\frac{1}{b}$
findes x og y udtrykte ved a og b.
($\log_p q$ betyder Logaritmen til q i det Logaritmesystem, hvis Grundtal er p.)
Ekspl. : $a=8$, $b=2$.

3. Bevis, at Udtrykket $x=\cos\frac{(2p+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2p+1)\pi}{n}$, $(i^2=-1)$,
hvor n er positiv hel, medens p er et vilkaarligt helt Tal, kan antage n og kun n forskellige Værdier; og angiv den algebraiske Ligning, hvis Rødder er disse Værdier af x.

Afgangseksamen Juni 1905

Beregningsopgave

1. Naar den krumme Overflade af en Omdrejningskegle udfoldes i en Plan, fremkommer der et Cirkeludsnit, hvis Bue er 237°46´. Beregn Keglens Toppunktsvinkel samt Forholdet mellem Rumfangene af Keglen og af det Kugleudsnit, som beskrives af Cirkeludsnittet, naar det drejes en Gang rundt om Centervinklens Halveringslinie.
2. Den 1ste August 1900 indsatte en Mand i en Bank en Pengesum, der var bestemt til hans Søns Uddannelse, og som var saa stor, at Sønnen, naar de paaløbne Renter stedse lagdes til Kapitalen, i de næste 6 Aar den 1ste i hver Maaned (første Gang altsaa den 1ste September 1900) kunde hæve 100 Kr. Da det imidlertid straks viste sig, at Sønnen behøvede 25 Kr. mere om Maaneden, end Faderen oprindelig havde tænkt sig, hævede han maanedlig 125 Kr. i Banken. Naar kunde han sidste Gang hæve denne Sum? Renten er 3½ pCt. p.a.

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan tegnes en regulær Femkant $ABCDE$ saaledes, at BC er parallel med Grundlinien (Projektionsaksen), og at denne og Femkanten ligger paa hver sin Side af BC. Denne Femkant tages til Grundflade i et femsidet Prisme med Sidekanterne AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 og EE_1; AA_1 skal være lig med den vinkelrette fra D paa AB og danne en Vinkel paa 60° med Grundfladen, og desuden skal den være vinkelret paa AB. Tegn begge Billederne af dette Legeme.
Prismet deles af Diagonalplanen gennem CC_1 og EE_1 i et tresidet og et firsidet Prisme; tegn begge Billederne af dette sidste Legeme, efter at det er drejet 120° om AB.
Afstanden mellem Grundlinien og BC skal være saa stor, at ingen af Hjørnespidserne falder uden for 1ste Rumvinkel. - Naar der til Radius i Femkantens omskrevne Cirkel tages en Linie af omtrent 1 Tommes Længde, faar Tegningen en passende Størrelse.

Geometri

1. Der er givet et Kvadrat og en Halvcirkel med Diametren AB. Konstruer en Firkant $ABCD$, der har samme Areal som Kvadratet, og hvis tre Sider tangerer Halvcirklen.

2. Benene af en Vinkel x danner Vinklerne α og β med en Plan, paa hvilken x projiceres som en ret Vinkel; find x udtrykt ved α og β.

3. I Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ trækkes et vilkaarligt Par konjugerede Diametre; find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem den ene af disse Diametre og Linien gennem et af Brændpunkterne parallel med den anden. Vis, at dette geometriske Sted er en Hyperbel, og find dennes to Halvakser.

Aritmetik

1. Under hvilken Betingelse er Differensen $(x + y + z)^n - (x^n + y^n + z^n)$, hvor n er positiv hel, delelig med $\frac{1}{3} \cdot [(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)]$?

2. Bevis Formlen $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, og find dernæst Summen af hver af Rækkerne $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + \ldots + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ og $1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \ldots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1$.

3. Løs Ligningerne $2xy^2 + xy + 4y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$ og $2x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 11 = 0$ med Hensyn til x og y.

Afgangseksamen Januar 1906

Beregningsopgave

1. Højderne paa to af Siderne i en Trekant forholder sig som $\sqrt{7}$ til $\sqrt{5}$, og den af Siderne indesluttede Vinkel er 57°26´. Beregn Trekantens to andre Vinkler.

2. Beregn Forholdet mellem Arealerne af et Cirkelafsnit (Segment), hvis Bue er 123°38´, og den Trekant, der dannes af Korden og Cirkeltangenterne i dens Endepunkter.

3. Beregn Rumfanget af en cirkulær Kegle, naar Grundfladens Radius er 18,47 Cm., den mindste Frembringer (Sidelinie) er 23,71 Cm. og den største 40,65 Cm.

Projektionstegning

Tegn Billederne af en Omdrejningskegle (ret cirkulær Kegle), hvis Toppunktsvinkel er 60°, og hvis Akse er vandret og danner en Vinkel paa 45° med den lodrette Billedplan medens Grundfladens Periferi tangerer den vandrette Billedplan.
Tegn dernæst det vandrette Billede af Skæringslinien mellem denne Kegles krumme Overflade og en Plan, der er parallel med dens Akse, danner en Vinkel paa 45° med den vandrette Billedplan og har en Afstand fra Aksen, der er en Fjerdedel af Grundfladens Radius.

Geometri

1. Konstruer en Trekant, naar Skæringspunkterne mellem dens omskrevne Cirkel og dens Højder (eller disses Forlængelser) skal falde i givne Punkter.

2. Paa en Tærnings Sideflader som Grundflader konstrueres Pyramider, hvis Sideflader danner Vinkler paa 45° med Grundfladen.
Hvilke og hvor mange Sideflader, hvilke og hvor mange Hjørner, hvor mange Kanter har det saaledes fremkomne Polyeder?
Find dernæst dette Polyeders Toplansvinkler og de plane Vinkler paa dets Overflade.
Find endelig Forholdet mellem Arealerne af Polyedrets og Tærningens Overflader samt Forholdet mellem de samme to Legemers Rumfang.

3. Paa en given Parabel med Toppunkt O er to Punkter A og B saaledes beliggende, at $\angle AOB$ er ret.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Parabeltangenterne i A og B.

Aritmetik

1. Tre Venner købte mellem 1000 og 2000 Jordbærplanter og delte dem saaledes, at de fik lige mange hver; de plantede dem i deres Haver, idet enhver af dem anbragte saa mange af sine Planter som muligt i Rækker med lige mange i hver Række. Den ene fik da 7, den anden 8 og den tredje 9 Rækker, og derved fik den første 3, den anden 5 og den tredje 4 Planter tilovers. Hvor mange Planter købte de i alt?

2. Tre reelle Tal, der danner en Kvotientrække, har den givne Sum s.
Mellem hvilke Grænser maa Tallenes Produkt være beliggende?

Afgangseksamen Juni 1906

Beregningsopgave

1. I en Cirkel med Radius 2,345 cm er Korden AB = 3,5 cm og AC = 4 cm.
Beregn Længden af den Korde gennem B, der er parallel med AC.

2. Grundfladen i en tresidet Pyramide er en ligebenet Trekant, hvis Grundlinie er halv saa stor som hvert af Benene og en Trediedel af hver af Pyramidens Sidekanter.
Beregn Grundfladens Vinkler med Sidekanterne og med enhver af Sidefladerne.

3. I en Trekant, hvis Areal er 198,7□´´, er den indskrevne Cirkels Radius 5,414´´, og Summen af de to Sider 56,4´´. Beregn Trekantens Sider og Vinkler samt de udvendige Røringscirklers Radier.

Projektionstegning

En Kugle rører begge Billedplanerne; en anden Kugle, hvis Radius er en Trediedel af den førstes, rører denne og den lodrette Billedplan, saaledes at Centerlinien ligger i en Plan vinkelret paa Grundlinien.
Tegn Sporet i den vandrette Billedplan af en Kegleflade, der rører begge Kuglerne, samt de to Billeder af Keglefladens Røringscirkel med den største af Kuglerne.
Ved Optrækningen betragtes Keglefladen som ugennemsigtig.

Geometri

1. Konstruer en Trekant af en Side og den modstaaende Vinkel, naar det tillige er givet, at de tre Sider danner en Differensrække, hvis mellemste Led er den givne Side.

2. I en Omdrejningskegle med Toppunktsvinkel 2α indskrives en Kugle, og til denne lægges Tangentplanen parallel med Keglens Grundflade. Derved fremkommer en ny Kegle, der behandles paa samme Maade som den givne, og dette tænkes fortsat i det uendelige.
Find Forholdet mellem Summen af alle de saaledes fremkomne Kuglers Rumfang og den givne Kegles Rumfang.

3. Paa en ret Linie er der givet tre Punkter O, A og B; de to sidste Punkter projiceres i A_1 og B_1 paa en vilkaarlig ret Linie gennem O.
Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linierne AB_1 og BA_1.

Aritmetik

1. Løs Ligningen $x^{10} - 31\,x^5 - 32 = 0$.
Rødderne skal reduceres saaledes, at de ikke indeholder andre irrationale Størrelser end Kvadratrødder.

2. I Rækken

$$a_1, a_2, a_3, a_4\,, \ldots$$

er a_3 og ethvert følgende Led lig med Produktet af de to nærmest foregaaende.

Bevis, at Produktet af de n første Led er lig med $\dfrac{a_{n+2}}{a_2}$.

3. En Figur, der bestaar af et Rektangel og Halvcirklen over en af Rektanglets Sider som Diameter, har den givne Omkreds p.
Bestem Rektanglets Sider, naar Figurens Areal skal være saa stort som muligt.

Afgangseksamen Januar 1907

Beregningsopgave

1. Siderne i en Trekant er 2,341; 3,452; 4,563. Beregn Radierne i Trekantens fire Røringscirkler, og prøv, om de fundne Værdier tilfredsstiller Ligningen

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \ ,$$

naar r betegner den indskrevne Cirkels Radius og r_a, r_b, r_c betegner de tre andre Røringscirklers Radier.

2. Beregn, hvor mange Mil Kjøbenhavns Observatorium, der ligger under 55°41´ nordlig Bredde, bevæger sig paa Grund af Jordens Rotation i 1 Minut, naar Jorden drejer sig een Gang om sin Akse i 23 Timer 56 Minutter, og Jordkuglens Diameter er 1715,8 Mil.

3. Find Forholdet mellem en Omdrejningskegles Rumfang og Rumfanget af den i Keglen indskrevne Tærning, naar Keglens Toppunktsvinkel er 90°.

Projektionstegning

I en Plan, hvis Vinkel med den vandrette Billedplan er 15°, og hvis vandrette Spor danner en Vinkel paa 60° med Grundlinien, ligger en regelmæssig Femkant *ABCDE* saaledes, at *A* ligger i og *CD* er parallel med det vandrette Spor; denne Femkant er Grundflade i en Pyramide *T - ABCDE*, hvis Sideflader er kongruente Trekanter, og hvis Højde har en saadan Størrelse, at Kanten *AT* er lodret.
Tegn Billederne af denne Pyramide.
Idet Midtpunktet af *AT* betegnes ved A_1, og den ved A_1 og *CD* bestemte Plans Skæringspunkter med Kanterne *BT* og *ET* betegnes ved henholdsvis B_1 og E_1, skal man dernæst tegne Billederne af den femsidede Pyramide $T - A_1B_1CDE_1$, efter at den er drejet en halv Omdrejning om Linien gennem A_1 parallel med den givne Plans vandrette Spor.
Ved Optrækningen betragtes Pyramidens Grund - og Sideflader som uigennemsigtige. - Tegningen faar en passende Størrelse, naar Radius i *ABCDE*'s omskrevne Cirkel er omtrent 1 Tomme.

Geometri

1. Der er givet en Vinkel og et Punkt i det ene af Vinkelens Ben.
Konstruer en Cirkel, hvis Centrum ligger i dette Vinkelben, og som gaar gennem det givne Punkt og tangerer det andet Vinkelben.

2. Siderne i en Trekant danner en Kvotientrække, og Vinkelen overfor den Side, der er det mellemste Led i Rækken, har en given Størrelse.
Find Formler til Beregning af de to andre Vinkler, og find dernæst de Grænser, mellem hvilke den givne Vinkel maa ligge.
Beregningen udføres, naar den givne Vinkel er 45°.

3. Skæringspunkterne mellem Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ og X - Aksen betegnes *A* og A_1, Skæringspunkterne mellem Hyperblen og en vilkaarlig Linie parallel med Y - Aksen ved *P* og P_1.
Bevis, at det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linierne *AP* og A_1P_1 er en Ellipse, og find dens Brændpunkters Koordinater.

Aritmetik

1. Find det første Led og Differensen i en Differensrække med n Led, hvis Sum for alle Værdier af n er lig med $3n^2 + 7n$.

2. Man skal bevise, at Koefficienterne i de to Polynomier af 2den Grad

$$ax^2 + bx + c \text{ og } Ax^2 + Bx + C$$

maa tilfredsstille Ligningen

$$(aC - cA)^2 + acB^2 + b^2AC = bB(aC + cA) \ ,$$

hvis de to Polynomier har en fælles Faktor af 1ste Grad.

3. Bevis, at de tre reelle Tal x, y og z maa være lige store, dersom

$$(x + y + z)^2 = 3 \cdot (xy + yz + zx) .$$

Afgangseksamen januar 1907 slut

Afgangseksamen Juni 1907

Beregningsopgave

1. En Gæld kan afbetales i 28 Aar derved, at der hvert Aar, første Gang 1 Aar efter Gældens Stiftelse, betales en bestemt Sum.
Hvor mange pCt. af den oprindelige Gæld udgør denne Sum, naar Gælden skal forrentes med 2½ pCt. halvaarlig?
Hvor mange pCt. af den oprindelige Gæld udgør Restgælden efter 14 Aars Forløb?

2. I en Trekant er to af Vinklerne henholdsvis 73°51´ og 37°15´, og Medianen fra den tredie Vinkels Toppunkt er 2,891 Cm. Beregn de to Dele, hvori denne Vinkel deles af Medianen, samt Trekantens Sider.

Projektionstegning

En Omdrejningskegle staar paa den vandrette Billedplan; Grundfladens Radius er omtrent 1 Tomme, og Højden er 3 Gange saa stor. Tegn Billederne af denne Kegle og af et parabolsk Snit gennem Grundfladens Centrum vinkelret paa den lodrette Billedplan. Keglen tænkes drejet om den ene af de to Tangenter til Grundfladens Periferi, der er vinkelrette paa Grundlinien, indtil den Frembringer, der er parallel med Snittet, kommer ned i den vandrette Billedplan. Tegn Billederne af Keglen og Snittet i denne Stilling, og bestem Brændpunktet og Ledelinien i Snittets vandrette Billede.

Geometri

1. Der er givet tre rette Linier, der udgaar fra samme Punkt. Konstruer en Trekant, hvis Vinkler halveres af disse Linier, og hvis ene Side har en given Længde.

2. I en regulær 4-sidet Pyramide er Forholdet mellem Grundfladens Side og Pyramidens Sidekant lig med n.
Find Toplansvinklerne mellem Grundfladen og en Sideflade, mellem to sammenstødende Sideflader, og mellem to modstaaende Sideflader.
Hvor stor er den største Værdi, som n kan have?

3. Man skal finde Ligningerne for to Cirkler, af hvilke den ene tangerer Linien $4x = 3y$ i Begyndelsespunktet, den anden tangerer Linien $3x + 4y = 15$ i dens Skæringspunkt med X - aksen, og som skærer hinanden i Punktet $(a, 0)$.
Dernæst skal man finde det geometriske Sted for det andet Skæringspunkt mellem disse Cirkler, naar a varierer, og bevise, at den fundne Kurve gaar gennem Vinkelspidserne i den ved X - aksen og de to givne Linier bestemte Trekant.

Aritmetik

1. I en Kvotientrække er Summen af 1ste og 2det Led $4\sin^2 v$, Differensen mellem 1ste og 3die Led er $2\sin^2 2v$, og Summen af alle Leddene er $1 + \text{tg}^2\, v$. Find det 1ste Led, Kvotienten og Leddenes Antal.

2. Man skal finde et tocifret Tal, hvis Kvadrat er 1 større end et Multiplum af 200.

3. Udtryk $\sin 3v$ alene ved $\sin v$, og anvend den fundne Formel til Beregning af alle tre Rødder i Ligningen $3x - 4x^3 = 0,7632$.

Afgangseksamen Januar 1908

Beregningsopgave

1. Beregn Vinkler og Sider i en ligebenet Trekant, hvis om - og indskrevne Cirkels Radier er henholdsvis $16\frac{2}{3}$ Cm. og 6,25 Cm.

2. To Cirkler i samme Plan med Radierne $r_1 = 39{,}41''$ og $r_2 = 28{,}65''$ har Centerlinien $c = 7{,}52''$, og en Tangent til den mindste Cirkel danner en Vinkel paa 17°23´ med Centerlinien. Denne Tangent afskærer af den største Cirkel et Afsnit, mindre end en Halvcirkel, som drejes en hel Omdrejning om Centerlinien.
Beregn Rumfanget af det derved frembragte Legeme (en “Kugleskræl”).

Projektionstegning

I den vandrette Billedplan ligger Kvadratet *ABCD* saaledes, at ingen af dets Sider er vinkelret paa eller parallel med Grundlinien; det er Grundflade i en Pyramide med Toppunkt i *O*, i hvilken Sidefladen *OAB* er en ligesidet Trekant og $\angle OAD$ er 45°.
Tegn denne Pyramides vandrette og lodrette Billede, endvidere Sporene af Planen vinkelret paa Midten af *OA*, og endelig den sande Figur af denne Plans Skæringslinie med Pyramidens Overflade.
Kvadratets Side bør være omtrent 2 Tommer lang. - Ved Optrækningen betragtes Skæringsplanen som ugennemsigtig.

Geometri

1. Man skal ved Konstruktion bestemme Skæringspunkterne mellem en Parabel og Cirklen over Afstanden fra Ledelinien til Brændpunktet som Diameter.

2. I den firsidede Pyramide *O-ABCD* er Grundfladen et Rektangel og $OA = OB$.
Bevis $OC = OD$.
En Plan gennem *AB* skærer *OC* i C_1 og *OD* i D_1.
Bevis, at C_1D_1 er parallel med *AB* og *CD*.
Find Forholdet mellem Rumfangene af de to Legemer, hvori denne Plan deler Pyramiden, naar $\dfrac{OC_1}{C_1C} = \dfrac{2}{3}$.

3. Et Keglesnit er bestemt ved Ligningen

$$4x^2 + 3y^2 = 8x\sqrt{3}.$$

Find Halvakserne og Excentriciteten.

Aritmetik

1. Find de positive hele Værdier af *x, y* og *z*, der tilfredsstiller Ligningen $x + y = xyz$.

2. Bevis ved Induktion Formlen

$$1\cdot(a+1) + 2\cdot(a+2) + 3\cdot(a+3) + \ldots + n\cdot(a+n) = \frac{n(n+1)(3a+2n+1)}{6}\ .$$

3. Løs Ligningen

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

og bring dens komplekse Rødder paa Formen $a+ib$.

Afgangseksamen Juni 1908

Beregningsopgave

1. Paa en Kugleflade med Radius 5,012 Cm. ligger paa modsatte Sider af Centrum to parallele Lillecirkler med Radierne 2,987 Cm. og 4,103 Cm.
Beregn:
a) Arealerne af de to Kalotter og af det Bælte, hvori Kuglefladen deles af disse Cirkler;
b) Toppunktsvinklen i den Omdrejningskegleflade, der er bestemt ved Cirklerne;
c) Rumfanget af det Legeme, der er begrænset af en Del af denne Kegleflade og den største af Kalotterne.

2. En tresidet Pyramide $O\text{-}ABC$ har Kanterne $OA = OB = OC = AB = 5$ Cm, $BC = 4$ Cm, $CA = 3$ Cm.
Beregn Sidekanternes og Sidefladernes Vinkler med Grundfladen ABC.

Projektionstegning

En regulær 6-sidet Pyramide $O\text{-}ABCDEF$, hvis Sideflader danner Vinkler paa 75° med Grundfladen, ligger med Sidefladen OAB paa den vandrette Billedplan og Punktet A i Grundlinien (Projektionsaksen). Man skal tegne Billederne af denne Pyramide i to forskellige Stillinger:

1) naar Punktet B ligger i den lodrette Billedplan;
2) naar Punktet F ligger i den lodrette Billedplan.

Der skal benyttes samme Grundlinie (Projektionsakse) i begge Tegninger, men disse skal ligge helt uden for hinanden. - Pyramidens begrænsende Planer er ugennemsigtige. AB skal være omtrent 1 Tomme.

Geometri

1. Konstruer en retvinklet Trekant af den ene Katete og den vinkelrette paa Midten af Hypotenusen, regnet fra denne til Skæringspunktet med den anden Katete.

2. I $\Delta\, ABC$ har Vinklen A en given Størrelse og er lig med den ene af de Vinkler, som den modstaaende Side BC danner med sin Median. Find Vinklerne B og C .
Eks. $\sin A = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. Et vilkaarligt Punkt M af en given Parabel er Midtpunktet af Liniestykket LP, der er parallel med Parablens Akse, og hvis ene Endepunkt L ligger paa Ledelinien.
Idet O er Parablens Toppunkt og A Ledeliniens Skæringspunkt med Aksen, skal man finde det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linierne OM og AP.

Aritmetik

1. Bevis, at

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ p & q & \alpha & \beta \\ r & s & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

2. Løs Ligningen

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ ,$$

hvor a betegner et reelt Tal, med Hensyn til x, og prøv, om de fundne Værdier tilfredsstiller Ligningen.

3. Man skal undersøge, hvorledes Brøken

$$y = \frac{-8x}{x^2 + 2x + 5}$$

varierer, naar x gennemløber alle reelle Værdier fra $-\infty$ til $+\infty$, saaledes at man bestemmer de Værdier af x, for hvilke y bliver positiv, 0 eller negativ, samt den største og den mindste Værdi, som y kan antage.

Afgangseksamen juni 1908 slut

Ekstra Afgangseksamen September 1908

Beregningsopgave

I en Cirkel, hvis Radius er 2,89 Cm., er der indskrevet en Firkant $ABCD$. I denne er givet Siderne $AB = BC = 3{,}22$ Cm. og Diagonalen $BD = 4{,}8$ Cm.
Man skal beregne Firkantens Vinkler og de Dele, hvori de deles af Diagonalerne, samt Vinklen mellem Diagonalerne; endvidere den ubekendte Diagonal og de to ubekendte Sider.

Projektionstegning

Der er givet en Plan, som er vinkelret paa den lodrette Billedplan og danner en Vinkel paa 60° med den vandrette; endvidere er der givet et Punkt C i denne Plan, hvis Afstand fra den lodrette Billedplan er lig med dets Afstand fra Planens vandrette Spor. Dette Punkt er Centrum i en Cirkel, hvis Radius er halv saa stor som de nævnte Afstande.
Man skal tegne de vandrette Billeder af denne Cirkel og af Skæringslinien mellem den vandrette Billedplan og den Omdrejningscylinderflade, hvis Normalsnit er Cirklen.
Den givne Plan er gennemsigtig.

Afgangseksamen Januar 1909

Beregningsopgave

1. Længderne af Siderne i en retvinklet Trekant er 1ste, 22nde og 25nde Led i en Differensrække, og den indskrevne Cirkels Radius er 4,2 Cm lang.
Beregn Trekantens Sider og spidse Vinkler samt Rumfang og Overflade af den Dobbeltkegle, som fremkommer, naar Trekanten drejes en Omdrejning om Hypotenusen.

2. Idet a og b er to af Siderne i en Trekant og m Medianen til den tredie, skal man beregne Vinklerne, naar $2a = 3b = 3m$.

Projektionstegning

En Firkant $ABCD$ i hvilken $AB = BC$, $AC = CD = DA$, $\angle B = 90°$, ligger i den vandrette Billedplan saaledes, at AB har Endepunktet A i Grundlinien og danner en Vinkel paa 30° med denne. Den er Grundflade i en Pyramide T-$ABCD$, i hvilken $\angle ADT = 45°$ og $\angle CDT = 60°$ og Sidefladen TAB er vinkelret paa Grundfladen.
Man skal tegne Billederne af denne Pyramide.
Diagonalen AC skal være omtrent 2 Tommer lang.

Geometri

1. Der er givet Punkterne A, B og C. Konstruer en Cirkel, der gaar gennem A og B, og hvis Tangenter fra C danner en Vinkel paa 60° med hinanden.

2. Arealet af den krumme Overflade paa en Omdrejningskegle er A, og Cirkelperiferien af Storcirklen i dens omskrevne Kugle er C.
Find Keglens Rumfang udtrykt ved A og C.

3. M er et vilkaarligt Punkt paa Parablen $y^2 = px$ med Brændpunktet F, mens A er et fast Punkt paa Parablens Akse.
Man skal finde det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem to Linier, af hvilke den ene gaar gennem A og er parallel med FM, medens den anden gaar gennem F og er vinkelret paa Parablens Tangent i M.

Aritmetik

At finde de hele Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningen $2x - 5y = 13$.

Derefter skal man af de fundne Rodsæt bestemme det, for hvilket Størrelsen

$$z = 3x^2 - 19y^2$$

faar den størst mulige Værdi, samt angive denne største Værdi.

Afgangseksamen Juni 1909

Beregningsopgave

1. De to Sider i en Trekant med Arealet 325,6 cm^2 er 27,34 cm og 39,58 cm. Beregn Trekantens Vinkler og tredie Side samt Radierne i dens ind - og omskrevne Cirkel.

2. Beregn det Rumfang, der ligger mellem en Kugle med Radius 1 cm og en omskreven Kegleflade, hvis Toppunkt (Midtpunkt) har Afstanden 2 cm fra Kuglens Centrum.

Projektionstegning

Tegn Billederne af en regulær firsidet Pyramide, som staar paa en Plan, der danner lige store Vinkler med Billedplanerne, saaledes at en af Grundfladens Diagonaler er vandret; tegn endvidere Billederne af Grundfladens omskrevne Cirkel.
Denne Cirkels Diameter maa ikke være mindre end 1½ Tomme, Pyramidens Højde ikke mindre end 2 Tommer; Pyramiden skal ligge helt i 1ste Rumvinkel.
Ved Optrækningen betragtes Pyramidens Sideflader som ugennemsigtige.

Geometri

1. Konstruer Toppunkterne og Brændpunkterne i en Hyperbel, der har to givne Linier til Asymptoter, og hvis Parameter (d.v.s. Korden gennem et Brændpunkt vinkelret paa Brændpunktsaksen) har en given Længde.

2. Find Toppunktsvinklen i den til et Kugleudsnit hørende Kegle, naar denne Kegles krumme Overflade er n Gange Overfladen af Udsnittets indskrevne Kugle.
Hvilke Værdier kan n have? Eks. $n = 2$.

3. En retvinklet Trekant er indskrevet i en given Parabel, saaledes at den rette Vinkels Spids ligger fast i Parablens Toppunkt.
Find det geometriske Sted for dette Punkts Projektion paa Hypotenusen.

Aritmetik

1. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + 5y^2 + 3x - 5y - 10 = 0$$
$$2x^2 - 5xy + 10y^2 + 16x - 40 = 0.$$

2. Hvilke Værdier kan Brøken $y = \dfrac{8 - x^2}{6 - 2x}$ antage for alle mulige reelle Værdier af x ?

3. Find et fircifret Tal, om hvilket det er givet, at de tre sidste Cifre danner en Differensrække, og at det tocifrede Tal, der skrives med de to første Cifre, er en Trediedel af det, der skrives med de to sidste Cifre. Cifrene skal overalt tages i den Orden, hvori de staar i det søgte Tal.

Afgangseksamen Januar 1910

Beregningsopgave

1. Rentefoden for et Fjerdingaar er $1\frac{2}{5}$ pCt.; beregn Rentefoden
    1) for en Maaned;
    2) for et Aar.

2. Beregn Vinklerne i en Trekant, hvis Højder forholder sig som 2 : 3 : 5, samt Sidernes Vinkler med Medianen til den største Side.

Projektionstegning

I en firsidet Pyramide *O-ABCD* er Grundfladen et Rektangel, i hvilket $AB = a$ (et Liniestykke paa omtrent 1 Tomme) og $BC = 2a$; endvidere er $OA = OB = 2a$ og $OC = 1\frac{1}{2}a$. Tegn Billederne af denne Pyramide staaende paa den vandrette Billedplan, idet *D* ligger i og *DB* er vinkelret paa Grundlinien.
Gennem *AB* og Midtpunktet af *OD* lægges et plant Snit, hvorved Pyramiden deles i en Prismatoide og en ny firsidet Pyramide. Tegn Billederne af denne Pyramide, efter at den er drejet om *AB*, indtil *O* ligger i den vandrette Billedplan, samt dens Udfoldning i denne Plan.

Geometri

1. Der er givet en ret Linie *L* og to Punkter, *A* og *B*, paa hver sin Side af *L*.
Konstruer en Trekant *ABC* saaledes, at *L* halverer Vinkel *C*.

2. Find Toppunktsvinklen i en Omdrejningskegle, hvis Rumfang er 3 Gange saa stort som den indskrevne Kugles Rumfang.

3. Gennem et vilkaarligt Punkt af Ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ og ethvert af de to Toppunkter i Hyperblen $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ trækkes en ret Linie.
Bevis, at den rette Linie, der forbinder disse to Liniers andre Skæringspunkter med Hyperblen, er vinkelret paa X- aksen.

Aritmetik

1. Find Værdien af

$$\sin x + \sin(x+\tfrac{2\pi}{3}) + \sin(x+\tfrac{4\pi}{3}),$$

hvor x har en vilkaarlig Størrelse.

2. Find ved Prøve en hel Rod i Ligningen

$$x^3 - 3x - 18 = 0;$$

og vis dernæst, hvorledes man ved Hjælp af denne Ligning kan finde den nøjagtige Værdi af

$$x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}},$$

idet $\sqrt[3]{a}$ betegner den reelle Værdi af $a^{\frac{1}{3}}$, naar a er reel.

Afgangseksamen Juni 1910

Beregningsopgave

1. En Mand indsætter den 1. Juli i 22 paa hinanden følgende Aar et vist Beløb i en Sparekasse, der giver 2 pCt. halvaarlig.
Hvor stort maa dette Beløb være, naar der derved opspares 80000 Kr.?
log 1,02 = 0,008600.

2. I en konveks Firkant $ABCD$ er $AB = 3{,}427$ m, $BC = 2{,}986$ m, $AC = 5{,}129$ m, $AD = 4{,}031$ m, $BD = 5{,}532$ m.
Find CD og Firkantens Vinkler.

Projektionstegning

Tegn i den vandrette Billedplan en ligesidet Trekant ABC med Vinkelspidsen A i Grundlinien (Projektionsaksen) og saaledes, at Vinklen mellem denne og AB er 75°. Siden skal være omtrent 6 cm.
Tegn derpaa Billederne af en ret Linie l gennem B, der danner Vinkler paa 60° med BA og BC. Tegn endvidere Billederne af et skraat afskaaret Prisme (en Prismestub), hvis ene Endeflade er ABC, hvis anden Endeflade ligger i den lodrette Billedplan, og hvis Sidekanter er parallele med l.

Geometri

1. I en regulær femsidet Pyramide er Siden i Grundfladen 2 dm og Sidekanten 5 dm. Find Radierne i Pyramidens ind - og omskrevne Kugler.

2. Find det geometriske Sted for Centrene i de Cirkler, der gaar gennem et givet Punkt og af en given ret Linie afskærer en Korde af Længden 2 k.

3. Der er givet to hinanden skærende rette Linier samt et Punkt.
Konstruer en ligesidet Trekant saaledes, at den faar den ene Vinkelspids i Punktet og de to andre paa hver sin af Linierne.

Aritmetik

1. Find x og y af Ligningerne

$$5x^2 + 5xy - 11y^2 + 8x + 4y + 13 = 0 \quad \text{og}$$
$$3x^2 + 3xy + 13y^2 - 12x - 6y - 37 = 0.$$

2. Bestem to ulige store Brøker med Nævnerne 1357 og 437 saaledes, at Brøkernes Differens numerisk bliver saa lille som mulig.

Ekstraordinær Afgangseksamen Juni 1911

Beregningsopgave

En Trekants Sider har Længderne a = 47,22; b = 19,86; c = 35,93.
Beregn Vinklerne og Siderne i den Trekant, der har sine Vinkelspidser i Centrene til den givne Trekants udvendige Røringscirkler.

Projektionstegning

Konstruer det lodrette Spor af en Plan P, der danner en Vinkel paa 60° med den vandrette Billedplan og hvis vandrette Spor danner en Vinkel paa 45° med Grundlinien.
Bestem dernæst Centret af en Kugle med given Radius (ca. 3 cm), der tangerer P og begge Billedplanerne, samt Kuglens Røringspunkter med disse tre Planer.
Tegn endelig Billederne af Kuglens Skæringslinie med en Plan gennem Centrum og P's vandrette Spor.
Planen P tænkes ugennemsigtig.

Geometri

1. Bevis, at Forholdet mellem Afstandene fra en Ellipses ene Brændpunkt og fra den tilsvarende Ledelinie til et vilkaarligt Punkt paa Kurven er lig med dennes Ekscentricitet.

2. I et retstaaende tresidet Prisme med Højden h = 6,789 cm er Toplansvinklerne ved to af Sidekanterne A = 57,6° og B =76,5°, og den indskrevne Cylinders Radius er r = 2,345 cm.
Beregn Prismets Overflade og Rumfang.

3. ABC er en given Trekant, P er et givet Punkt paa Siden BC's Forlængelse.
Træk gennem P en Linie, som skærer AB og AC eller deres Forlængelser i X og Y saaledes, at $PX \cdot PY = PB \cdot PC$.

Aritmetik

1. Løs Ligningerne

$$3x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0.$$
$$3y^2 - 2xy + 6x - 10y + 3 = 0.$$

2. Man skal finde Værdien af Brøken

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

for $x = 0$ og $x = \pm\infty$.
Dernæst findes de reelle Værdier af x, for hvilke y er Nul eller uendelig stor; og endelig findes Grænserne for x, naar y er større end 1.

3. Vis, at $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ er delelig med 7, naar n er positiv, hel.

Studentereksamen Juni - Juli 1910.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at de komplekse Rødder i en algebraisk Ligning med reelle Koefficienter er konjugerede to og to.

2. Den ene Vinkel i en Trekant er 38°16´, og Forholdet mellem de to indesluttende Sider er tg 25°52´. Beregn Trekantens to andre Vinkler.

3. De to Vinkelspidser A og B i en Trekant ligger fast, medens den tredie Vinkelspids C bevæger sig saaledes, at Medianen til AB er Mellemproportionalen mellem Siderne AC og BC. Find det geometriske Sted for C.

Studentereksamen Juni - Juli 1910.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Den 1. Juli 1900 indsatte en Mand 10000 Kr. i en Sparekasse, der giver 4 pCt. p.a., og hvert Aars 1. Juli derefter udtager han 700 Kr. Hvor meget vil han da have indestaaende i Sparekassen den 1. Juli 1910 efter at have hævet de 700 Kr. ?

2. Sidefladerne i en regulær 4-sidet Pyramide er ligesidede Trekanter med Siden a. Bevis, at Pyramiden baade har en omskreven og en indskreven Kugle, og find disse Kuglers Radier.

3. Find Ligningerne for Tangenterne til Kurven

$$a^2y = x^3$$

i de to Punkter, hvis Abscisser er a og $-\frac{1}{2}a$. Find endvidere Arealet af den Figur, der er begrænset af de samme Punkters Ordinater samt de mellemliggende Stykker af Abscisseaksen og Kurven.

Studentereksamen Juni - Juli 1910.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. Den 1. Juli 1900 indsatte en Mand 10000 Kr. i en Sparekasse, der giver 4 pCt. p.a., og hvert Aars 1. Juli derefter udtager han 700 Kr. Hvor meget vil han da have indestaaende i Sparekassen den 1. Juli 1910 efter at have hævet de 700 Kr. ?

2. Sidefladerne i en regulær 4-sidet Pyramide er ligesidede Trekanter med Siden a. Bevis, at Pyramiden baade har en omskreven og en indskreven Kugle, og find disse Kuglers Radier.

3. En Kurve er i polære Koordinater bestemt ved Ligningen

$$r = \frac{a}{1 + \cos v} \quad ,$$

idet r betegner Radiusvektor og v dennes Vinkel med Polaraksen.
Find Kurvens Ligning i det retvinklede Koordinatsystem, hvis Begyndelsespunkt ligger i Polen, og hvis Abscisseakse falder sammen med Polaraksen, og angiv, hvad det er for en Kurve.

Studentereksamen Juni - Juli 1910.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

III.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister.)

1. I en Trekant ABC er $\angle A = 2 \cdot \angle C$, Højden fra A er 18, og Højden fra B er 40. Beregn Trekantens Vinkler og Sider.

2. Find Røringspunkterne A og B mellem Ellipsen

$$x^2 + 16y^2 = 16$$

og Tangenterne til den fra Punktet C (0,5). Find dernæst Ligningen for Trekant ABC's omskrevne Cirkel samt denne Cirkels Skæringspunkter med Abscisseaksen.

3. Find Grænseværdien af Funktionen

$$y = \frac{\sin x}{2x - 3\operatorname{tg} x} \quad ,$$

naar x konvergerer mod 0.

Studentereksamen Juni - Juli 1910.

Matematiske Opgaver

IV.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Retninger.)

1. Find x og y af Ligningerne

$$x - y = 1$$
$$xy = \frac{44}{49}$$

2. De to Sider i en Trekant er 1,23 cm og 3,21 cm, og den indesluttede Vinkel er $67\frac{1}{2}°$. Find den tredie Side.

3. En vis Kapital, som i 5 Aar har staaet paa Rente og Rentes Rente til 3 pCt. halvaarlig Rente, har derved faaet samme Størrelse som en anden Kapital, der oprindelig var 1000 Kr. større end den første og har staaet paa Rente og Rentes Rente i samme Tid til 5 pCt. helaarlig Rente. Find Kapitalernes oprindelige Størrelse.

Studentereksamen Januar 1911.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Man skal vise, hvorledes man finder de hele Tal, der tilfredsstiller Ligningen $ax - by = c$, hvor a, b og c er givne hele, positive Tal.

2. De tre Sider i en Trekant er 5,473 m, 7,945 m, 9,612 m.
   Beregn Vinklernes Halveringslinier.

3. En Omdrejningscylinder er indskrevet i en ret Kegle, hvis Grundflades Diameter er 3 Gange saa stor som Cylinderens.
   Find Forholdet mellem Arealerne af de to Dele, hvori Cylinderfladen deler Keglens krumme Overflade.

Studentereksamen Januar 1911.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Angiv Udseendet af Kurven $y = x^4 - 8x^2 + 16$ og find Arealet af den Figur, der begrænses af et Stykke af den positive X - akse, et Stykke af Y - aksen og et Stykke af Kurven. Find endelig Rumfanget af det Legeme, der beskrives af den nævnte Figur, naar den drejes en Omdrejning om X - aksen.

2. En Mand indsætter i en Sparekasse, der giver 4 pCt. p.a. i Rente, et vist Beløb hver 1. Juli fra 1910 til 1920, begge medregnede. Naar han i Sparekassen den 1. Juli 1925 har staaende 10000 Kr., hvor stort maa det aarlige Indskud da have været ?

3. Konstruer en Trekant af Vinklerne og en Median.

Studentereksamen Januar 1911.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

III.

1. I en regulær sekssidet Pyramide er hver Sidekant a og hver Kant i Grundfladen b. Find Forholdet mellem de to Dele, hvori Grundfladens Plan deler den omskrevne Kugles Overflade.

2. I Trekant ABC kaldes Røringspunkterne mellem den indskrevne Cirkel og Siderne D, E og F. Find Forholdet mellem Arealerne af Trekant DEF og ABC udtrykt ved trigonometriske Funktioner af Vinklerne.

3. Find den største og den mindste Værdi, som Funktionen $y = \dfrac{3x^2 - 5x + 5}{2x^2 - 3x + 4}$ kan faa for reelle Værdier af x.

Studentereksamen Januar 1911.

Matematiske Opgaver

IV.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Retninger.)

1. Løs Ligningerne

$$x^2 + y^2 + xy = 19$$
$$x^2 + y^2 + x + y = 18$$

2. En Mand indsætter hver 1. Juli 1895 til 1905, begge medregnede, 500 Kr. i en Sparekasse, der giver 4½ pCt. p.a. i Rente.
   Hvor meget har han opsparet umiddelbart efter det sidste Indskud ?

3. Angiv Formen af den krumme Linie, ved hvilken Funktionen $y = 2x^2 - 3$ fremstilles i et retvinklet Koordinatsystem.

Studentereksamen Juni—Juli 1911.

Matematiske Opgaver
for den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Forholdet mellem Afstandene fra en Ellipses ene Brændpunkt og fra den tilsvarende Ledelinie til et vilkaarligt Punkt paa Kurven er lig med dennes Ekscentricitet.

2. Find Grænseværdien *) af

$$\frac{x^{11} - 1}{x^3 - 5x^2 + 2x + 2}$$

for $x = 1$.

3. I et retstaaende tresidet Prisme med Højden $h = 6{,}789$ cm er Toplansvinklerne ved to af Sidekanterne $A = 57^\circ{,}6$ og $B = 76^\circ{,}5$, og den indskrevne Cylinders Radius er $r = 2{,}345$ cm. Beregn Prismets Overflade og Rumfang.

*) I nogle Lærebøger kaldes denne Værdi »den sande Værdi«.

Studentereksamen Juni—Juli 1911.

Matematiske Opgaver
for den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.
(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Find Koordinaterne til Skæringspunkterne mellem de Kurver, som i et retvinklet Koordinatsystem bestemmes ved Ligningerne

$$3x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0,$$
$$3y^2 - 2xy + 6x - 10y + 3 = 0.$$

Bevis, at alle Skæringspunkterne ligger paa een Cirkel.

2. I Tetraedret $ABCD$ er P og Q Medianernes Skæringspunkter henholdsvis i Sidefladerne ABC og ABD. Bevis, at Linierne DP og CQ deler hinanden i Stykker, der forholder sig som 1 til 3.

3. Find Maksimums- og Minimumsværdierne af Funktionen

$$y = 2x^3 - 3x^2,$$

og angiv Formen af den Kurve, der er bestemt ved Ligningen, naar x og y betegner retvinklede Koordinater.

Studentereksamen Juni - Juli 1911.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. Find Koordinaterne til Skæringspunkterne mellem de Kurver, som i et retvinklet Koordinatsystem bestemmes ved Ligningerne

$$3x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$$
$$3y^2 - 2xy + 6x - 10y + 3 = 0$$

Bevis, at alle Skæringspunkterne ligger paa een Cirkel.

2. I Tetraedret $ABCD$ er P og Q Medianernes Skæringspunkter henholdsvis i Sidefladerne ABC og ABD. Bevis, at Linierne DP og CQ deler hinanden i Stykker, der forholder sig som 1 til 3.

3. Man skal finde Værdien af Funktionen

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

for $x = 0$ og for $x = \pm\infty$. Dernæst findes de reelle Værdier af x, for hvilke y er Nul eller uendelig stor; og endelig findes Grænserne for x, naar y er større end 1.

Studentereksamen Juni—Juli 1911.

Matematiske Opgaver
for den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister.)

1. Find alle Rødderne i Ligningen

$$x^{14} - x^8 + x^6 - 1 = 0.$$

2. M og N er Endepunkterne af en vilkaarlig Diameter i en given Hyperbel. Fra M trækkes en Linie parallel med den ene Asymptote, fra N en Linie parallel med den anden. Find det geometriske Sted for disse Liniers Skæringspunkt, naar Diameteren drejer sig. Angiv Kurvens Art og Beliggenhed.

3. I et Tetraeder $ABCD$ lægges gennem Hjørnespidsen A en Plan parallel med Kanten CD. Bevis, at Planens Skæringslinie med Sidefladen BCD er parallel med CD.

Bestem dernæst Snitplanen saaledes, at den halverer Tetraedrets Rumfang.

Studentereksamen Juni - Juli 1911.

Matematiske Opgaver

IV.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Retninger.)

1. Find x af Ligningen

$$\sqrt{x+2} + 2\sqrt{2x+2} = \sqrt{3x+4}$$

og angiv de Fortegn, hvormed Rodstørrelserne skal tages, for at de fundne Værdier skal tilfredsstille Ligningen.

2. I Trekant ABC er Siderne BC = 1,2 cm, AC = 2,4 cm og $\angle C = 50°$.
Find Siden AB og Medianen fra Vinkelspidsen B.

3. En Mand indsætter hver 1ste Juli i Aarene 1895 til 1905, begge medregnede, 500 Kr. i en Sparekasse, der giver 4½ pCt. p.a. i Rente.
Hvor meget har han opsparet med Rente og Rentes Rente umiddelbart efter sidste Indskud ?

Studentereksamen Januar 1912.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Fremsæt og bevis Formlen for Pyramidens Rumfang.

2. Fra Punktet O udgaar tre rette Linier, der i Rækkefølge betegnes OX, OY og OZ saaledes, at $\angle XOY = 58{,}5°$ og $\angle YOZ = 25{,}6°$. En Cirkel gennem O med Radius 25,6 cm skærer Linierne henholdsvis i A, B og C.
   Find Trekant ABC 's Sider og Vinkler.

3. Medianerne AD og BE i Trekant ABC er Diametre i to Cirkler.
   Vis, at Højden fra C falder paa disse Cirklers Radikalakse.

Studentereksamen Januar 1912.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. Summen af Leddene i en Kvotientrække betegnes s, og Summen af Leddenes Kvadrater S. Vis, at s gaar op i S, naar Leddenes Antal er ulige. Vis, at i dette Tilfælde kan Kvotienten $S : s$ betragtes som Summen af Leddene i en ny Kvotientrække. Angiv dennes første Led, Kvotient og Leddenes Antal.

2. $\sqrt{7}$ udvikles i Kædebrøk. Værdien beregnes derefter ved Hjælp af Konvergenterne med en Nøjagtighed af $\frac{1}{10000}$.

3. Der er givet en ret Linie, et Punkt M paa Linien og et Punkt A udenfor den. Bestem paa Linien to Punkter X og Y saaledes, at $MX = MY$, og $\angle XAY$ faar en given Størrelse.

Studentereksamen Januar 1912.

Matematiske Opgaver

IV.

(Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Retninger.)

1. Man skal finde Korden til $\frac{1}{10}$ af en Cirkelperiferi udtrykt ved Cirklens Radius r, og vise, hvorledes den konstrueres.

2. Find Vinklerne i en 9-kant, naar de danner en Differensrække med Differensen 8°

3. Angiv Formen af den Kurve, ved hvilken Funktionen $y = 2x^2 - 3x$ fremstilles, naar x og y betegner retvinklede Koordinater.

Studentereksamen i Juni 1912.

Matematiske Opgaver

for den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Skæringslinien mellem en Plan og en Omdrejningskegleflade kan være en Ellipse.

2. Løs den trigonometriske Ligning

$$a \sin x \cos x + b \cos^2 x = c,$$

og angiv, hvilke Værdier a kan have, dersom $b < c$.
Eks. $a = b = c$.

3. Gennem en given Parabels Brændpunkt F trækkes en vilkaarlig ret Linie, der skærer Parablen i A og B; gennem B trækkes BM parallel med Parablens Akse, og gennem F Linien FM parallel med Parabeltangenten i A. Find det geometriske Sted for M.

Studentereksamen i Juni 1912.

Matematiske Opgaver

for den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Beregn Hypotenusen i en sfærisk retvinklet Trekant, hvis Kateter er $123{,}4^0$ og $43{,}2^0$.

2. Find det mindste indskrivelige Trapez, der kan omskrives om en Cirkel med given Radius r.

3. En Mand købte Aktier, nogle lydende paa 2000 Kr. til Kurs $93{,}6$ og nogle lydende paa 1000 Kr. til Kurs $97{,}2$; hvor mange fik han af hver Slags, naar han betalte dem med 13248 Kr. ialt?

Studentereksamen i Juni 1912.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

1. I en Cirkel er trukket Diametren AB og Tangenten i B. Gennem A er trukket en Sekant, der skærer Cirklen i C og Tangenten i D. Bestem denne Sekants Vinkel med Diametren saaledes, at Arealerne af de Flader, som Liniestykkerne AC og CD beskriver ved Drejning om AB, bliver ligestore.

2. Vis, at naar Summen af de første p Led i en Differensrække er Nul, saa vil Summen af de næste q Led være lig $\frac{a(p+q)q}{1-p}$, naar a er Rækkens første Led.

3. For hvilke hele, positive Værdier af x bliver $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3}$ et helt Tal?

Studentereksamen i Juni 1912.

Matematiske Opgaver

ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister
af de to sproglige Retninger.

1. Bevis, at Summen

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + (n^2 - n + 5) + \cdots + (n^2 + n - 1)$$

er lig med et Kubiktal.

2. Beregn Arealet af et Cirkelafsnit, hvis Bue er 45^0, naar Cirklens Radius er 2 cm.

3. Konstruer et Trapez, der kan omskrives om en Cirkel, af dennes Radius og de to modstaaende Sider, der ikke er parallele.

Studentereksamen Januar 1913.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Vis, at Grænseværdien af $\frac{\sin x}{x}$ for $x = 0$ er lig 1.

2. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punktet (a,b). Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af det Liniestykke, der afskæres mellem Koordinatakserne paa en vilkaarlig Linie gennem (a,b). Vis, at Kurven er en Hyperbel, hvis Asymptoter er parallele med Koordinatakserne og gaar gennem Punktet $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

3. Find alle de Værdier af x, som tilfredsstiller Ligningen $\cos x = \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2 x}$.

Studentereksamen Januar 1913.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Vis, at

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

   og angiv den Grænseværdi, hvortil Summen nærmer sig, naar n vokser uden Grænse.

2. Find det Areal, som ligger mellem Kurverne $y^2 = px$ og $x^2 + y^2 = 2py$.

3. I et tresidet Hjørne med Toppunktet O er hver af Siderne 60°. Paa den ene Kant afsættes $OA = a$. Gennem A lægges en Plan vinkelret paa OA, hvorved der dannes en Pyramide O - ABC. Gennem et Punkt D paa Kanten OB i Afstanden x fra O lægges et plant Snit parallelt med OA og BC. Vis, at Snittet bliver et Rektangel. Find dets Areal udtrykt ved a og x, og bestem derefter x saaledes, at Arealet bliver Maksimum.

Studentereksamen Januar 1913.

Matematiske Opgaver

for den matematisk - naturvidenskabelige Linie.

II B. (Særopgave)

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. Find x af Ligningen $\sin 3x = \cos 2x$

2. Konstruer en Rombe af en Vinkel og Forskellen mellem Diagonalerne.

3. Beregn Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+b & a+2b & a+3b \\ a+2b & a+3b & a+5b \end{vmatrix}$$

Studentereksamen i Januar 1913.

Matematiske Opgaver

ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister
af de to sproglige Retninger.

1. Paa en vandret Flade staar et Taarn. I Afstanden 28,5 m fra Taarnets Fod ses Taarnet under en Vinkel paa 51^0. Beregn Taarnets Højde.

2. Ligningen $x^2 - ax + b = 0$ har Rødderne α og β. Dan den Ligning, hvis Rødder er $\frac{\alpha}{\beta}$ og $\frac{\beta}{\alpha}$.

3. I en Cirkel er indskrevet en Firkant $ABCD$, hvor $AD = CD$. Diagonalerne skærer hinanden i E. Vis, at Trekanterne ABD og EAD er ensvinklede, og at $AE \cdot BD = AB \cdot AD$.

Studentereksamen i Juni 1913.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at en ret Linie, der staar vinkelret paa to hinanden skærende Linier i en Plan, er vinkelret paa en vilkaarlig tredje Linie i Planen.

2. Et Laan paa 25 000 Kr. til 4 pCt. p. a. skal tilbagebetales derved, at der aarligt i 40 Aar, første Gang 1 Aar efter Laanets Stiftelse, betales den samme Sum, som indbefatter baade Renter og Afdrag. Hvor stor maa denne Sum være? Hvor stor er Restgælden efter 25 Aars Forløb? Hvor meget af den Sum, der betales næste Aar, er Renter, og hvor meget Afdrag?

3. Paa en Parabels Akse ligger to Punkter lige langt fra Brændpunktet. Vis, at Differensen mellem disse Punkters Afstande fra en vilkaarlig Parabeltangent multipliceret med Brændpunktets Afstand fra samme Tangent er konstant.

Studentereksamen i Juni 1913.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Kurverne

$$x - y = 1,$$
$$y^2 - 2(x + y) + 6 = 0,$$
$$x^2 - 2(x + 2y) + 5 = 0.$$

Bestem Koordinaterne til deres Skæringspunkter, og angiv den geometriske Betydning af det fundne Resultat.

2. Bevis, at dersom x, y og z danner en Differensrække, saa danner ogsaa de tre Størrelser

$$y^2 + yx + x^2, \qquad x^2 + xz + z^2, \qquad z^2 + zy + y^2$$

en Differensrække.

3. Find Figuren af den Kurve, som bestemmes ved Ligningen

$$y = x^2 - x^3$$

i et retvinklet Koordinatsystem, og find Ligningerne for de Tangenter, der gaar igennem Begyndelsespunktet.

Studentereksamen i Juni 1913.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der *ikke* har læst Infinitesimalregning.)

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Kurverne

$$x - y = 1,$$
$$y^2 - 2(x + y) + 6 = 0,$$
$$x^2 - 2(x + 2y) + 5 = 0.$$

Bestem Koordinaterne til deres Skæringspunkter, og angiv den geometriske Betydning af det fundne Resultat.

2. Bevis, at dersom x, y og z danner en Differensrække, saa danner ogsaa de tre Størrelser

$$y^2 + yx + x^2, \quad x^2 + xz + z^2, \quad z^2 + zy + y^2$$

en Differensrække.

3. Et regulært Tetraeder staar paa den vandrette Billedplan, og en af dets Sidekanter er parallel med den lodrette Billedplan. Vis, hvorledes man finder begge Billeder af Tetraedret og af et vilkaarligt plant Snit vinkelret paa den nævnte Sidekant.

Studentereksamen i Juni 1913.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

1. I en Trekant er Siderne 3 paa hinanden følgende hele Tal, og den mindste Vinkel er halv saa stor som den største. Find Sider og Vinkler.

2. Bestem a saaledes, at for alle Værdier af x er Brøken

$$\frac{2(a-1)x^2 - 3(a+2)x + (a-3)}{2x^2 - 3x + 5} < a + 1.$$

3. To Kugler, som berører hinanden udvendigt, er omskrevet med en Kegleflade, hvis Toppunktsvinkel er $2v$. Find Radiernes Forhold.

Studentereksamen i Juni 1913.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Igennem Midtpunkterne af Siderne i en retvinklet Trekant tegnes en Cirkel. Vis, at Cirklen gaar gennem den rette Vinkels Toppunkt og gennem Fodpunktet af Højden paa Hypotenusen.

2. At finde 4 paa hinanden følgende hele Tal, naar Summen af deres Kvadrater er lig 3486.

3. I et Rektangel med Siderne 12,56 cm og 15,48 cm forbindes Sidernes Midtpunkter i Rækkefølge. Find Sider og Vinkler i den fremkomne Firkant.

Studentereksamen i Juni 1914.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Rækken af Primtal er ubegrænset.

2. Konstruer en Trekant ABC af $\angle A$, Siden AB og Forholdet $\frac{AC}{BC} = \frac{p}{q}$, idet p og q er givne Tal.

   Beregn Trekantens ubekendte Vinkler og Sider, Arealet og den omskrevne Cirkels Radius, naar

   $$\angle A = 27^{\circ},4\,; \quad AB = 53{,}14 \text{ mm}\,; \quad p = \sqrt{3},\ q = \sqrt{2}.$$

3. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Højderne i en Trekant, der har sin ene Vinkelspids i en given Parabels Toppunkt og de to andre i Endepunkterne af en vilkaarlig Korde gennem Brændpunktet.

Studentereksamen i Juni 1914.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Undersøg Figuren af den Kurve, der i et retvinklet Koordinatsystem er bestemt ved Ligningen

$$9\,(x^2 - y^2) = x^3,$$

saaledes at blandt andet Tangenterne i Begyndelsespunktet bestemmes.

Naar den Del af Kurven, der ligger i 1ste Kvadrant, drejes om X-aksen, beskriver den Overfladen af et Legeme. Find dette Legemes Rumfang og Beliggenheden af dets Tyngdepunkt, naar det antages at være homogent.

2. En regulær Ottekant drejes 180^0 om en Diagonal, der tillige er Diameter i den omskrevne Cirkel.

Find simple Udtryk for Rumfanget af det derved frembragte Legeme og for Overfladens Areal, naar Cirklens Radius er r.

3. Find Summen af de n første Led i Rækken

$$1;\ 11;\ 111;\ 1111;\ \ldots .$$

udtrykt ved det n'te Led a_n og n.

Studentereksamen i Juni 1914.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der *ikke* har læst Infinitesimalregning.)

1. Man skal bestemme Kurven

$$x^2 + 2xy - y^2 - x + y - 1 = 0,$$

idet x og y betegner retvinklede Koordinater, saaledes at man finder Centrets Koordinater samt Aksernes Længder og deres Vinkler med X-aksen.

2. En regulær Ottekant drejes 180^0 om en Diagonal, der tillige er Diameter i den omskrevne Cirkel.

   Find simple Udtryk for Rumfanget af det derved frembragte Legeme og for Overfladens Areal, naar Cirklens Radius er r.

3. Find Summen af de n første Led i Rækken

$$1;\ 11;\ 111;\ 1111;\ \ldots.$$

udtrykt ved det n'te Led a_n og n.

Studentereksamen i Juni 1914.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Dimittender af den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

1. En studerende laaner af et Studiefond 80 Kr. maanedlig i 5 paa hinanden følgende Aar, 1ste Gang d. 1. Aug. 1914. Han skal afgøre denne Gæld med Renter og Renters Renter ved i 20 paa hinanden følgende Halvaar, 1ste Gang d. 1. Juli 1929, at betale Fondet en bestemt Sum. Hvor stor maa denne Sum være, naar den halvaarlige Rentefod er 2,1 pCt.?

$$\log 1{,}021 = 0{,}009026.$$

2. En Kugle er indskrevet i en Omdrejningskeglestub, hvis Rumfang er n Gange saa stort som Kuglens. Find Vinklen mellem Forlængelserne af Keglestubbens Akse og Sidelinie. — Hvilke Værdier kan n have?

   Eks. $n = 3$; $n = 2{,}5$; $n = \sqrt{2}$.

3. Find Koordinaterne til Skæringspunktet mellem Linierne

$$(3a - 4)\,x + (a - 6)\,y = 5a - 8$$

og

$$(5a + 2)\,x + (2a + 3)\,y = 9a + 4,$$

hvor x og y betegner retvinklede Koordinater, og a en Konstant. Man skal bestemme de Værdier af a, for hvilke Opgaven er enten umulig eller ubestemt, og paavise, at Linierne for disse Værdier af a er enten parallele eller sammenfaldende.

Studentereksamen i Juni 1914.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Radius i en Trekants indskrevne Cirkel er $3\frac{1}{5}$ cm, og to af Trekantens Vinkler er henholdsvis $47{,}4^0$ og $72{,}6^0$. Beregn Trekantens Sider.

2. Det første Led i en Kvotientrække er -5, det sidste $0{,}04$, og Leddenes Sum er $-4{,}16$. Find Kvotienten og Leddenes Antal. — Hvor stor bliver Summen, naar Rækken fortsættes i det uendelige?

3. For hvilke Værdier af x bliver Brøken

$$y = \frac{6x^2 + 13{,}8x - 3}{2x^2 + 1}$$

positiv, 0 eller negativ? Find dens Grænseværdi, naar x vokser i det uendelige.

Studentereksamen i Januar 1915.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at den saakaldte harmoniske Række $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ er divergent.

2. Til en Parabel er tegnet Toppunktstangenten og to vilkaarlige Tangenter. Hver Tangents Røringspunkt forbindes med de to andre Tangenters Skæringspunkt. Bevis, at de tre Forbindelseslinier gaar gennem samme Punkt.

3. I en Trekant ABC kendes $\angle C$ og Forholdet n mellem Radius i Trekantens indskrevne Cirkel og Siden AB.

   Find Ligninger, hvoraf $\angle A$ og $\angle B$ kan beregnes.

   Find $\angle A$ og $\angle B$, naar $\angle C = 60^0$ og $n = \frac{1}{4}$.

Studentereksamen i Januar 1915.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. A laaner i 10 paa hinanden følgende Aar ved Slutningen af hvert Aar a Kr., gør ingen Gæld i de følgende 10 Aar, og afbetaler ved Slutningen af hvert af de næste 10 Aar b Kr. paa sin Gæld. Den aarlige Rentefod er r.

   B sætter i 10 paa hinanden følgende Aar ved Slutningen af hvert Aar a Kr. i Sparekassen, lægger intet op i de følgende 10 Aar og bruger ved Slutningen af hvert af de næste 10 Aar b Kr. af sin opsparede Kapital. Den aarlige Rentefod er r.

   Hvor stor er A's Gæld, og hvor stor er B's Formue umiddelbart efter de 30 Aars Forløb?

   Eks.: $a = 300$, $b = 100$, $r = 0{,}04$.

2. Konstruer en regulær Ottekant, hvis Areal er lig Arealet af et givet Kvadrat.

3. $$y = x^3 - 4x^2 + 5$$

   er Ligningen for en Kurve i et retvinklet Koordinatsystem. Beregn det Areal, der ligger mellem Kurven og Tangenten i Kurvens Skæringspunkt med Y-aksen.

Studentereksamen i Januar 1915.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

1. Find x af Ligningen $x^2 - 9x + 26 + i(7 - x) = 0$. De fundne Værdier skal være af Formen $a + ib$, hvor a og b er reelle Størrelser.

2. Find et fircifret Tal, der er deleligt med 174, naar det Tal, der skrives med de to første Cifre er 5 større end det Tal, der skrives med de to sidste Cifre.

3. $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel rører Siderne BC, CA og AB i henholdsvis M, P og Q.

   Bevis, at $\triangle APQ$'s indskrevne Cirkel har sit Centrum paa Periferien af $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel.

   Konstruer $\triangle ABC$, naar Centrerne i $\triangle APQ$'s, $\triangle BQM$'s og $\triangle CMP$'s indskrevne Cirkler er givne Punkter.

Studentereksamen i Januar 1915.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Tegn den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = 7 - 5x - 2x^2,$$

og angiv, for hvilke Værdier af x Polynomiet y er positivt, Nul eller negativt.

2. I en ligebenet Trekant er Grundlinien 4,6 cm og Toppunktsvinklen 46^0.

Find Sider og Vinkler i Trekanten, samt Radius i den indskrevne Cirkel.

3. Find x og y af Ligningerne

$$(a + 1)\,x - ay = a + 2$$
$$(3a - 1)\,x - 6y = 10.$$

For hvilke Værdier af a har x og y ingen eller uendelig mange Værdier?

Studentereksamen i Juni 1915.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at det geometriske Sted for Midtpunkterne af parallele Korder i en Ellipse er en ret Linie gennem Centrum.

2. Polynomiet
$$y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$
skal opløses i Faktorer af 1ste Grad; dernæst skal a bestemmes saaledes, at
$$z = x^3 - 2x^2 + 5x - a$$
faar en 1ste Grads Faktor fælles med y, og for hver af de fundne Værdier af a skal z opløses i Faktorer af 1ste Grad.

3. Et tagformet Legeme har en kvadratisk Grundflade med Siden 20 cm. Det ene Par modstaaende Sideflader er ligebenede Trekanter med Kvadratsiden til Grundlinie; de to andre Sideflader er ligebenede Trapezer med Vinklerne ved Kvadratsiden lig 60°. Tagets Kant er 6 cm. Find de fire Sidefladers Vinkler med Grundfladen.

Studentereksamen i Juni 1915.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. I Trekant ABC er givet Vinkel B, Højden h_a og Forholdet $OA : r$, hvor O er Centrum i Trekantens indskrevne Cirkel, og r dens Radius. Konstruer Trekanten.

2. Bestem de Punkter, som Kurven
$$y = \sin^2 x \cos x$$
har fælles med x-Aksen paa Stykket fra $(0, 0)$ til $(2\pi, 0)$.
Hvilke Vinkler danner x-Aksen med Kurvetangenterne i de fundne Punkter?
Bestem Maksimum og Minimum af y for Værdier af x mellem 0 og 2π.
Beregn Arealet af en af de Figurer, som begrænses af Kurven og x-Aksen.

3. A og B ejer hver Halvdelen af en Annuitet paa 1000 Kr. aarlig løbende i 30 Aar — Renten beregnet efter 4 pCt. p. a.
De enes om, at A skal have de første Udbetalinger, medens B venter, til A har faaet hele sin Del.
Hvormange Udbetalinger paa 1000 Kr. faar A?

Studentereksamen i Juni 1915.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der *ikke* har læst Infinitesimalregning.)

1. I Trekant ABC er givet Vinkel B, Højden h_a og Forholdet $OA : r$, hvor O er Centrum i Trekantens indskrevne Cirkel, og r dens Radius. Konstruer Trekanten.

2. En Tærning staar paa vandret Billedplan med en Diagonal parallel med lodret Billedplan. Tegn Skæringslinien mellem Tærningens Overflade og en Plan vinkelret paa Midten af denne Diagonal.

3. A og B ejer hver Halvdelen af en Annuitet paa 1000 Kr. aarlig, løbende i 30 Aar. — Renten beregnet efter 4 pCt. p. a.

   De enes om, at A skal have de første Udbetalinger, medens B venter, til A har faaet hele sin Del.

   Hvormange Udbetalinger paa 1000 Kr. faar A?

Studentereksamen i Juni 1915.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

III.

1. Vis, at naar Medianen m_c i Trekant ABC deler Vinkel C i to Stykker x og y, saa er

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

og benyt denne Ligning til at finde x og y, naar Trekantens Vinkler er givne. Specielt $C = 90^0$.

2. En Omdrejningskegle deles ved plane Snit parallele med Grundfladen i 8 Dele med ligestore Rumfang. Find de Stykker, hvori Snittene deler Højden h, udtrykt ved denne.

3. Gennem Brændpunktet af en Parabel tegnes en Korde. Vis, at dens Endepunkters Projektioner paa Symmetriaksen er harmonisk forbundne med Brændpunktet og Aksens Skæringspunkt med Ledelinien.

Studentereksamen i Juni 1915.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Reducer

$$y = \left(\frac{5x+1}{x^2-4x+3} - \frac{4x-2}{x^2-5x+6}\right) \cdot \frac{x-3}{x-4}$$

og beregn Værdien for $x = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

2. I en Cirkel er Korden til 100^0 lig 5,6 cm. Find Radius og Kordens Afstand fra Centrum.

3. I en retvinklet Trekant er den ene Vinkel 30^0. Over Kateterne som Diametre tegnes Halvcirkler ind i Trekanten. Vis, at Cirklernes andet Skæringspunkt ligger paa Hypotenusen, og beregn det for de to Cirkler fælles Areal, naar den mindste Katete er a.

Studentereksamen i Januar 1916.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. En Kapital k vil med Rente og Rentes Rente i n Terminer vokse til en Størrelse k_n, bestemt ved Formlen $k_n = k(1 + r)^n$, hvor r betyder Rentefoden pr. Termin. Bevis denne Formel for hele og brudne positive Værdier af n.

2. Normalen i et Punkt P af en Parabel skærer Parablens Akse i Q. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af PQ, naar P gennemløber Parablen.

3. Til en Sportskamp skal der udtages et Hold paa 8 Deltagere fra 4 Klasser i en Skole, saaledes at der tages 2 Elever fra hver Klasse. Paa hvor mange forskellige Maader kan Holdet udtages, naar de 4 Klasser har henholdsvis 14, 11, 12 og 15 Elever?

Studentereksamen i Januar 1916.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

(For Dimittender, som har læst Infinitesimalregning.)

1. Find de to Arealer, hvori Parablen $y^2 = 3x$ deler Cirklen $x^2 + y^2 = 4$.

2. Løs Ligningerne

$$x^2 + y^2 + 3xy - 7x - 6y + 8 = 0$$
$$x^2 - y^2 - xy + x + 4y - 4 = 0.$$

3. En Stjerne ses i Syd i Højden $34^0\ 17'$. Samtidig ses en anden Stjerne i Vest i Højden $41^0\ 32'$. Find disse Stjerners sfæriske Afstand.

Studentereksamen i Januar 1916.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Tegn i et retvinklet Koordinatsystem 4 Punkter A, B, C og D, hvis Koordinater er henholdsvis (1, 1), (2, 4), (6, 1) og (3, —2), og find Arealet af Firkant $ABCD$.

2. Løs Ligningerne

$$x + 2y = 3$$
$$3x^2 - 4y^2 + xy - x + 2y - 11 = 0.$$

3. Fra to Punkter A og B paa en Kyst ses et Skib S. Afstanden fra A til B er 200 m, $\angle ABS$ er 42^0 og $\angle BAS$ er 52^0. Find Afstandene fra A og B til S.

Studentereksamen i Maj—Juni 1916.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Arealet af en Trekants Projektion paa en plan Flade er lig med Trekantens Areal Gange cosinus til de to Planers Toplansvinkel.

2. Vis, at Ligningen

$$x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25 = 0$$

har 2 Dobbeltrødder, og find disse.

3. Find det geometriske Sted for Centret i den omskrevne Cirkel til en Trekant, hvis Sider er Asymptoterne og en vilkaarlig Tangent til en given Hyperbel.

Studentereksamen i Maj—Juni 1916.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Der er givet et Punkt af en Ellipse samt dens ene Brændpunkt og tilsvarende Ledelinie. Konstruer Ellipsens Centrum.

2. En Kugle er indskrevet i en 6-sidet Pyramidestub, der har regulære Endeflader og kongruente Sideflader, og hvis Rumfang er n Gange Kuglens. Beregn Sidefladernes Vinkler med den største Endeflade, naar $n = \frac{7\sqrt{3}}{\pi}$.

3. Find Arealet af den plane Figur, der er begrænset af X-aksen, Linien $x = a$ og Kurven
$$y = \frac{x}{(1 + x^2)^2}.$$
Specielt $a = \infty$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1916.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der *ikke* har læst Infinitesimalregning.)

1. Der er givet et Punkt af en Ellipse samt dens ene Brændpunkt og tilsvarende Ledelinie. Konstruer Ellipsens Centrum.

2. En Kugle er indskrevet i en 6-sidet Pyramidestub, der har regulære Endeflader og kongruente Sideflader, og hvis Rumfang er n Gange Kuglens. Beregn Sidefladernes Vinkler med den største Endeflade, naar $n = \frac{7\sqrt{3}}{\pi}$.

3. Find Grænseværdien af den uendelige Kædebrøk, hvis ufuldstændige Kvotienter er

$$1,\ a,\ a,\ \cdots$$

Bevis, at

$$y_n = z_{n-1} + z_n,$$

naar $\frac{y_n}{z_n}$ betegner den $(n+1)$'te Konvergent.

Studentereksamen i Maj—Juni 1916.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Beregn Arealet af et Afsnit paa 80^0 i en Cirkel med Radius 3,5 cm.

2. I en Sparekasse, der giver 4 pCt. p. a., indskyder A hver 1ste Juli i Aarene 1913—16 (begge medregnet) 400 Kr. Hvor stor en Sum har A staaende i Sparekassen den 1ste Juli 1920?

3. Konstruer en Trekant ABC af $\angle A$, Højden paa Siden AC og Radius i dens indskrevne Cirkel.

Studentereksamen i Januar 1917.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Dersom et helt Polynomium af n^{te} Grad i x bliver Nul for $x = a$, gaar $x - a$ op i Polynomiet. Bevis denne Sætning og den omvendte.

2. I et Trapez er de parallele Sider 1,234 cm og 3,702 cm; de andre Sider er 2,468 cm og 2,564 cm. Find Trapezets Vinkler og Diagonaler.

3. I et Rektangel $ABCD$ er $AB = a$ og $BC = b$. Paa AB flytter Punkterne M og P sig saaledes, at $AP^2 + BM^2 = AB^2$. Find Stedet for Skæringspunktet mellem Linierne DM og CP.

Studentereksamen i Januar 1917.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

(For Dimittender, som har læst Infinitesimalregning.)

1. Løs Ligningen
$$2\cos^2 x + \sin x \cos x = m,$$
og angiv Grænserne for m.

2. En Omdrejningskeglefladc med Toppunktsvinkel 60^0 skæres af en Plan i en Ellipse. Planen skærer Kegleﬂadens Akse i Afstanden 8 cm fra Toppunktet og danner en Vinkel paa 60^0 med Aksen. Find Ellipsens Akser og Ekscentricitet.

3. Find Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven $y = x + x \sin x$, dens Tangent i Begyndelsespunktet og Linien $x = \frac{\pi}{2}$.

Studentereksamen Juni 1917.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at den harmoniske Række

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

er divergent.

2. En vilkaarlig Normal til Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

skærer Koordinatakserne i M og N. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af MN.

3. I Trekant ABC er A_1, B_1, C_1 Punkter paa henholdsvis BC, CA, AB, beliggende saaledes, at

$$BC_1 = CB_1 = 2{,}34$$
$$CA_1 = AC_1 = 4{,}56$$
$$AB_1 = BA_1 = 3{,}12.$$

Beregn Arealet af Trekant $A_1B_1C_1$.

Studentereksamen Juni 1917.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, som har læst Infinitesimalregning.)

1. Find de reelle Værdier af x, der tilfredsstiller Ulighederne

$$\frac{1}{2} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 1.$$

2. I et Trapez er de modstaaende Sider, der ikke er parallele, begge lig med a, og den ene af de parallele Sider er $2ma$; bestem den anden saaledes, at Trapezet faar det størst mulige Areal.

3. Bevis, at Summen af Kvadraterne paa Diagonalerne i et Parallelepipedum er lig med Summen af Kvadraterne paa alle Kanterne.

Studentereksamen Juni 1917.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, som *ikke* har læst Infinitesimalregning.)

1. Find de reelle Værdier af x, der tilfredsstiller Ulighederne

$$\frac{1}{2} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 1.$$

2. Find x, y og z af Ligningerne

$$\begin{aligned} ax - y + 3z &= 4 \\ 4x + (a - 4)y + 6z &= a + 6 \\ x - ay + 5z &= 7 \end{aligned}$$

og angiv de Værdier af a, for hvilke Opgaven er enten ubestemt eller umulig.

3. Bevis, at Summen af Kvadraterne paa Diagonalerne i et Parallelepipedum er lig med Summen af Kvadraterne paa alle Kanterne.

Studentereksamen i September 1917. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Vis, at Afstanden fra en ret Linie til et Punkt (x, y) i et retvinklet Koordinatsystem er lig $x \cos \alpha + y \sin \alpha + p$, naar p er Afstanden fra Linien til Begyndelsespunktet og α Vinklen fra X-Aksen til Liniens Normal.

2. Find Sider og Vinkler i en Trekant, naar det er givet, at Radius i den indskrevne Cirkel er r, og at Siderne danner en Differensrække med Differensen d.
   Eks. $r = d = 1$.

3. Paa Hypotenusen BC af en retvinklet Trekant ABC oprejses en vinkelret i Punktet D, skærende AB i E og AC's Forlængelse i F.
   1) Vis, at $DE \cdot DF = DB \cdot DC$.
   2) Konstruer den vinkelrette, naar $DE \cdot DF = k^2$, hvor k er en given Længde.
   3) Konstruer den vinkelrette, naar Trekanterne BDE og AFE skal have samme Areal.

Studentereksamen i September 1917. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. $ABCD$ er et Kvadrat med Centrum O. Til samme Side af dets Plan oprejses i A og C de vinkelrette paa Planet, AA_1 lig den halve Diagonal i Kvadratet og CC_1 tre Gange saa stor som AA_1.

   1) Vis, at BD og Planet gennem AA_1 og CC_1 staar vinkelret paa hinanden.

   2) Vis, at A_1C_1 er vinkelret paa A_1O og paa Planet A_1BD.

   3) Find Voluminerne af Pyramiderne DAA_1O, DAA_1C_1C og C_1A_1BD udtrykt ved Kvadratsiden a.

2. I en retvinklet Trekant ABC ligger Hypotenusen AB fast, medens C bevæger sig. Hypotenusens Midtnormal skærer Linien AC i M, og Linien gennem M parallel med Hypotenusen skærer BC i P. Find det geometriske Sted for P.

3. Angiv Udseendet af Kurven $y = \frac{x^3}{x-1}$. Særlig bestemmes de Tangenter, som er parallele med Koordinatakserne. Dan Ligningen for Tangenten i det Kurvepunkt, hvis Abscisse er $\frac{1}{2}$.

Studentereksamen i Maj 1918.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I. A.

(For Dimittender, som har læst Infinitesimalregning.)

1. Bevis, at Differentialkvotienten (den afledede Funktion) af x^n med Hensyn til x er nx^{n-1}, hvad enten n er hel eller brudden, positiv eller negativ.

2. Find alle de Værdier af x, som tilfredsstiller Ligningen

$$4 \cos x + 3 \sin x = 2.$$

3. Find Arealet af den Figur, som begrænses af X-aksen og det Stykke af Kurven

$$y = x \sin 2x,$$

der ligger mellem Begyndelsespunktet og det Punkt, hvori Kurven første Gang skærer den positive X-akse.

Studentereksamen i Maj 1918.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I B.

(For Dimittender, som ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. Bevis, at Rumfanget af en Pyramidestub er

$$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{Gg} + g),$$

idet h er Stubbens Højde, og G og g er Endefladernes Arealer.

2. Find alle de Værdier af x, som tilfredsstiller Ligningen

$$4 \cos x + 3 \sin x = 2.$$

3. En regelmæssig 6-sidet Pyramide staar paa den vandrette Billedplan saaledes, at en Sidekant er parallel med den lodrette Billedplan.

Tegn lodret og vandret Billede af et plant Snit vinkelret paa Midten af denne Kant.

Studentereksamen i Maj 1918.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + y^2 + 3xy - 5x - 2y - 2 = 0$$
$$x^2 + 2y^2 + 4xy - 7x - 8y + 6 = 0.$$

2. P er et vilkaarligt Punkt paa en given Parabel, A dets Projektion paa Ledelinien, og B Skæringspunktet mellem Parablens Akse og Normalen i P. Find det geometriske Sted for AB's Midtpunkt og angiv, hvorledes det fundne geometriske Sted ligger i Forhold til Parablen.

3. En Ternings øverste Sideflade er Grundflade i en regulær Pyramide, hvis Toppunkt ligger udenfor Terningen, og hvis Sideflader danner Vinkler paa 60^0 med Grundfladen.

   Det Legeme, der er sammensat af Terningen og Pyramiden, deles i 2 Dele af et plant Snit gennem Pyramidens Toppunkt og en Kant i Terningens nederste Sideflade. Find Forholdet mellem de 2 Deles Rumfang.

Studentereksamen i Maj 1918.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Retninger.

---

1. Find x af Ligningen

$$\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=\frac{4}{5}.$$

2. Man skal bestemme Figuren af Kurven

$$5y = x^2 - 4x - 11,$$

saaledes at man blandt andet finder dens Skæringspunkter med begge Akserne og det Punkt, der har den mindste Ordinat.

3. To af Vinklerne i en Trekant er $80^{0},4$ og $38^{0},6$, og den omskrevne Cirkels Radius er 0,456 cm. Beregn Siderne.

Studentereksamen i Maj—Juli 1919.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at Tangenten og Normalen til en Hyperbel i et vilkaarligt Punkt halverer Vinklerne mellem Brændstraalerne til Punktet.

2. Find x af Ligningen
$$a \cos^2 x + 1 = 2 \sin 2x,$$
og bestem Grænserne for a.
Eks. 1) $a = 0$, 2) $a = -6$.

3. Tangenten og Normalen til en Parabel i et vilkaarligt Punkt skærer henholdsvis Toppunktstangenten og Symmetriaksen i M og N. Find det geometriske Sted for Midpunktet af MN.

Studentereksamen i Maj—Juli 1919.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. I en Trekant med Siderne a, b og c er

$$c = 3a \text{ og } r_a = s - b,$$

idet r_a betegner Radius i den af Trekantens udvendige Røringscirkler, der rører Siden a og de to andre Siders Forlængelser, og s betegner Trekantens halve Perimeter.

Find Trekantens Vinkler.

2. I en Pyramide, hvor Grundfladen er en ligesidet Trekant, og hvor hver Sidekant er dobbelt saa stor som Siden i Grundfladen, lægges gennem en Side i Grundfladen et plant Snit vinkelret paa den modstaaende Sidekant.

Find Forholdet mellem Rumfangene af de 2 Dele, hvori Pyramiden derved deles.

3. Bestem Udseendet af Kurven

$$y^2 = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

og find det af Kurven, Abscisseaksen og Linien $x = 1$ begrænsede Areal.

Studentereksamen i Maj—Juli 1919.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II B.

(For Dimittender, der ikke har læst Infinitesimalregning.)

1. I en Trekant med Siderne a, b og c er

$$c = 3a \text{ og } r_a = s - b,$$

idet r_a betegner Radius i den af Trekantens udvendige Røringscirkler, der rører Siden a og de to andre Siders Forlængelser, og s betegner Trekantens halve Perimeter.

Find Trekantens Vinkler.

2. I en Pyramide, hvor Grundfladen er en ligesidet Trekant, og hvor hver Sidekant er dobbelt saa stor som Siden i Grundfladen, lægges gennem en Side i Grundfladen et plant Snit vinkelret paa den modstaaende Sidekant.

Find Forholdet mellem Rumfangene af de 2 Dele, hvori Pyramiden derved deles.

3. Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen

$$5x^2 + 5y^2 - 26xy + 42x + 6y + 45 = 0,$$

og hvorledes ligger den i Koordinatsystemet?

Studentereksamen i Maj—Juli 1919.

Matematiske Opgaver.

Ved den anordnede Modenhedsprøve for Privatister af de to sproglige Linier.

1. Paa en Sparekassebog indsætter A $^1/_7$ 1910 500 Kr. og $^1/_7$ 1914 800 Kr.; $^1/_7$ 1917 hæver han 200 Kr. og $^1/_7$ 1918 300 Kr. Hvor stor en Sum har han staaende paa sin Bog $^1/_7$ 1919, naar Sparekassen forrenter Indskud med 4 % p. a.?

2. Hvor stort er Arealet af en regulær Tolvkant, der kan indskrives i en Cirkel med Radius 2 cm?

3. Beregn Sider og Vinkler i den Trekant, hvis Vinkelspidser i et retvinklet Koordinatsystem har Koordinaterne (2, 4), (— 4, 1) og (2, — 6).

Studentereksamen i September 1919.

Matematiske Opgaver.

II.

1. En Pyramides Grundflade er en regulær 6-kant med Siden a, og hver Sidekant er $3a$ Find Radierne i Pyramidens indskrevne og omskrevne Kugle.

2. Bestem Værdien af a i Ligningen

$$3ax^3 - 3x^2 + ax - 14 = 0$$

saaledes, at Summen af Køddernes Kvadrater er lig med Summen af Røddernes Produkter to og to. Indsæt derefter a, og løs Ligningen.

3. Bestem Udseendet af Kurven

$$x^3 = a^2(x - y),$$

og find Arealet af den Figur, der begrænses af X-aksen og Kurven.

Studentereksamen i Maj—Juli 1920.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Find x og y af Ligningerne

$$y^2 - xy - 3x + 2y - 3 = 0$$
$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y^2 - 25x + 50 = 0.$$

2. I $\triangle ABC$ er $\angle A = 29^\circ 30'$, den modstaaende Side $a = 0{,}8$ dm og den indskrevne Cirkels Radius $r = 0{,}24$ dm. Beregn Trekantens ubekendte Vinkler og Sider samt Arealet.

3. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punkterne $A\,(a, 0)$ og $B\,(0, a)$. Punkterne P og Q bevæger sig saaledes paa henholdsvis X-aksen og Y-aksen, at $AP \cdot BQ = 2a^2$. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem BP og AQ.

Studentereksamen i Maj—Juli 1920.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Bevis, at

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)$$
$$= n(n + 2)(2n^2 + 4n - 1).$$

2. Der er givet Kurverne $y = \sin x$ og $y = \cos x$. Find en saadan Værdi af x, beliggende mellem 0 og π, at de Tangenter, hvis Røringspunkter har denne Abscisse, er parallele. Find dernæst Arealet af en af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurverne og Forbindelseslinien mellem de to Røringspunkter.

3. I en Pyramide med Højden h er indskrevet et Prisme, saaledes at Prismets ene Endeflade har sine Vinkelspidser paa Pyramidens Kanter, og den anden Endeflade ligger i Pyramidens Grundflade. Find Prismets Højde, naar dets Rumfang er saa stort som muligt.

Studentereksamen i Maj—Juli 1920.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven.)

1. I en Kvotientrække med tre Led er Summen af Leddene 26, og Summen af Produkterne af Leddene to og to er 156. Find de tre Led.

2. Bestem Udseendet af den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = 6 + x - x^2.$$

3. I Firkant $ABCD$ er $AB = BC = CD = 2$ cm, $AC = 1$ cm og $\angle ACD = 90^0$. Beregn Firkantens Vinkler, Siden AD og Diagonalen BD.

Studentereksamen i September 1920.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Vis, at

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Find dernæst Summerne af følgende Rækker:

I. $1(a-1) + 2(a-2) + 3(a-3) + \cdots + n(a-n)$.

II. $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + n \cdot 1$.

2. I $\triangle ABC$ er $AB = 3{,}8$ cm, $\angle B = 31^0{,}8$ og Medianen til Siden BC 4,5 cm.

Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler.

3. Idet x og y betegner hele Tal, som tilfredsstiller Ligningen

$$5x + 13y = 192,$$

skal man vise, at $x^2 - y^2 + 256$ er et Kvadrattal.

Find dernæst de positive hele Værdier af x og y, som tilfredsstiller den givne Ligning.

Studentereksamen i September 1920.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Bestem Udseendet af den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 4x^2.$$

Find dernæst Arealerne af de lukkede Figurer, som dannes af Kurven og X-aksen.

2. En Kugle er indskrevet i en Omdrejningskegle, hvis hele Overflade er dobbelt saa stor som Kuglens Overflade.
Find Keglens Toppunktsvinkel.

3. I et retvinklet Koordinatsystem, hvis Begyndelsespunkt er O, er givet Punktet $A\,(2, 0)$ og den Linie, hvis Ligning er $x + y = 4$.
Bestem Ligningerne for de Cirkler, som gaar gennem O og A og rører den givne Linie.

Studentereksamen i Maj—Juni 1921.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Idet

$$y = \frac{3 + 5x - 2x^2}{5 - x + 6x^2},$$

hvor x er reel, skal man finde Grænserne for x, naar y skal være positiv.

Find desuden den største og mindste Værdi, som y kan faa.

2. I en Trekant ABC er givet $\angle A = 120^\circ$, den modstaaende Side $a = 12$ cm og Højden paa denne Side $h = 3$ cm. Beregn de ubekendte Sider og Vinkler.

3. Find Ekscentriciteten i et Keglesnit, der er Skæringslinien mellem en Omdrejningskegleflade med Toppunktsvinklen α og en Plan vinkelret paa en Frembringer.

Studentereksamen i Maj—Juni 1921.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II A.

(For Dimittender, der har læst Infinitesimalregning.)

1. Find Ligningerne for Fællestangenterne til Cirklerne

$$x^2 + y^2 = 81 \text{ og } x^2 + y^2 = 10x.$$

2. Bestem Udseendet af Kurven

$$y = \sin^2 x \cos^2 x,$$

og beregn Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven og X-aksen mellem Begyndelsespunktet og Punktet $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

3. Hjørnespidserne i et Tetraeder er A, B, C og D; Kanten AD er vinkelret paa Sidefladen ABC, og A's Projektion paa Sidefladen DBC er E. Bevis, at Arealet af $\triangle ABC$ er Mellemproportionalen mellem Arealerne af $\triangle DBC$ og $\triangle EBC$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1922.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Idet x og y betegner retvinklede Koordinater, skal man vise, at Ligningen

$$x^2 + 16y^2 - 8xy - x + 4y - 72 = 0$$

fremstiller to rette Linier.

Find dernæst x og y af Ligningerne

$$x^2 + 16y^2 - 8xy - x + 4y - 72 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0.$$

2. I en regulær (regelmæssig) sekssidet Pyramide er Kanten i Grundfladen 24 cm og Pyramidens Højde 18 cm.

Beregn

a) Radius til Pyramidens omskrevne Kugle,

b) Toplansvinklen mellem to sammenstødende Sideflader.

3. M er et vilkaarligt Punkt paa en Ellipse med Centrum O. P er Punktets Projektion paa Storaksen, og B er et af Lilleaksens Endepunkter.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem OM og BP, idet Ellipsens Ligning er $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$.

Angiv, hvad det er for en Kurve, og i hvilke Punkter den skærer Ellipsens Akser.

Studentereksamen i Maj—Juni 1922.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Vis, hvorledes man kan konstruere en Trekant ABC af $\angle A$, Siden AB og Medianen m_c til Siden AB, og angiv, hvor mange Løsninger man kan faa.

   Beregn dernæst de manglende Sider og Vinkler i Trekant ABC, naar $AB = 8$ cm, $\angle A = 30^0$ og $m_c = 2$ cm.

2. Bestem a og b saaledes, at Ligningen

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

   faar Dobbeltroden 1.

   Indsæt de fundne Værdier i Ligningen og løs dernæst denne fuldstændigt.

3. Tegn den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 1,$$

   og find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og Linien $y + 1 = 0$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1922.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven.)

---

1. Find x og y af Ligningerne

$$x + y + xy = 17$$
$$x^2 + y^2 + xy = 39.$$

2. I en Differensrække paa 5 Led er Summen 55, og Summen af de Tal, der dannes, naar første Led multipliceres med 1, andet med 2, tredie med 3, fjerde med 4 og femte med 5, er 175.

   Find Leddene.

3. I Trapezet $ABCD$ er de parallele Sider AB og CD henholdsvis 50 cm og 70 cm og Siderne BC og AD henholdsvis 21 cm og 29 cm.

   Vis, at to af Trapezets Vinkler er rette, og find de to andre Vinkler i Trapezet.

Studentereksamen i September 1922.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven.)

---

1. Hvor stor en Sum skal man indsætte i en Sparekasse for 5 Aar efter at kunne hæve 2000 Kr. og 3 Aar derefter yderligere 3000 Kr.?

   Der tilskrives Renter en Gang aarlig, første Gang et Aar efter, at Summen er indsat.

   Rentefoden er 4 pCt. p. a.

2. I en retvinklet Trekant er Hypotenusen 25 cm, og Højden paa denne 6,72 cm.

   Find Kateterne og Trekantens Vinkler.

3. Vis, at de tre Linier, hvis Ligninger er

   $$7x + y = 21, \quad 7x + 4y = 42 \quad \text{og} \quad 3x - 2y = -8,$$

   skærer hverandre i samme Punkt, og find Arealet af den Trekant, som dannes af de to første af Linierne og Abscisseaksen.

Studentereksamen i Maj—Juni 1923.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Ligningerne

$$x^4 - 10x^3 + 46x^2 - 90x + 125 = 0$$

og

$$x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 65 = 0$$

har to Rødder fælles. Find disse og løs derefter Ligningerne fuldstændigt.

2. En Linie, der bevæger sig parallel med Abscisseaksen, skærer Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i Punkterne C og D.

Gennem C og Punktet $(0, 0)$ trækkes en ret Linie; gennem D og Punktet $(a\sqrt{3}, 0)$ trækkes en anden ret Linie.

Find Ligningen for det geometriske Sted for disse Liniers Skæringspunkt og gør Rede for, hvilken Kurve den fundne Ligning fremstiller, og hvorledes den ligger i Koordinatsystemet.

3. Tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

Find de Punkter, som denne Kurve har fælles med Cirklen $x^2 + y^2 - 3y = 4$, og angiv den geometriske Betydning af Resultatet.

Studentereksamen i Maj—Juni 1923.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I en indskrivelig Firkant $ABCD$ er Siden $AB = BC = 6{,}543$ cm, Siden $AD = 3{,}456$ cm og Vinkel $B = 80^0$.
   Find den manglende Side, Vinklerne og Diagonalerne.

2. I en given Kugle er indskrevet en ret cirkulær Kegle.
   Bestem Keglens Toppunktsvinkel saaledes, at Keglens krumme Overflade bliver saa stor som mulig.
   Vis dernæst, at Keglens Volumen samtidig bliver Maksimum.

3. At indskrive et Trapez i en given Cirkel, saaledes at Diagonalernes Skæringspunkt falder i et givet Punkt, og Diagonalen har en given Længde.
   Angiv Grænserne for Diagonalens Længde, naar Cirklens Radius er r, og Punktets Afstand fra Centrum er a.

Studentereksamen i September 1923.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Find Røringspunkterne og Ligningerne for de Tangenter, der er parallele med Linien $4y + 9x = 0$, og vis, at den ene af disse Tangenter gaar gennem Minimumspunktet, den anden gennem Maksimumspunktet.

2. Paa hvor mange Maader kan 12 forskellige Kugler fordeles i 3 Skaale saaledes, at der i den ene Skaal kommer 3, i den anden 4 og i den tredje 5 Kugler?

Bevis endvidere, at naar $x + y + z = n$, er

$$K_{n,x} \cdot K_{n-x,y} = K_{n,y} \cdot K_{n-y,z} = K_{n,z} \cdot K_{n-z,x}.$$

3. En retvinklet, ligebenet Trekant ABC ($\angle C = 90^0$) er beliggende saaledes, at C ligger i en given Plan α, medens A og B, der ligger paa samme Side af α, henholdsvis har Afstanden 2 cm og 6 cm fra α. Afstanden mellem A's og B's Projektioner paa α er 12 cm. Find de Vinkler, som Linierne AB, BC og AC samt Planen ABC danner med α.

Studentereksamen i September 1923.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. En Mand laaner hver 1. Juli i 10 paa hinanden følgende Aar 1000 Kr. i en Bank Denne Gæld forrentes og afbetales ved en Række aarlige Udbetalinger, hvoraf den første erlægges 3 Aar efter det sidste Laan. Disse Udbetalinger er alle paa 2000 Kr. undtagen den sidste, der er mindre. Hvor mange Udbetalinger er nodvendige, og hvor stor er den sidste? Renten er 6 pCt. p. a.

2. Find x af Ligningen: $\cos 3x - \sin 3x = \sin x - 2 \cos x$.

3. En Parabel har Ligningen $y^2 = px$. Paa Parablens Akse er afsat Punkterne $A\ (p, 0)$ og $B\ (-p, 0)$, medens P betegner et vilkaarligt Punkt paa Parablen. PB skærer Toppunktstangenten i C. Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem en Linie gennem C parallel med Parablens Akse og Linien AP. Vis, at Stedet bliver en Ellipse med A som Centrum.

Studentereksamen i Maj—Juni 1924.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. I Ligningen $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ er Forskellen mellem to af Rødderne $4i$, hvor $i = \sqrt{-1}$, og Produktet af de to andre Rødder er 1. Find Rødderne samt a og b.

2. I en Omdrejningskegle er indskrevet en Kugle, der rører Grundfladen i A. I Kuglen er indskrevet en anden Omdrejningskegle, som har Toppunkt i A, og hvis Grundflades Omkreds er den Cirkel, hvori Kuglen rører den første Kegle. Find Keglernes Toppunktsvinkler, naar den omskrevne Kegles Volumen er $6\frac{3}{4}$ Gange den indskrevnes.

3. Bevis, at i en retvinklet Trekant er Summen af Kvadraterne paa Kateternes Medianer 5 Gange Kvadratet paa Hypotenusens Median; konstruer Trekanten, naar Katetemedianerne har givne Længder.

Studentereksamen i Maj—Juni 1924.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Beregn Vinklerne i en Trekant ABC, i hvilken Vinklen mellem c og m_b er $65^0{,}75$ og $c : b = 0{,}4$.

2. M er et vilkaarligt Punkt paa en Parabel med Toppunkt O. Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem OM og den vinkelrette fra Brændpunktet paa Tangenten i M. Angiv Kurvens Art og Beliggenhed.

3. Afbild Funktionen
$$y = \sin x + \cos x + 1,$$
idet x varierer fra 0 til 2π.
Find Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven og begge Koordinatakserne, samt Volumen af det Legeme, der fremkommer, ved at nævnte Figur drejes en hel Omdrejning om X-aksen.

Studentereksamen i Maj—Juni 1924.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven).

---

1. I et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunktet O skal tegnes den rette Linie, hvis Ligning er $3x + 5y = 15$. Idet Skæringspunkterne mellem denne Linie og Akserne betegnes med A og B, skal man finde Trekant AOB's Sider, Vinkler og Areal.

2. Ligningen $x^2 - 4x - 8 = 0$ har Rødderne α og β.
   Bestem Værdien af Størrelsen
$$\frac{2\alpha - 3}{\beta} + \frac{2\beta - 3}{\alpha}.$$

3. I en Differensrække er det tredie Led 12 og det syvende Led 32. Find Summen af de første 20 Led af Rækken.

Studentereksamen i Maj—Juni 1925.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Tegn Kurverne
$$y = -x^2 + 5x$$
og
$$y = x^2 - 7x + 10.$$
Find Arealet af den lukkede Figur, de begrænser.

2. Konstruer en Trekant af en Vinkels Halveringslinie og de to Stykker, hvori denne deler den modstaaende Side.
Beregn Trekantens Sider og Vinkler, naar Halveringslinien har Længden 3, og de to Stykker har Længderne 8 og 2.

3. Der er givet Parablen $y^2 = 4x$. Find Ligningerne for de Tangenter, hvis Afstand fra Parablens Toppunkt er $\frac{3}{2}$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1925.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Løs Ligningen
$$2 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = n,$$
hvor n er givet.
For hvilke Værdier af n kan Ligningen løses?
Find derpaa x, naar $n = 3$.

2. Et regulært Oktaeder har Kanten a.
Find Oktaedrets Overflade og Rumfang samt Radierne i den indskrevne og den omskrevne Kugle.
Find endelig Vinklen mellem to Sideflader, der støder sammen langs en Sidekant.

3. Undersøg og tegn Kurven
$$y = 2x^3 - 2x.$$
Bestem de Punkter, den har fælles med Cirklen $x^2 + y^2 = 1$.
Har de to Kurver sammenfaldende Tangenter i disse Punkter?

Studentereksamen i Maj—Juni 1925.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven).

---

1. I en Kvotientrække er det 2. Led 6 og det 5. Led 48. Find Kvotienten og det første Led, og find, hvor mange Led af Rækken man skal tage med, for at Summen af disse Led kan blive 765.

2. I en Trekant har Siderne følgende Længder: $\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{5}$ cm og $2\sqrt{2}$ cm. Bevis, at den er retvinklet. Find Trekantens andre Vinkler samt dens Højder og Areal.

3. Beregn Værdien af

$$\sqrt[3]{5 - \frac{2x^2 + 7x - 4}{2x - 1}}$$

for $x = 0{,}4251$.

Studentereksamen i September 1925.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Forklar, hvad det vil sige, at en uendelig Række er konvergent.
   Fremsæt (uden Bevis) Betingelsen for, at den uendelige Kvotientrække er konvergent.
   Bestem endelig x saaledes, at den uendelige Række
   $$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^4 x + \ldots$$
   er konvergent og har Summen 2.

2. P er et vilkaarligt Punkt paa Cirklen $x^2 + y^2 = a^2$, og P_1 er det Punkt paa Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$, der har samme Abscisse som P og ligger paa samme Side af Abscisseaksen.
   Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem en ret Linie gennem P parallel med Abscisseaksen og en ret Linie gennem Begyndelsespunktet og P_1.

3. A og B er to Punkter paa Jordkloden, der i denne Opgave betragtes som en Kugle med Radius 6366 km. A er beliggende paa $55^0,74$ nordlig Bredde og $12^0,46$ østlig Længde, B paa $55^0,74$ nordlig Bredde og $48^0,86$ østlig Længde. Hvor mange km er den mindste af de to Storcirkelbuer, der forbinder A og B?

Studentereksamen i September 1925.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = (x - 4)\sqrt{x},$$

hvor Kvadratroden skal tages med positivt Fortegn. Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og Abscisseaksen, samt Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar nævnte Figur drejes 360^0 om Abscisseaksen.

2. En regulær n-Kant har Arealet a^2. Find Arealet af den Cirkelring, der begrænses af n-Kantens omskrevne og indskrevne Cirkel.
   Eks. $n = 12$; $a = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

3. Bevis, at Cirklerne

$$x^2 + y^2 - 49 = 0$$

og

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

rører hinanden.

Find derefter Ligningen for den Cirkel, der rører begge de givne i deres fælles Røringspunkt og gaar gennem Begyndelsespunktet.

Studentereksamen i September 1925.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven).

---

1. Summen af de 5 første Led i en Differensrække er 25, og Summen af de 5 følgende Led er 75.

   Bestem det første Led og Differensen samt Summen af de 20 første Led.

2. I en Cirkel, hvis Radius er 4,87 cm, er der tegnet en Korde, som er 6,34 cm.

   Beregn Gradstørrelsen og Længden af den mindste af de to Buer, hvori Korden deler Cirkelperiferien ($\pi = 3{,}142$).

3. Indtegn i et retvinklet Koordinatsystem den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{2}{x},$$

og den rette Linie, hvis Ligning er

$$y = 3x - 1.$$

Beregn dernæst Koordinaterne til de Punkter, hvori den rette Linie skærer Kurven.

Studentereksamen i Maj—Juni 1926.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdot+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

2. I et retvinklet Koordinatsystem er der givet Punkterne $A(3, 0)$ og $B(-3, 0)$ samt Cirklen $x^2+y^2=9$.

   P er et vilkaarligt Punkt paa Cirklen, og Q er dette Punkts Projektion paa Y-aksen.

   Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linierne AP og BQ.

   Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed.

3. a) Undersøg og tegn Kurven $y=2x^5-4x^3$.
   b) Find de Punkter, Kurven har fælles med den rette Linie $y=-2x$.
   c) Beregn Arealet af en af de lukkede Figurer, der begrænses af den rette Linie og Kurven.

Studentereksamen i Maj—Juni 1926.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Reducer Udtrykket

$$\frac{(a + 3b)^3 + (3a + b)^3}{4(a + b)}$$

og find Værdien af det, naar a og b er Rødderne i Ligningen

$$12x^2 - 12x + 7 = 0.$$

2. I en OmdrejningskeglefIade er indskrevet to Kugler, der rører hinanden; den enes Overflade er dobbelt saa stor som den andens. Hvor stor er Keglefladens Toppunktsvinkel?

3. Konstruer en Trekant ABC af Siden AB, Højden h_c paa denne Side samt Forholdet $\frac{AC}{BC}$.

Beregn Sider og Vinkler samt Radius i Trekantens omskrevne og indskrevne Cirkel, naar $AB = 8$, $h_c = 3$ og $\frac{AC}{BC} = 3$.

Studentereksamen i September 1926.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bestem a saaledes, at Rødderne i Ligningen

$$x^3 - 21x^2 + 143x + a = 0$$

danner en Differensrække.

2. Bevis, at Diagonalerne i den Firkant, som dannes af en Ellipses Toppunktstangenter, er de eneste Linier, af hvilke Ellipsen afskærer lige store konjugerede Diametre.

Vis endvidere, at nævnte Firkant har samme Areal som den, hvis Sider tangerer Ellipsen i Skæringspunkterne med de omtalte Diagonaler.

3. Find Arealerne af de lukkede Figurer, som begrænses af Kurverne

$$y^2 = 6x \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = 16,$$

samt Rumfangene af de Omdrejningslegemer, der fremkommer, naar de nævnte Figurer drejes om Abscisseaksen.

Studentereksamen i September 1926.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Bestem Arealet af den Trekant, der begrænses af Abscisseaksen samt Tangenten og Normalen til det Punkt af Kurven $y = \sin x$, hvis Abscisse er $\frac{\pi}{6}$. Tegn Figur.

2. I et ret Parallelepipedum (en Kasse) er Summen af alle Kanterne 40 dm, hele Overfladen 62 dm^2 og Rumfanget 30 dm^3.
   Find Længden af Kanterne og Diagonalerne i Parallelepipedet og beregn de Vinkler, som en af Diagonalerne danner med Sidefladerne.

3. I en Trekant er den ene Vinkel 60^0, og Radius i den indskrevne Cirkel er r. Bestem de andre Vinkler saaledes, at Arealet bliver Minimum.

Studentereksamen i Maj—Juni 1927.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Find alle Rødderne i Ligningen

$$x^6 + 8 = 0;$$

Rødderne skal opgives paa Formen $a + ib$.

Opløs derefter Polynomiet $x^6 + 8$ i tre Faktorer af 2. Grad i x med reelle Koefficienter.

2. Et regulært Tetraeders og et regulært Oktaeders omskrevne Kugler har lige store Radier.

Find a) Forholdet mellem de to Polyedres Kanter

og b) Forholdet mellem de to Polyedres Overflader.

3. Bestem A, B og C saaledes, at Parablen $y = Ax^2 + Bx + C$ gaar gennem Punkterne $(-1, 1\frac{1}{4})$, $(2, -1)$ og $(6, 3)$.

Find de Punkter, Parablen har fælles med Cirklen

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0,$$

samt Arealet af den mindste af de lukkede Figurer, der begrænses af Cirklen og Parablen.

Studentereksamen i Maj—Juni 1927.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Find x og y af Ligningerne

$$x^2 + 2xy - 9x - 2y + 8 = 0$$
$$\text{og } y^2 + 2xy - 8x - 11y + 28 = 0.$$

2. Undersøg og tegn Kurven

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

a) Find Koordinaterne til de Punkter, som Kurven har fælles med Cirklen $x^2 + y^2 = 1$.

b) Find derpaa Arealet af den Polygon, der begrænses af Cirkeltangenterne i de fundne Punkter.

3. I en ligebenet Trekant er den omskrevne Cirkels Radius 5 Gange saa lang som den indskrevne Cirkels Radius. Find Trekantens Vinkler.

Studentereksamen i Maj—Juni 1927.

Matematiske Opgaver.

For de sproglige Linier.

(Modenhedsprøven.)

1. Afbild grafisk

$$y = x^2$$
$$\text{og } y = x + 2$$

i samme Koordinatsystem.
Hvilke Koordinater har Skæringspunkterne?

2. Beregn Omkreds og Areal af en regulær Femkant, der er indskrevet i en Cirkel, hvis Radius er 2,348 dm.

3. Idet

$$y = -2x^2 + 5x - 3,$$

skal man bestemme de Værdier af x, for hvilke y er positiv, negativ og 0, samt finde Maksimum af y.

Studentereksamen i September 1927.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. For hvilke reelle Værdier af x er

$$\frac{2x+7}{2x-6} < \frac{3}{2x-2} \quad ?$$

2. Find Ligningen for en Cirkel, der rører Parablen $y^2 = 3x$ i Punktet $(\frac{4}{3}, 2)$, og som tillige rører Abscisseaksen.

3. I en regulær firsidet Pyramide er Forholdet mellem den indskrevne Kugles Overflade og Pyramidens hele Overflade lig med $\pi : 9$.
   Beregn Vinklen mellem en af Pyramidens Sideflader og Grundfladen.

Studentereksamen i September 1927.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. En Mand stifter et Laan paa 4000 Kr., der skal forrentes med 4 pCt. p. a. Laanet amortiseres ved, at han hvert Aar, første Gang et Aar efter Gældens Stiftelse, betaler 200 Kr.

   Hvor stor er Restgælden umiddelbart efter den 21. Indbetaling, og hvor stor er den umiddelbart efter den 41. Indbetaling?

2. Tegn i samme Koordinatsystem de to Kurver

   $$y = \sin x \quad \text{og} \quad y = \sin 2x,$$

   hvor $0 \leqq x \leqq \pi$.

   Find Arealerne af de lukkede Figurer, som begrænses af Kurverne.

3. Konstruer en Trekant ABC af $\angle A$, v_A ($\angle A$'s Halveringslinie) og $\frac{b}{c} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er opgivne Liniestykker.

   Beregn Sider og Vinkler i Trekanten, naar $\angle A = 73^0{,}48$, $v_A = 8{,}52$ og $\frac{b}{c} = 1{,}6$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1928.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Parablen $y^2 = px$ er givet.

En ret Linie, der bevæger sig saaledes, at den stadig er parallel med Parablens Akse, skærer Parablen i A og Ledelinien i B. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af Liniestykket AB, og angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed.

Undersøg, om der kan trækkes en Tangent til Parablen og en Tangent til den fundne Kurve saaledes, at Tangenterne er parallele, og at deres Røringspunkter har samme Abscisse.

2. I en Trekants ene Side skal ved Konstruktion bestemmes et Punkt, hvis Afstande fra de to andre Sider forholder sig som p til q, hvor p og q er givne Liniestykker.

I $\triangle ABC$ er $\angle B = 68^0{,}2$. Punktet D ligger paa Siden AC og har Afstande fra AB og BC, der forholder sig som 2 til 3. Beregn de Vinkler, hvori BD deler $\angle B$.

3. I den tresidede Pyramide $O — ABC$ er

$$OA = OB = OC = AB = 6 \text{ cm}$$
$$\text{og } BC = AC = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Beregn Sidekanternes og Sidefladernes Vinkler med Grundfladen ABC samt Pyramidens Rumfang.

Studentereksamen i Maj—Juni 1928.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. En Mand afbetaler hvert Aar, den 1. Januar, 300 Kr. paa en Gæld. Det første Afdrag blev betalt eet Aar efter Gældens Stiftelse, og Gælden forrentes med 4 $^0/_0$ p. a. Da det 8. Afdrag er betalt, skylder han endnu Halvdelen af den oprindelige Gæld; find denne.

   Efter at det 8. Afdrag er betalt, forhøjes den aarlige Afbetaling saa meget, at hele Gælden bliver betalt paa 12 Aar, regnet fra Gældens Stiftelse. Find Forøgelsen af den aarlige Afbetaling.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x,$$

   hvor $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

   Find Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven, X-aksen og Linierne $x = \frac{\pi}{2}$ og $x = \pi$, samt Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar denne Figur drejes 360^0 om X-aksen.

3. Der er givet en Omdrejningskegle med Højden h; dens Toppunkt kaldes A og Centrum i Grundfladen O. I Keglen indskrives en anden Omdrejningskegle, der har O til Toppunkt, og hvis Højde falder hen ad OA.

   Hvor stor er Højden i denne Kegle, naar dens Rumfang er saa stort som muligt?

Studentereksamen i September 1928.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x.$$

Find Arealet af den Figur, der begrænses af Y-aksen, Kurven og Linien $y = 1$.

2. En Gæld paa 10000 Kr. forrentes og afdrages ved 10 lige store aarlige Udbetalinger, af hvilke den første erlægges 1 Aar efter Gældens Stiftelse.

Find den aarlige Udbetaling, naar Gælden i de første 4 Aar forrentes med 4 pCt. p. a. og i Resten af Tiden med 5 pCt. p. a.

3. Konstruer en Trekant ABC af Siden AB og den modstaaende Vinkel C, naar det tillige er givet, at Vinklens Halveringslinie deler Siden i Stykker, der forholder sig som 3 til 2.

Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler, naar $AB = 4{,}735$ cm og $\angle\ C = 58^0{,}5$.

Studentereksamen i September 1928.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Tegn de Kurver, hvis Ligninger er

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$$

og

$$x^2 - y^2 - 8x + 8y = 0.$$

Find Koordinaterne til deres Skæringspunkter og vis, at Skæringspunkterne er Vinkelspidser i et Kvadrat.

2. To Cirkler med Radierne a og b rører hinanden indvendig i O. En vilkaarlig Linie gennem O skærer Cirklerne anden Gang i henholdsvis A og B.

Find det geometriske Sted for Midtpunktet af AB.

3. Der er givet en Kugle med Radius r. Find Højden i en Omdrejningskegle, der kan omskrives om denne Kugle, og hvis Volumen er saa lille som muligt.

Studentereksamen i Maj—Juni 1929.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Afbild Funktionen

$$y = 1 - \cos x$$

i Intervallet

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Find Arealet af den Figur, der er begrænset af Kurven og Abscisseaksen, samt Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar nævnte Figur drejes en Vinkel paa 360^0 omkring Abscisseaksen.

2. Der er givet en Cirkel (Radius r) og i den en Diameter. Paa Diametren ligger et Punkt A i Afstanden a fra Centrum. Et Punkt P paa Cirkelperiferien projiceres paa Diametren i Q. Fra A trækkes den rette Linie gennem Midtpunktet af PQ til Skæring med den rette Linie, der gaar gennem P og er parallel med Diametren. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet, naar P varierer.

3. Vis, at Ligningen

$$9x^2 + 16y^2 - 36x - 48y = 0$$

fremstiller en Ellipse, og at Ligningen

$$8y^2 + 6xy - 9x - 36y + 36 = 0$$

fremstiller et Par rette Linier.

Find Koordinaterne til Skæringspunkterne mellem Linieparret og Ellipsen.

Studentereksamen i Maj—Juni 1929.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Konstruer Trekant ABC, naar man kender $\angle A$, $b : c = p : q$ og $b - c = k$, hvor p, q og k er givne Liniestykker og $p > q$.
   Beregn Trekantens Sider og ubekendte Vinkler, naar $\angle A = 56^0{,}48$, $p = 5$, $q = 4$ og $k = 1{,}672$.

2. $ABCD$ er et regulært Tetraeder, hvis Kant er opgivet lig a. Midtpunkterne af Kanterne AB og CD betegnes ved M og N.
   Find [1]) Længden af MN og de Vinkler, som MN danner med AB og CD, samt [2]) Vinklen mellem MN og BC.

3. Paa Parablen $y = x^2$ er givet Punkterne $A(a, a^2)$ og $B(b, b^2)$. Find Koordinaterne til Skæringspunktet C mellem Tangenterne i A og B. Find Arealet af det Parabelafsnit, hvis Korde er AB. Find dernæst Forholdet mellem dette Areal og Arealet af Trekant ABC.

Studentereksamen September 1929.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Undersøg og tegn Kurven

$$y = x^2 - x^4.$$

Find derpaa Arealet af den Figur, der begrænses af denne Kurve og Kurven

$$y = -3x^2.$$

2. To konjugerede Diametre i Ellipsen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

og den ene af Ellipsens Ledelinier begrænser en Trekant.

Bestem Ligningerne for de to konjugerede Diametre, naar Trekantens Areal er Minimum.

3. Find x af Ligningen

$$\sqrt{3} \cdot \sin 2x = a - 2\cos^2 x$$

og angiv Grænser for a.

Eks.: $a = 1{,}25$.

Studentereksamen September 1929.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Bevis, at

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+2n-1)}{8},$$

hvor n er et positivt, ulige Tal.

2. I en Halvkugle med Radius r er indskrevet et ret Prisme med kvadratiske Endeflader, saaledes at det ene Kvadrat ligger i den Storcirkels Plan, der begrænser Halvkuglen, medens det andet Kvadrats Vinkelspidser ligger paa Halvkuglens krumme Overflade.

   Bestem Prismets Højde og Rumfang, naar dette skal være saa stort som muligt.

3. I Trekant ABC er $CB = CA$. Find $\angle C$, naar

$$h_b - h_c = r,$$

hvor r er den indskrevne Cirkels Radius.

Studentereksamen i Maj—Juni 1930.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Forskellen mellem en Vinkel i en regulær $(n + 4)$-Kant og en Vinkel i en regulær n-Kant er 3^0.

   Find n.

2. I Rektanglet $ABCD$ er $AB = 5{,}931$ og $BC = 2{,}193$. M, N, P og Q er Punkter beliggende henholdsvis paa Siderne AB, BC, CD og DA saaledes, at

$$AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = \tfrac{1}{2}.$$

   Vis, at Firkanten $MNPQ$ er et Parallelogram, og beregn dettes Sider, Vinkler og Diagonaler. Find endvidere Forholdet mellem Parallelogrammets Areal og Rektanglets Areal.

3. Find Arealet af den Figur i første Kvadrant, der begrænses af Kurverne

$$y^2 = 12x - 36,$$
$$x^2 = 12y - 36 \quad \text{og}$$
$$x^2 + y^2 = 9.$$

Studentereksamen i Maj—Juni 1930.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Bestem a og b saaledes, at 3 af Rødderne i Ligningen

$$x^4 + 3x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$$

er lige store, og løs Ligningen.

2. I et retvinklet Koordinatsystem er der givet Ellipsen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

F er det Brændpunkt, der har positiv Abscisse, og C er det Punkt paa Ellipsen, der ligger i første Kvadrant, og hvis Projektion paa Abscisseaksen er Punktet F.

Find Koordinaterne til C.

Idet P betegner et vilkaarligt Punkt paa Ellipsen, skal man finde det geometriske Sted for Midtpunktet af CP.

Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed.

3. I et tresidet Prisme betegnes Endefladerne ved ABC og $A_1B_1C_1$ saaledes, at AA_1, BB_1 og CC_1 er Prismets Sidekanter. Prismets Sidekant er 6 cm, og Endefladerne er ligesidede Trekanter med Siden 6 cm; endvidere er

$$\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^0.$$

Vis, at Sidefladen BB_1C_1C er et Kvadrat.

Find Arealet af et Normalsnit i Prismet samt Prismets Rumfang og Højde.

Studentereksamen i Maj—Juni 1930.

Matematiske Opgaver.

Modenhedsprøven.

1. I Differensrækken $17 + 28 + 39 + \cdots$ skal bestemmes det største Led, der er mindre end 500.

   Derefter skal man finde Summen af Leddene i Differensrækken til og med dette Led.

2. Find x af Ligningen

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$$

   og gør Prøve.

3. Konstruer en Trekant ABC, hvori $\angle A = 60^0$, $\angle B = 45^0$ og Højden fra A er 5 cm.

   Beregn derefter Trekantens Sider.

Studentereksamen i September 1930.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = x^2 \cdot \left(\frac{5 - x}{3}\right)^3$$

Beregn Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven og Abscisseaksen

2. Der er givet Cirklerne

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{og} \quad (x - a)^2 + y^2 = R^2.$$

P er et vilkaarligt Punkt paa den første Cirkel. Vis, at Forholdet mellem P's Potens med Hensyn til den anden Cirkel og P's Afstand fra de to Cirklers Radikalakse er konstant.

3. I en Pyramide med Rumfang V deles Højden i 3 lige store Dele, og gennem Delingspunkterne lægges Planer vinkelret paa Højden.

Find Rumfanget af hver af de Dele, hvori Pyramiden derved er delt.

Studentereksamen i September 1930.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I en Rhombe, hvis Diagonaler er d og d_1, indskrives et Rektangel, hvis Sider er parallele med Rhombens Diagonaler.

   Find det største Areal, Rektanglet kan faa, udtrykt ved d og d_1.

2. I Andengradsligningen $x^2 + px + q = 0$ betegner p og q hele Tal; endvidere er det givet, at Ligningen har lige store Rødder.

   Vis, at $p + q + 1$ er et Kvadrattal, og løs Ligningen, naar dette Kvadrattal er 9.

3. Beregn de spidse Vinkler i en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er 5 Gange saa lang som den indskrevne Cirkels Radius, og angiv Sidernes nøjagtige Forhold.

Studentereksamen i Maj—Juni 1931.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. For hvilke reelle Værdier af x er

$$\frac{3}{2x+1} + x > 2 \ ?$$

2. Løs Ligningen

$$\cos x\,(a \cos 2x - \sin 2x) = \cos 3x,$$

idet a er et givet, reelt Tal.

Find x, naar

$$1)\ a = 5, \qquad 2)\ a = 3.$$

3. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$ og a, naar man ved, at $\angle A$ er stump, og at Fodpunktet af Højden paa a har Afstande fra Siderne b og c, der forholder sig som $p : q$, hvor p og q er givne Liniestykker.

Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler, naar $\angle A = 115^{\circ},84$, $a = 5{,}626$ og $p : q = 2 : 3$.

Studentereksamen i Maj—Juni 1931.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Find Ligningerne for de Normaler, der kan tegnes fra Punktet $(2\frac{1}{2}, -1)$ til Parablen
$$y^2 = 2x.$$

2. I en ligesidet Trekant ABC tegnes Højden AD. Med AD som Diameter tegnes en Cirkel, og hele Figuren drejes 180^0 om AD, hvorved der fremkommer en Kugle og en Omdrejningskegle.

   Keglens hele Overflade er 12π.

   Find Siden i den ligesidede Trekant, og beregn det Rumfang, der er fælles for Keglen og Kuglen.

3. Undersøg og tegn den Kurve, der har Ligningen
$$y = \sin x - \frac{\sin 2x}{2}.$$

   Bestem Arealerne af de lukkede Figurer, der begrænses af denne Kurve og Kurven med Ligningen
$$y = \sin x.$$

Studentereksamen i September 1931.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Løs enhver af de to Ligninger

$$6x^3 + 3x^2 - 4x - 2 = 0$$
$$4x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 5x + 2 = 0,$$

naar man ved, at de har en Rod fælles.

2. Find Arealet af hver af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurverne

$$y = x^2 (x - 2) \quad \text{og} \quad y = -x^2 + 6x.$$

Tegn Figur.

3. En Omdrejningskeglefladе med Toppunktsvinkel 60^0 skæres med et Plan saaledes, at det fremkomne Keglesnit har Excentriciteten $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Bestem Planets Vinkel med Kegleffladens Akse.

Studentereksamen i September 1931.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Konstruer en Trekant ABC af Siderne b og c samt Trekantens Areal $= k^2$, hvor k er et givet Liniestykke.

   Find, udtrykt ved b, c og k, Betingelsen for, at Trekanten kan konstrueres.

   Beregn Trekantens Vinkler samt Siden a, naar

   $$b = 6, \quad c = 4{,}5 \quad \text{og} \quad k^2 = 6{,}75.$$

2. Der er givet Ellipserne:

   $$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

   Bevis, at Ellipserne har de samme Brændpunkter.

   Gennem det Brændpunkt, der har positiv Abscisse, trækkes en Linie vinkelret paa X-Aksen. Linien skærer i første Kvadrant Ellipserne i henholdsvis A og A_1.

   Bestem den Vinkel, som Ellipsetangenterne i A og A_1 danner med hinanden.

3. En regulær Ottekant med Siden a drejes 360^0 om en af Siderne. Beregn Volumen af det frembragte Legeme.

Studentereksamen i Maj—Juni 1932.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. I en spidsvinklet Trekant ABC er tegnet Højden $AH = h_a$ og over denne som Diameter en Cirkel, der skærer AB i M og AC i N.

   Man skal finde Firkant $AMHN$'s Sider og Diagonalen MN udtrykt ved h_a og Trekantens Vinkler A, B og C.

   Beregn de nævnte Størrelser for $AB = 9$, $BC = 7$ og $AC = 8$.

2. En ret Linie, der bevæger sig saaledes, at den stadig er parallel med Abscisseaksen, skærer Parablerne $y^2 = -x + 4$ og $y^2 = 2x + 4$ i Punkterne A og B.

   Find det geometriske Sted for Midtpunktet af Liniestykket AB og angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed.

   Den lukkede Figur, der begrænses af de to givne Parabler, deles af den fundne Kurve i to Dele.

   Find Arealet af hver af disse.

3. Om en given ret cirkulær Cylinder, hvis Grundflades Radius er a, og hvis Højde er $2a$, er omskrevet en Omdrejningskegle.

   Bestem Keglens Højde, naar dens Rumfang skal være Minimum.

Studentereksamen i Maj—Juni 1932.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Løs Ligningen

$$x^4 = -8 + i \cdot 8\sqrt{3},$$

saaledes at Rødderne bringes paa Formen $a + ib$.

2. Vis, at Ligningen

$$4x^2 + 9y^2 + 12xy + 20x + 30y = 0$$

fremstiller 2 rette Linier, og at Ligningen

$$2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y = 0$$

fremstiller en Ellipse.

Løs dernæst de to Ligninger med Hensyn til x og y og forklar den geometriske Betydning af Resultatet.

3. Der er givet et Tetraeder O-ABC, i hvilket de 3 Kanter OA, OB og OC danner et treretvinklet Hjørne (Normalhjørne).

Bevis, at de modstaaende Kanter i Tetraedret staar vinkelret paa hinanden, og at Projektionen af OA, OB og OC paa Planen ABC falder paa Højderne i Trekant ABC.

Idet O's Projektion paa Planen ABC betegnes med P og P's Projektion paa AB med D, skal man beregne Længderne af OA, OB og OC, naar $AD = 9$ cm, $BD = 16$ cm og $DP = 6$ cm.

Studentereksamen i September 1932.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Konstruer en Trekant af Højden og Vinkelhalveringslinien fra samme Vinkelspids samt Radius til Trekantens indskrevne Cirkel.
   Beregn Trekantens Vinkler og Sider, naar Højden er 4 cm, Halveringslinien 5 cm og Radius til Trekantens indskrevne Cirkel 1 cm.

2. M er et vilkaarligt Punkt paa Parablen $y^2 = p\,x$, og Q er et andet Punkt paa Parablen saaledes beliggende, at Q's Ordinat er dobbelt saa stor som M's Ordinat. Idet R og S er Projektionerne paa Parablens Akse af henholdsvis M og Q, skal man finde det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem MS og QR.

3. En Gæld forrentes og afbetales ved 10 Udbetalinger med et Aars Mellemrum, saaledes at den første Udbetaling finder Sted et Aar efter Gældens Stiftelse. Hver af de første 5 Udbetalinger udgør 10 % af den oprindelige Gæld. Hvor mange % af den oprindelige Gæld udgør hver af de sidste 5 Udbetalinger, som er lige store?
   Renten er $4\frac{1}{2}$ % p. a.

Studentereksamen i September 1932.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2},$$

og bestem dernæst de Værdier af x, for hvilke

$$0 < y < \frac{7}{4}.$$

2. Løs Ligningen

$$x^{10} + 16x^6 - x^4 - 16 = 0$$

og angiv Rødderne paa Formen $a + ib$.

3. I en tresidet Pyramide med Toppunkt O og Grundflade ABC er $OA = OB = 6$ cm, $OC = 9$ cm, $\angle COA = \angle COB = 90^0$ og $\angle AOB = 60^0$. Beregn Sidefladernes og Sidekanternes Vinkler med Grundfladen.

Studentereksamen i Maj—Juni 1933.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1) Ligningen

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 19x - 21 = 0$$

har Roden $2 + i\sqrt{3}$.

Løs Ligningen.

2) Der er givet en ret Linie l; med Centrum i et givet Punkt O paa l og Radius 1 er tegnet en Halvcirkel, hvis Endepunkter ligger paa l.

Find det geometriske Sted for Centrum i en Cirkel, der har l til Tangent og rører den givne Halvcirkel indvendig.

Bestem Arealet af den Figur, der er begrænset af Halvcirklen og det fundne geometriske Sted.

3) Paa Halveringslinien af en given Vinkel A ligger et fast Punkt P; gennem P trækkes en vilkaarlig Linie, der skærer Vinkelbenene i B og C. Bevis, at

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{AP}.$$

I en Trekant ABC er

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{v_A} \quad (v_A \text{ er } \angle A\text{'s Halveringslinie})$$

og $AB : AC = 2{,}732$.

Beregn Trekantens Vinkler.

Studentereksamen i Maj—Juni 1933.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1) Find

$$\int \sin^3 x \, dx \quad \text{og} \quad \int \frac{x}{\sqrt{2-3x}} \, dx$$

og gør Prøve paa Resultaternes Rigtighed.

2) Angiv hvilke Kurver, der fremstilles ved følgende Ligninger

$$x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

og

$$x^2 + 4y^2 - 8x = 0.$$

Tegn Kurverne og bestem de Punkter, de har fælles. Bestem Vinklen mellem Tangenterne til de to Kurver i ethvert af disse Punkter.

3) I en regulær 4-sidet Pyramide O-$ABCD$, hvis Højde er dobbelt saa stor som Grundfladekanten a, er indskrevet en Terning $A_1B_1C_1D_1 - A_2B_2C_2D_2$.

A_1 ligger paa OA, B_1 paa OB o. s. v.; A_2 er A_1's Projektion paa Pyramidens Grundflade o. s. v.

Man skal finde Terningens Kant udtrykt ved a samt beregne Vinklen mellem:

1) A_1C_2 og OA;
2) A_2C_1 og OA.

Modenhedsprøven til sproglig Studentereksamen

1933.

1) Beregn ved Logaritmer:

$$x = \frac{\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{a^4}}$$

for $a = 12,5$.

2) I en Cirkel, hvis Radius er 2,495 dm, er der indskrevet en regulær Syvkant.

Beregn Syvkantens Omkreds og Areal.

3) Find x af Ligningen:

$$(2a + 1)\,x^2 \div 4a^2 x + (2a \div 1) = 0.$$

Bestem dernæst a saaledes, at Ligningen faar to lige store Rødder, og find disse.

Modenhedsprøven til sproglig Studentereksamen
1933

1) Beregn ved Logaritmer:

$$x = \frac{\sqrt[5]{a^3} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[15]{a^4}}$$

for $a = 12{,}5$.

2) I en Cirkel, hvis Radius er 2,495 dm, er der indskrevet en regulær Syvkant.

Beregn Syvkantens Omkreds og Areal.

3) Find x af Ligningen: $(2a+1)x^2 - 4a^2x + (2a-1) = 0$.

Bestem dernæst a saaledes, at Ligningen faar to lige store Rødder, og find disse.

Studentereksamen i September 1933.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1) Ligningen

$$2x^5 + x^4 + 5x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$$

har Roden i, hvor $i = \sqrt{-1}$.

Løs Ligningen.

2) Bestem p saaledes, at $3x + 2y = 6$ bliver Tangent til den Kurve, hvis Ligning er $y^2 = px$.

Bestem q saaledes, at $3x + 2y = 6$ bliver Normal til den Kurve, hvis Ligning er $y^2 = qx$.

3) Et Kugleudsnit mindre end Halvkuglen deles ved et Plan i en Kegle og et Kugleafsnit, og i dette sidste er der indskrevet en Kugle, hvis Radius er det halve af Afsnittets Højde.

Bestem Kugleudsnittets Vinkel, naar Afsnittets Totaloverflade er n Gange den indskrevne Kugles Overflade.

Studentereksamen i September 1933.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1) I en Cirkel er indskrevet et Trapez, $ABCD$, hvor $BC \neq AD$, $AB = BC = 4$ cm og Afstanden BE fra B til Diagonalen AC er $(\sqrt{5} - 1)$ cm.

Beregn — med eller uden Brug af Logaritmer — Trapezet's Vinkler, Siden AD, Diagonalerne samt Radius i Cirklen.

2) Tegn Kurven: $y = \sqrt{2x - 4} + 3$, hvor Kvadratroden skal tages med positivt Fortegn.

Beregn dernæst:

1) det Areal, der begrænses af Kurven, Linien $y = 3$ og Linien $x = 6$;
2) Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar det ovennævnte Areal drejes 360^0 om Linien $y = 3$.

3) I Trekant ABC er $\angle C = 90^0$, $AC = 15$ og $BC = 8$. O og O_1 er Centrerne for henholdsvis $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel og den af Trekantens ydre Røringscirkler, der rører Siden AB.

Man skal beregne:

1) de to Cirklers Radier samt Afstanden OO_1;
2) Punktet O's Potens med Hensyn til den nævnte ydre Røringscirkel.

Studentereksamen i Maj—Juni 1934.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Find a og b samt Rødderne i Ligningen

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0,$$

naar det er givet, at Ligningen har en Dobbeltrod, og at denne er Middeltallet mellem de to andre Rødder.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \tfrac{1}{3}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3,$$

og beregn Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven og den Linie, hvis Ligning er

$$x + 3y = 4.$$

3. I en Trekant ABC kendes Siden a og m_a (Medianen til a); endvidere er $m_b : m_c = p : q$, hvor p og q er givne Liniestykker. Konstruer Trekanten.

Studentereksamen i Maj—Juni 1934.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punkterne $A(-2, 1)$ og $B(-1, 1)$. Find Ligningen for en Parabel med Toppunkt i A og Brændpunkt i B.

   Find dernæst det geometriske Sted for Midtpunkterne af de Parabelkorder, som gaar gennem Brændpunktet. Angiv Kurvens Art og Beliggenhed.

2. Hvor stor en Sum skal man indsætte i en Sparekasse den 2. Januar i hvert af Aarene 1935 til 1939 (begge medregnede) for den 2. Januar i hvert af Aarene 1945 til 1960 (begge medregnede) at kunne hæve 1200 Kr., idet Renten udgør 4 pCt. p. a.?

3. Paa en af Kanterne i et tresidet Hjørne med Toppunktet O afsættes $OA = 10$ cm. Gennem A lægges et Plan vinkelret paa OA; dette Plan skærer de to andre Kanter i Punkterne B og C.

   Idet $\angle AOB = \angle AOC = 58^0{,}5$ og $\angle BOC = 78^0$, skal Arealet af Trekant ABC beregnes.

Studentereksamen i September 1934.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. En Tangent til Parablen $y^2 = px$ rører denne i Punktet P. Fra P tegnes en ret Linie til Begyndelsespunktet O, og fra Tangentens Skæringspunkt med Y-Aksen nedfældes den vinkelrette paa OP.

   Find det geometriske Sted for den vinkelrettes Fodpunkt, naar P gennemløber Parablen.

2. Paa en Cirkel, hvis Radius er 3 cm, afsættes Punkterne A, B, C, D, E og F saaledes, at

$$\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EF = \smile FA = 60^0.$$

   Trekanterne ACE og BDF danner tilsammen en stjerneformet Figur med 6 Takker. Beregn denne Stjernes Areal.

   Beregn Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar Stjernen drejes 180^0 med AD som Omdrejningsakse.

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er:

$$y = \sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x \quad \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

   Find Arealet af en af de Figurer, der begrænses af Kurven og X-Aksen.

Studentereksamen i September 1934.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Hvilke reelle Værdier kan man give a, naar Uligheden

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8$$

skal være tilfredsstillet for enhver reel Værdi af x?

2. Konstruer en Trekant ABC af $\angle A$ og Siden a, naar det tillige er givet, at $a = 2h_a$, hvor h_a er Højden paa Siden a.

   Beregn Trekantens Vinkler og de ubekendte Sider, naar $\operatorname{tg} A = 8$ og $a = 20$.

3. I Endefladerne $ABCD$ og $RSTU$ af en Terning med given Kant a trækkes Diagonalerne AC og SU, der ikke ligger i samme Plan.

   Find Rumfanget af Tetraedret $ACSU$ samt Afstanden fra Sidefladen ACS til U.

   Find endvidere den korteste Afstand mellem AC og SU og den korteste Afstand mellem AC og BU.

Studentereksamen i Maj—Juni 1935.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Fra et Punkt H paa Hyperblen

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

nedfældes de vinkelrette paa Asymptoterne; de vinkelrettes Fodpunkter kaldes A_1 og A_2.

Find det geometriske Sted for Midtpunktet af Liniestykket A_1A_2, naar H gennemløber Hyperblen.

Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. En Kurve har Ligningen

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Find Ligningen for den Kurvetangent, som gaar gennem Kurvens Skæringspunkt med y-Aksen, men ikke rører Kurven i dette Punkt.

Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af denne Tangent og Kurven.

3. I en Kugle med Radius r er indskrevet en ret cirkulær Kegle, hvis Toppunktsvinkel er 60^0. Et Plan parallelt med Keglens Grundflade skærer Kuglen og Keglen, saa at der fremkommer en Cirkelring.

Bestem den største Værdi, Arealet af denne Cirkelring kan have.

Studentereksamen i Maj—Juni 1935.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I en indskrivelig Firkant $ABCD$ er $AB = 5{,}24$, $BC = 6{,}74$, $AC = 7{,}42$ og $\angle C = 100^{0}$. Beregn Firkantens øvrige Vinkler og Sider.

2. Find x af Ligningen

$$2ix^2 - (10i - 1)x + 13i - 4 = 0,$$

idet Rødderne skrives paa Formen $a + ib$.

Dan en Ligning af 4. Grad i x med reelle Koefficienter saaledes, at to af dens Rødder bliver Rødderne i den givne Andengradsligning.

3. Konstruer en Trekant ABC, naar man kender $\angle C$, Højden paa Siden AB og Forholdet $\frac{AO}{BO} = \frac{p}{q}$, hvor O er Skæringspunktet mellem de Linier, som halverer Trekantens Vinkler, medens p og q er givne Liniestykker.

Studentereksamen. September 1935.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Linien $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$ skærer henholdsvis X- og Y-aksen i Punkterne A og B.

   Find Ligningen for den omskrevne Cirkel til hvert af de to Kvadrater, der kan tegnes med AB som Side.

2. I en spidsvinklet Trekant ABC skal man konstruere den Linie, der indeholder de Punkter, hvis Afstande fra AC og BC forholder sig som $BC : AC$; denne Linie skærer AB i D. Vis, at $AD = BD$.

   Idet $CD = 10$ cm, og D's Afstande fra AC og BC er henholdsvis 6 cm og 5 cm, skal man beregne Trekantens Sider og Vinkler.

3. Ligningen

   $$x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 100x - 112 - i(2x^2 - 6x - 56) = 0$$

   har to reelle Rødder. Find disse og løs derefter Ligningen fuldstændigt, idet de komplekse Rødder skrives paa Formen $a + ib$.

Studentereksamen. September 1935.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. En Kugle med given Radius r er indskrevet i en regulær 4-sidet Pyramidestub. Toplansvinklen mellem Pyramidestubbens største Grundflade og enhver af dens Sideflader er 60^0.

   Find Siden i Pyramidestubbens største og mindste Grundflade samt dens Sidekant udtrykt ved r.

   Find sluttelig Forholdet mellem Kuglens og Pyramidestubbens Rumfang.

2. Blandt de Tal, der ved Division med 19 giver Resten 7 og tillige ved Division med 13 giver Resten 9, skal man bestemme det mindste Tal, der skrives med fire Cifre.

3. Tegn Kurverne

$$y^2 = 4x \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 - 10x + 4y = 3$$

   og bestem Koordinaterne til de fælles Punkter.

   Beregn Arealet af den største af de to lukkede Figurer, der begrænses af Kurverne.

Studentereksamen i Maj—Juni 1936.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Bevis, at

$$1^2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 8 + 3^2 \cdot 9 + \cdots + n^2 \cdot (n + 6) = \frac{n(n+1)(n^2 + 9n + 4)}{4},$$

hvor n er et vilkaarligt positivt, helt Tal.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = 4 \sin^2 x - 1 \quad \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og Linien $y = -1$.

Beregn dernæst Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes 360^0 om Linien $y = -1$.

3. Konstruer en indskrivelig Firkant $ABCD$, naar man kender Vinklen A samt Afstandene fra Diagonalernes Skæringspunkt til Vinkelspidserne A, B og C.

Studentereksamen i Maj—Juni 1936.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Der er givet en ret Linie l og et Punkt A uden for l. Paa l bevæger Punkterne M og P sig saaledes, at MP numerisk er lig MA. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem en Linie gennem A vinkelret paa MA og en Linie gennem P vinkelret paa MP.

2. En Kurve, hvis Ligning er $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, har i Punkterne $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ og $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ Tangenter, der er parallelle med X-Aksen. Find a, b, c og d.

3. I et Tetraeder O–ABC er $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ og de øvrige Kanter alle lig 1. Find Tetraedrets Overflade og Rumfang samt de Vinkler, som Sidefladerne danner med Grundfladen ABC.

Studentereksamen i September 1936.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Angiv de reelle Værdier af x, som tilfredsstiller Uligheden

$$4x^4 + 3x + 6 > 4x^3 + 11x^2.$$

2. I et retvinklet Koordinatsystem er tegnet den Kurve, hvis Ligning er $y = x^4$. I Kurven er tegnet en Korde, der staar vinkelret paa Y-Aksen, og som sammen med Kurven begrænser en lukket Figur, hvis Areal er 51,2.

   Find Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar den omtalte Figur drejes 180^0 om Y-Aksen.

3. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Linierne $y = x$ og $y = -x$. Disse Linier skæres med en vilkaarlig ret Linie gennem $(1, 0)$ i henholdsvis A og B. Punktet $(-1, 1)$ og A, ligeledes Punktet $(-1, -1)$ og B, forbindes med rette Linier.

   Find det geometriske Sted for disse to Liniers Skæringspunkt, naar den vilkaarlige rette Linie drejer sig om Punktet $(1, 0)$.

Studentereksamen i September 1936.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Løs Ligningen

$$4 \cos^4 x + 4 \sin^2 x - 3 = a,$$

hvor a betegner et bekendt Tal.

Eksempler: $^1)$ $a = 0$, $^2)$ $a = \frac{4}{9}$, $^3)$ $a = 2$.

2. En Kugle er indskrevet i en Omdrejningskegle, hvis Toppunkt har en given Afstand a fra Kuglens Centrum.

Bestem Kuglens Radius saaledes, at den Del af Keglens krumme Overflade, der ligger mellem Toppunktet og Keglefladens Røringscirkel med Kuglen, bliver saa stor som muligt.

3. Idet p og q er to givne Liniestykker, skal man konstruere en retvinklet Trekant saaledes, at Differensen mellem Hypotenusen og den ene Katete bliver lig med p, og at Differensen mellem Hypotenusen og den anden Katete bliver lig med q.

Studentereksamen i Maj—Juni 1937.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. I Ligningen

$$4x^4 - 12x^3 + ax^2 + 24x - 18 = 0$$

er to af Rødderne numerisk lige store, men har modsat Fortegn.
Løs Ligningen og find a.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Find dernæst Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven, *X-Aksen* og den rette Linie $x = \sqrt{3}$.
Bestem sluttelig k saaledes, at den rette Linie $x = k$ halverer ovennævnte Areal.

3. I en Trekant ABC deler Vinkel A's Halveringslinie Siden BC i Stykkerne $BD = 3{,}451$ og $DC = 5{,}723$; endvidere er Differensen $AC - AB = 4{,}629$.
Beregn Trekantens Sider, Vinkler og Areal samt Radius i den indskrevne Cirkel.

Studentereksamen i Maj—Juni 1937.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I Cirklen med Ligningen $x^2 + y^2 = r^2$ er tegnet den Diameter, hvis Endepunkter er A $(-r, 0)$ og B $(r, 0)$. Et vilkaarligt Punkt P paa Cirklen projiceres paa AB i Punktet Q; endvidere er M Midtpunktet af QP.

   Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem de rette Linier AP og BM.

   Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. I en Halvcirkel, hvis begrænsende Diameter er AB, er givet en Korde KL, parallel med AB; Tangenterne i K og L tegnes, og deres Skæringspunkt kaldes T. Figuren $ABLTKA$, begrænset af AB, Buerne AK og BL samt Liniestykkerne KT og LT, drejes 180° om Linien gennem Centrum og T.

   Beregn den krumme Overflade og Rumfanget af det derved fremkomne Legeme, udtrykt ved Halvcirklens Radius r og Vinklen $KLT = v$.

3. Konstruer Storaksen og Lilleaksen for en Ellipse, naar der er givet det ene Brændpunkt og to Tangenter samt Røringspunktet mellem den ene af disse og Ellipsen.

Studentereksamen i September 1937. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Find x og y af Ligningerne

$$\begin{aligned} 3x^2 + xy + 3y^2 - 3x - 3y &= 21 \\ x + y - xy &= 1. \end{aligned}$$

2. I en Omdrejningskegle er indskrevet en Kugle.
Forholdet mellem denne Kugles Radius og Keglens Højde er n, hvor n er et givet Tal.
Bestem Keglens Toppunktsvinkel og angiv Grænserne for n.
Beregn dernæst Forholdet mellem Kuglens og Keglens Rumfang.

3. Den $^1/_7$ 1926 stiftede A en Gæld paa 10000 Kr. Gælden afdrages med et vist Beløb een Gang aarligt, første Gang den $^1/_7$ 1927.
Hvor stort er det aarlige Afdrag, naar A efter at have indbetalt dette den $^1/_7$ 1931 endnu skylder 5000 Kr.? (Rentefod 5 $^0/_0$ p. a.)
Herefter afbetaler A kun een Gang hvert andet Aar, første Gang den $^1/_7$ 1933. Hvert Afdrag er paa 1000 Kr. undtagen det sidste, der er mindre.
Hvor mange Aar regnet fra Gældens Stiftelse vil det vare, før Gælden er helt afbetalt?
Hvor stort bliver det sidste Afdrag?
(Rentefod 5 $^0/_0$ p. a.)

Studentereksamen i September 1937. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. Find Ligningerne for to parallelle Linier, hvoraf den ene gaar gennem (1,2), den anden gennem (14,2), naar Afstanden mellem Linierne skal være 5.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{2x^2 - 6x - 8}{x^2 - 4}.$$

   Bestem de Punkter paa Kurven, i hvilke Tangenten har Hældningskoefficienten $\frac{3}{2}$.

   Vis, at disse Punkter ligger paa en ret Linie.

3. Et Punkt P bevæger sig paa Parablen $y^2 = px$, hvis Toppunkt er O.

   Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem den rette Linie OP og Tangenten til Parablen i det Punkt Q, der ligger symmetrisk med P med Hensyn til Parablens Akse.

   Find Arealet af den Trekant, der er begrænset af Parabeltangenterne i P og Q samt Linien gennem O og P, udtrykt ved P's Ordinat.

   Bestem tillige Arealerne af de to Dele, hvori denne Trekant deles af Parabelbuen OP.

Studentereksamen Maj—Juni 1938.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punkterne $F(10, -3)$, $F_1(-6, -3)$ og $P(10, \frac{3}{5})$.

   Find Ligningen for en Ellipse, der har F og F_1 til Brændpunkter og gaar gennem P.

2. I en Trekant ABC skærer Halveringslinien for Vinkel A Højden BD i Punktet E. Konstruer Trekant ABC af BE, ED og Vinkel B. (Diskussion kræves ikke).

   Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler samt Radius i Trekantens omskrevne Cirkel, naar $BE = 4$ cm, $ED = 3$ cm og Vinkel $B = 57^{\circ},37$.

3. I en uendelig Kvotientrække, hvis Kvotient er et rationalt Tal mellem 0 og 1, er Rækkens Sum lig med Produktet af dens fire første Led. Led Nr. 2 er lig med $2\sqrt[3]{2}$.

   Bestem Kvotienten og Led Nr. 1.

   Hvor mange Led af Rækken skal man mindst medtage for at faa en Sum, der er større end 9?

Studentereksamen Maj—Juni 1938.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er

$$y = 4^x - 2^x.$$

Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af X-Aksen og den rette Linie, hvis Ligning er $x = 1$, samt den tegnede Kurve.

Beregn endelig Rumfanget af det Legeme, som fremkommer, naar den omtalte Figur drejes 360^0 om X-Aksen.

2. Om en given Kugle omskrives en Omdrejningskeglestub. Bestem denne saaledes, at dens Rumfang bliver saa lille som muligt.

Vis, at baade Keglestubbens krumme Overflade og dens samlede Overflade i dette Tilfælde ligeledes bliver saa smaa som muligt.

3. I en Omdrejningskeglellade er lagt et plant Snit vinkelret paa en af Frembringerne. Beregn Keglefladens Toppunktsvinkel og Snitplanens Afstand fra Keglefladens Toppunkt, naar Snitkurven skal være en Ellipse med Halvakserne 13 og 12.

Studentereksamen Maj—Juni 1938.

Privatister.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet Punkterne $F(10, -3)$, $F_1(-6, -3)$ og $P(10, \frac{3}{5})$.

   Find Ligningen for en Ellipse, der har F og F_1 til Brændpunkter og gaar gennem P.

2. I en Trekant ABC skærer Halveringslinien for Vinkel A Højden BD i Punktet E. Konstruer Trekant ABC af BE, ED og Vinkel B. (Diskussion kræves ikke).

   Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler samt Radius i Trekantens omskrevne Cirkel, naar $BE = 4$ cm, $ED = 3$ cm og Vinkel $B = 57^0{,}37$.

3. I en uendelig Kvotientrække, hvis Kvotient er et rationalt Tal mellem 0 og 1, er Rækkens Sum lig med Produktet af dens fire første Led. Led Nr. 2 er lig med $2\sqrt[3]{2}$.

   Bestem Kvotienten og Led Nr. 1.

   Hvor mange Led af Rækken skal man mindst medtage for at faa en Sum, der er større end 9?

Studentereksamen Maj—Juni 1938.

Privatister.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. Undersøg og tegn den Kurve, der fremstilles ved

$$y = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og Linien $y = 2$, beskriver ved en Drejning paa 360^0 om X-Aksen et Omdrejningslegeme. Find dettes Rumfang.

2. Om en given Kugle omskrives en Omdrejningskeglestub. Bestem denne saaledes, at dens Rumfang bliver saa lille som muligt.

   Vis, at baade Keglestubbens krumme Overflade og dens samlede Overflade i dette Tilfælde ligeledes bliver saa smaa som muligt.

3. I en Omdrejningskeglelade er lagt et plant Snit vinkelret paa en af Frembringerne. Beregn Kegleladens Toppunktsvinkel og Snitplanens Afstand fra Kegleladens Toppunkt, naar Snitkurven skal være en Ellipse med Halvakserne 13 og 12.

Studentereksamen September 1938. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. Løs Ligningen

$$4 \sin^3 x - 4 \cos^3 x + \cos x - 3 \sin x = 0.$$

2. I Trekant ABC betegner D Fodpunktet af Højden fra A. Konstruer Trekanten af Vinkel B, $\frac{AD}{DC} = \frac{p}{q}$ samt $AD + DB = k$, idet p, q og k er givne Liniestykker.

   Angiv Mulighedsbetingelse og Antallet af Løsninger, naar Vinkel B er spids.

3. I Trekant ABC er Siderne $a = 25$, $b = 20$ og $c = 13$. Beregn Trekantens Vinkler.

   Beregn endvidere Længden af Radierne i de tre Cirkler, der har Centrum i hver sin af Trekantens Vinkelspidser og to og to rører hinanden udvendigt.

   Beregn endelig Længden af de Stykker paa Cirklernes ydre Fællestangenter, som begrænses af Røringspunkterne.

Studentereksamen September 1938. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet de to rette Linier $y = x$ og $y = -x$ samt Punktet $(a, 0)$. En vilkaarlig ret Linie gennem $(a, 0)$ skærer de to givne rette Linier i henholdsvis A og B. I hvert af disse Punkter oprejses de vinkelrette paa de givne Linier.

   Find det geometriske Sted for de vinkelrettes Skæringspunkt, naar den vilkaarlige Linie drejer sig om Punktet $(a, 0)$.

   Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. I Tetraedret $ABCD$ er $BC = CD = DB = 4$, $AB = AC = 5$ og $AD = 3$.

   Beregn Tetraedrets Rumfang og alle Toplansvinklerne.

3. Paa Abscisseaksen i et Koordinatsystem bevæger Punkt $P_1(x, 0)$ sig med Hastigheden $\pi \cdot \cos \pi t$, hvor t betegner Tiden. Til Tiden $t = 0$ befinder P_1 sig i $(0, 0)$.

   Angiv Punktets Abscisse, Hastighed og Acceleration for de Værdier af t, hvortil der svarer Maksimum eller Minimum af Hastighedens numeriske Værdi.

   Paa Ordinataksen bevæger sig samtidig Punktet $P_2(0, y)$, hvis Bevægelse afhænger saaledes af P_1's Bevægelse, at $y = x^2$. Undersøg Bevægelsen af P_2 paa samme Maade, som det skete for P_1.

Studentereksamen September 1938. Sygeeksamen.
Privatister.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. Løs Ligningen

$$4 \sin^3 x - 4 \cos^3 x + \cos x - 3 \sin x = 0.$$

2. I Trekant ABC betegner D Fodpunktet af Højden fra A. Konstruer Trekanten af Vinkel B, $\frac{AD}{DC} = \frac{p}{q}$ samt $AD + DB = k$, idet p, q og k er givne Liniestykker.

   Angiv Mulighedsbetingelse og Antallet af Løsninger, naar Vinkel B er spids.

3. I Trekant ABC er Siderne $a = 25$, $b = 20$ og $c = 13$. Beregn Trekantens Vinkler.

   Beregn endvidere Længden af Radierne i de tre Cirkler, der har Centrum i hver sin af Trekantens Vinkelspidser og to og to rører hinanden udvendigt.

   Beregn endelig Længden af de Stykker paa Cirklernes ydre Fællestangenter, som begrænses af Røringspunkterne.

Studentereksamen Maj—Juni 1939.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. I Firkant $ABCD$ er Vinkel $A = 94^\circ,68$, Vinkel $C = 124^\circ,38$, $AD = 4,879$, $AB = 7,125$ og $BC = 4,478$.
   Beregn Firkantens øvrige Vinkler og Siden CD.

2. Undersøg og tegn Kurven
$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$
   og beregn derpaa Arealet af den lukkede Figur, der er begrænset af Kurven, X-Aksen og Linien $x = -2$.

3. En Kuglekalots Areal er lig med den krumme Overflade af den Kegle, der har Toppunkt i Kuglens Centrum og Kalottens begrænsende Cirkel som Grundflade. Bestem Keglens Toppunktsvinkel.
   Beregn dernæst Forholdet mellem Rumfangene af Kugleafsnittet (hørende til Kuglekalotten) og Keglen.
   Beregn sluttelig Vinklen i Keglefladens Udfoldning.

Studentereksamen Maj—Juni 1939.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. Find x og y af Ligningerne

$$x\sqrt{3} + y = 1$$

og

$$x^2 - y^2 = 1$$

og find Mellemproportionalen mellem sammenhørende Værdier af x og y, idet Resultaterne angives paa Formen $a + ib$, hvor a og b er reelle.

2. Paa Ellipsen $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ er A det Punkt i 1. Kvadrant, hvis Ordinat er $\frac{a}{2}$, og B det Punkt i 2. Kvadrant, hvis Abscisse er $-a$. Normalen til Ellipsen i A skærer henholdsvis X- og Y-Aksen i Punkterne P og Q, og Normalen til Ellipsen i B skærer henholdsvis X- og Y-Aksen i Punkterne R og S.

Bevis, at Midtpunkterne af Liniestykkerne AB, PR og QS ligger paa en ret Linie.

3. I en regulær firesidet Pyramide O-$ABCD$ er Sidekanten $OA = 5$ og Grundfladekanten $AB = 4\sqrt{2}$.

I Pyramiden er indskrevet en anden regulær firesidet Pyramide O_1-$A_1B_1C_1D_1$ saaledes, at O_1 falder i Centrum for Grundfladen $ABCD$, medens A_1 falder paa OA, B_1 paa OB o. s. v.

Beregn Pyramiden O_1-$A_1B_1C_1D_1$'s Rumfang og Overflade i det Tilfælde, hvor Rumfanget antager sin største Værdi.

Studentereksamen Maj—Juni 1939.
Privatister.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. I Firkant $ABCD$ er Vinkel $A = 94°,68$, Vinkel $C = 124°,38$, $AD = 4,879$, $AB = 7,125$ og $BC = 4,478$.
   Beregn Firkantens øvrige Vinkler og Siden CD.

2. I Parablen $y^2 = px$ trækkes gennem Brændpunktet en Korde parallel med Y-Aksen. Kordens Endepunkter er A og B. Find Ligningen for den Cirkel, der gaar gennem A og B og i disse Punkter har samme Tangent som Parablen.
   Beregn derpaa Arealet af den mindste af de to lukkede Figurer, der begrænses af Parablen og Cirklen.

3. En Kuglekalots Areal er lig med den krumme Overflade af den Kegle, der har Toppunkt i Kuglens Centrum og Kalottens begrænsende Cirkel som Grundflade. Bestem Keglens Toppunktsvinkel.
   Beregn dernæst Forholdet mellem Rumfangene af Kugleafsnittet (hørende til Kuglekalotten) og Keglen.
   Beregn sluttelig Vinklen i Keglefladens Udfoldning.

Studentereksamen Maj—Juni 1939.
Privatister.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. Find x og y af Ligningerne

$$x\sqrt{3} + y = 1$$

og

$$x^2 - y^2 = 1$$

og find Mellemproportionalen mellem sammenhørende Værdier af x og y, idet Resultaterne angives paa Formen $a + ib$, hvor a og b er reelle.

2. Paa Ellipsen $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ er A det Punkt i 1. Kvadrant, hvis Ordinat er $\frac{a}{2}$, og B det Punkt i 2. Kvadrant, hvis Abscisse er $-a$. Normalen til Ellipsen i A skærer henholdsvis X- og Y-Aksen i Punkterne P og Q, og Normalen til Ellipsen i B skærer henholdsvis X- og Y-Aksen i Punkterne R og S.

   Bevis, at Midtpunkterne af Liniestykkerne AB, PR og QS ligger paa en ret Linie.

3. I en regulær firesidet Pyramide O-$ABCD$ er Sidekanten $OA = 5$ og Grundfladekanten $AB = 4\sqrt{2}$.

   I Pyramiden er indskrevet en anden regulær firesidet Pyramide O_1-$A_1B_1C_1D_1$ saaledes, at O_1 falder i Centrum for Grundfladen $ABCD$, medens A_1 falder paa OA, B_1 paa OB o. s. v.

   Beregn Pyramiden O_1-$A_1B_1C_1D_1$'s Rumfang og Overflade i det Tilfælde, hvor Rumfanget antager sin største Værdi.

Studentereksamen i September 1939. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

I.

1. Givet Cirklerne

$$x^2 + y^2 = 49$$
$$\text{og} \quad x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0.$$

Naar Cirklerne drejes 180^0 om X-Aksen, opstaar der to Kugler. Find Overfladen og Rumfanget af det linseformede Legeme, der er fælles for de to Kugler.

2. Løs Ligningen

$$\cos x - \sin x - \cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = \sin^2 x.$$

Løs endvidere Ligningen

$$\cos 2x = \cos^3 x + \sin^3 x.$$

3. Konstruer en Trekant ABC, naar man kender Siden BC, $\angle C$ og $\angle BCM$, hvor M er Midtpunktet af Siden AB.
Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler, naar $BC = 4{,}578$, $\angle C = 63^0{,}72$ og $\angle BCM = 47^0{,}28$.

Studentereksamen i September 1939. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

II.

1. I et retvinklet Koordinatsystem XYZ i Rummet er givet Punkterne $A\,(4{,}5{,}0)$, $B\,(13{,}2{,}0)$ og $C\,(6{,}9{,}0)$. Bestem Ligningen for en Kugleflade, der har sit Centrum i XY-Planen, og som gaar gennem A, B og C. Angiv, hvilke af Punkterne $P\,(12{,}2{,}3)$, $Q\,(6{,}5{,}4)$, $R\,(5{,}3{,}2)$, $S\,(9{,}9,-3)$ og $T\,(8{,}7,-4)$ der ligger inden for, paa eller uden for Kuglefladen. Bestem dernæst Ligningen for hver af de Kugleflader, der gaar gennem A, B og C og har Radius 13.

2. Undersøg og tegn Kurven

$$y = \operatorname{tg} x + \cot x \qquad \text{i Intervallet } \frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Beregn dernæst Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, X-Aksen og de Linier, hvis Ligninger er $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{\pi}{3}$. Beregn sluttelig Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes 360° om X-Aksen.

3. I Parablen $y^2 = 8x$ med Toppunkt O trækkes en Korde OA samt en Korde OB parallel med Tangenten i A. Bestem Koordinaterne til A og B, saaledes at den numeriske Værdi af den spidse Vinkel mellem Korderne bliver saa stor som muligt.
Beregn i dette Tilfælde Arealerne af de to Afsnit, der begrænses af Parablen og henholdsvis Korderne OA og AB.

Studentereksamen i September 1939. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

Privatister.

I.

1. Givet Cirklerne

$$x^2 + y^2 = 49$$
$$\text{og}\quad x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0.$$

Naar Cirklerne drejes 180° om X-Aksen, opstaar der to Kugler. Find Overfladen og Rumfanget af det linseformede Legeme, der er fælles for de to Kugler.

2. Løs Ligningen

$$\cos x - \sin x - \cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = \sin^2 x.$$

Løs endvidere Ligningen

$$\cos 2x = \cos^3 x + \sin^3 x.$$

3. Konstruer en Trekant ABC, naar man kender Siden BC, $\angle C$ og $\angle BCM$, hvor M er Midtpunktet af Siden AB.
Beregn Trekantens ubekendte Sider og Vinkler, naar $BC = 4{,}578$, $\angle C = 63^0{,}72$ og $\angle BCM = 47^0{,}28$.

Studentereksamen i September 1939. Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

Privatister.

II.

1. Undersøg og tegn de Kurver, hvis Ligninger er

$$y = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2 \qquad \text{og} \qquad y = -2x^2 + 8x.$$

Bestem Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af de to Kurver.

2. I et ligebenet Trapez $ABCD$, hvor AD er parallel med BC, er $AB = 1$, $AD = 3$ og $\angle A = 120^\circ$.
Trapezet drejes 360° om AB.
Beregn Rumfanget af det frembragte Omdrejningslegeme.

3. I Parablen $y^2 = 8x$ med Toppunkt O trækkes en Korde OA samt en Korde OB parallel med Tangenten i A. Bestem Koordinaterne til A og B, saaledes at den numeriske Værdi af den spidse Vinkel mellem Korderne bliver saa stor som muligt.
Beregn i dette Tilfælde Arealerne af de to Afsnit, der begrænses af Parablen og henholdsvis Korderne OA og AB.

Studentereksamen Maj—Juni 1940.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

I.

1. Løs Ligningen

$$2 \sin^2 2x + \cos x - 1 = 0.$$

2. I en indskrivelig, konveks Firkant $ABCD$ er $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 8$ og $DA = 5\sqrt{3}$.

   Beregn Firkantens Diagonaler og Vinkler samt dens Areal.

3. Find Ligningerne for to paa hinanden vinkelrette rette Linier gennem Punktet $(7, -1)$, naar Punktet $(0,0)$ ligger lige langt fra dem.

   Find Ligningen for den indskrevne Cirkel i den Trekant, som de to rette Linier begrænser sammen med Y-Aksen.

Studentereksamen Maj—Juni 1940.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

II.

1. En Omdrejningskegleflade, hvis Toppunktsvinkel er 60°, skæres med en Plan, hvorved der fremkommer en Ellipse, hvis Storakses Endepunkter ligger henholdsvis 8 cm og 15 cm fra Keglefladens Toppunkt.

   Beregn Længden af Ellipsens Akser samt Snitplanens Vinkel med Keglefladens Akse.

   Beregn endvidere Afstanden fra Keglefladens Toppunkt til Snitplanens Skæringspunkt med Keglefladens Akse.

2. Et Selskab paa 7 voksne og 6 Børn vil foretage en Rejse saaledes, at en Bil befordrer (foruden Chaufføren, der ikke hører til Selskabet)

enten	5 voksne,
eller	4 voksne og 2 Børn,
eller	3 voksne og 4 Børn,

   medens Resten af Selskabet benytter Jernbanen.

   Hvor mange forskellige Rejsehold kan der dannes til Benyttelse af Bilen?

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = 2x + \frac{2}{x - 3}.$$

   Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, X-Aksen og Linierne $x = 1$ og $x = 2$, samt Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes 360° om X-Aksen.

Studentereksamen Maj—Juni 1940.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

Privatister.

(kgl. Anordn. $^{25}/_{3}$ 1938).

I.

1. Løs Ligningen

$$2 \sin^2 2x + \cos x - 1 = 0.$$

2. I en indskrivelig, konveks Firkant $ABCD$ er $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 8$ og $DA = 5\sqrt{3}$.

   Beregn Firkantens Diagonaler og Vinkler samt dens Areal.

3. Find Ligningerne for to paa hinanden vinkelrette rette Linier gennem Punktet $(7, -1)$, naar Punktet $(0,0)$ ligger lige langt fra dem.

   Find Ligningen for den indskrevne Cirkel i den Trekant, som de to rette Linier begrænser sammen med Y-Aksen.

Studentereksamen Maj—Juni 1940.

Matematiske Opgaver.

(Den matematisk-naturvidenskabelige Linie).

Privatister.

(kgl. Anordn. $^{25}/_{3}$ 1938).

II.

1. En Omdrejningskeglefladе, hvis Toppunktsvinkel er $60°$, skæres med en Plan, hvorved der fremkommer en Ellipse, hvis Storakses Endepunkter ligger henholdsvis 8 cm og 15 cm fra Keglefladens Toppunkt.

   Beregn Længden af Ellipsens Akser samt Snitplanens Vinkel med Keglefladens Akse.

   Beregn endvidere Afstanden fra Keglefladens Toppunkt til Snitplanens Skæringspunkt med Keglefladens Akse.

2. Et Selskab paa 7 voksne og 6 Børn vil foretage en Rejse saaledes, at en Bil befordrer (foruden Chaufføren, der ikke hører til Selskabet)

enten	5 voksne,
eller	4 voksne og 2 Børn,
eller	3 voksne og 4 Børn,

   medens Resten af Selskabet benytter Jernbanen.

   Hvor mange forskellige Rejsehold kan der dannes til Benyttelse af Bilen?

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = 2x + \frac{2}{x - 3}.$$

   Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, X-Aksen og Linierne $x = 1$ og $x = 2$, samt Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes $360°$ om X-Aksen.

Studentereksamen. September 1940.

Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. I en regulær Pyramidestub, hvori der kan indskrives en Kugle, er Endefladerne Kvadrater med Siderne $a = 5{,}5$ og $b = 3{,}5$. Beregn Pyramidestubbens Rumfang og Overflade.

2. Normalen i Punktet P af en ligesidet Hyperbel skærer Asymptoterne i A og B. Bevis, at Forbindelseslinien mellem Hyperblens Centrum og Midtpunktet af AB staar vinkelret paa Forbindelseslinien mellem Centrum og Punktet P.

3. Konstruer et Trapez $ABCD$ ($AB \neq DC$), hvori $\angle B = \angle v$, $AB = l$, $CD = m$ og $BC - AD = n$, idet $\angle v$ er en given Vinkel, og l, m og n er givne Liniestykker. (Diskussion kræves ikke).

Beregn Trapezets ubekendte Sider og Vinkler, naar $\angle v = 120°$, $l = 3$ cm, $m = 8$ cm og $n = 2$ cm.

Studentereksamen. September 1940.

Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Et Firma tilbyder at levere en Vare imod, at der betales enten 150 Kr. to Gange med et Aars Mellemrum eller 80 Kr. fire Gange med et Aars Mellemrum, i begge Tilfælde forste Gang ved Varens Levering. Hvilken aarlig Rentefod maa der regnes med, hvis de to Priser skal have samme Kapitalværdi?

Hvilken Kontantpris svarer hertil?

2. I en given Cirkel er AB en fast Diameter. P betegner et vilkaarligt Punkt paa Cirklen og Q Skæringspunktet mellem Linien AP og Cirklens Tangent i B; paa Linien AP ligger endvidere Punktet R saaledes, at $QR = QA$.

Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Linien gennem R parallel med AB og Linien gennem Q parallel med BP.

3. Undersog og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

Beregn Arealet af den Del af Planen, der begrænses af Kurven, X-Aksen og Linien $y = \sqrt{2}$, samt Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Del af Planen drejes 360° omkring X-Aksen.

Studentereksamen Maj—Juni 1941.

Matematiske Opgaver I.

1. Et vilkaarligt Punkt E paa Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ forbindes med Ellipsens Toppunkter $A\,(a, 0)$ og $B\,(-a, 0)$ med rette Linier. Toppunktstangenten i A skærer den rette Linie BE i Punktet C.

   Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem den rette Linie AE og den rette Linie gennem C parallel med Ellipsens store Akse.

   Angiv den fundne Kurves Art og Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. I et Parallelogram $ABCD$ betegner h_1 Afstanden mellem de parallelle Sider AD og BC og h_2 Afstanden mellem de parallelle Sider AB og DC.

   Konstruer Parallelogrammet $ABCD$ af Vinkel A, Diagonalen $BD = d$ samt Forholdet $h_1 : h_2 = p : q$, hvor d, p og q er givne Liniestykker.

   Beregn Parallelogrammets Sider, naar Vinkel $A = 52°,48$, $d = 8,246$ og $p : q = 3 : 7$.

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = tgx + tg^2x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

   Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, Linien $x = \frac{\pi}{4}$ og X-Aksen.

   Beregn sluttelig Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og X-Aksen.

Studentereksamen Maj—Juni 1941.

Matematiske Opgaver II.

1. Ligningerne

$$12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$$

og $$4x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 16x - 4 = 0$$

har en Dobbeltrod fælles. Løs Ligningerne.

2. Løs Ligningen

$$\cos 2x + 2 \sin x = n,$$

idet n er et givet reelt Tal.

For hvilke Værdier af n har Ligningen Rødder?

Eks. 1) $n = 1{,}32$; 2) $n = -\frac{1}{2}$.

3. I en firsidet Pyramide $O - ABCD$ er Grundfladen $ABCD$ et Trapez, hvor $BC \neq AD$. Fodpunktet P af Pyramidens Højde falder i Midtpunktet af Trapezets Midtlinie (d. v. s. den Linie, der forbinder Midtpunkterne af de ikke-parallelle Sider).

Idet $BC = 1$, $AD = 2$, $AB = CD = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ og $OP = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, skal man finde Pyramidens Rumfang og Overflade samt Toplansvinklerne mellem hver af Sidefladerne og Grundfladen.

Studentereksamen 1941.

Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. Vis, at Ligningen

$$4x^2 - y^2 - 40x + 12y = 0$$

fremstiller en Hyperbel, og at Ligningen

$$3y^2 - 10xy - 18y + 60x = 0$$

fremstiller to rette Linier.

Bestem Koordinaterne til de fælles Punkter for Hyperblen og Linieparret.

2. Konstruer et ind- og omskriveligt Trapez $ABCD$ $(BC \neq AD)$, naar $AD + BC = l$, og Radius i Trapezets indskrevne Cirkel er lig r, hvor l og r er givne Liniestykker. — Angiv Mulighedsbetingelse.

Beregn derpaa Trapezets Sider og Vinkler samt Radius i dets omskrevne Cirkel, naar $l = 26$ og $r = 6$.

3. Af en Hyperbel er givet det ene Brændpunkt, to Tangenter og Længden $2a$ af Førsteaksen.

Konstruer det andet Brændpunkt, Toppunkterne og Tangenternes Røringspunkter.

Studentereksamen 1941.

Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Find Ligningen for den Cirkel, der sammen med Cirklen
$$x^2 + y^2 = 169$$
har Radikalaksen
$$x + 2y = 29,$$
og som tillige gaar gennem Punktet (3, 16).

2. Undersøg og tegn Kurven
$$y = \cos 2x - 4\cos x - \frac{3}{2} \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$
Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og Linien $y = -\frac{9}{2}$, samt Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes 360^0 om Linien $y = -\frac{9}{2}$.

3. I Prismet $ABC - A_1B_1C_1$, hvor Grundfladen er Trekant ABC og $AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1$, er $\angle A_1AB = \angle BAC = 45^0$; endvidere falder A_1's Projektion paa Grundfladen i Punktet B, og $AA_1 = AC = 2a$.
Find Længden af BC og A_1C og vis, at Firkant BCC_1B_1 er et Rektangel.
Idet M betegner Midtpunktet af AA_1, skal man bevise, at Trekant MBC er et Normalsnit i Prismet, og derefter finde Normalsnittets Areal.

Studentereksamen Maj—Juni 1942.

Matematiske Opgaver I.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

---

1. 1. Juli 1940 stiftede A en Gæld paa 10000 Kr.
Denne Gæld forrentes og afdrages *dels* ved aarlige lige store Ydelser à 600 Kr., hvoraf den første falder 1. Juli 1941 og den sidste 1. Juli 1956, *dels* ved 5 lige store Ydelser, der falder hvert tredie Aar, den første 1. Juli 1944 og den sidste 1. Juli 1956.
Hvor stor maa hver af de 5 nævnte lige store Ydelser være, naar Gælden skal være fuldstændig afdraget, efter at de sidste Ydelser er betalt 1. Juli 1956? Rentefoden 5 % p. a.

2. Punkterne A, B og C paa Jordkloden, som i denne Opgave betragtes som en Kugle med Radius 6366 km, har følgende Positioner: A (10°,00 østlig Længde, 0°,00 nordlig Bredde), B (10°,00 ø. L., 34°,00 n. Br.) og C (20°,60 ø. L., 13°,83 n. Br.).
Beregn Gradstørrelsen samt Længden i km af Siderne i den sfæriske Trekant ABC.

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er
$$y = \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 4}.$$
Beregn Arealet af den lukkede Figur, som begrænses af Koordinatakserne og et Stykke af Kurven.

Studentereksamen Maj—Juni 1942.

Matematiske Opgaver II.

For den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

1. Tangenten i et vilkaarligt Punkt P af Hyperblen
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
skærer X-Aksen i T. Den rette Linie gennem P og Begyndelsespunktet skærer Linien $x = a$ i Punktet Q.
Find det geometriske Sted for Q's Projektion paa den rette Linie gennem T parallel med Y-Aksen. Angiv Kurvens Art og Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. I en regulær sekssidet Pyramide P-$ABCDEF$ har Kanterne i Grundfladen Længden a og Sidekanterne Længden $a\sqrt{2}$. P_1 er det Punkt, der ligger symmetrisk med P med Hensyn til Grundfladens Plan.
Bevis, at Polyedret (Dobbeltpyramiden) $PABCDEFP_1$ har baade en omskreven og en indskreven Kugle, og find disses Radier. Beregn endvidere alle Toplansvinklerne mellem sammenstødende Sideflader i Polyedret.

3. Konstruer en Trekant ABC af Vinkel A, denne Vinkels Halveringslinie v_A og Radius r i Trekantens indskrevne Cirkel. Angiv Mulighedsbetingelsen.
Beregn Vinkel B og Vinkel C samt Trekantens Sider, naar Vinkel $A = 60°$, $v_A = 3{,}2$ cm og $r = 1$ cm.

Studentereksamen September 1942.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver I.

1. I et vilkaarligt Punkt af Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hvis Centrum kaldes O, tegnes Kurvens Tangent. Denne Tangent skærer Akserne i Punkterne A og B.

Find Mindsteværdien af Rumfanget af den Omdrejningskegle, der fremkommer, naar Trekant AOB drejes 360° om X-Aksen.

2. I en firesidet Pyramide med Toppunkt P og med den konvekse Firkant $ABCD$ som Grundflade, hvor P's Projektion paa Grundfladen falder i Midtpunktet Q af AC, er $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 5$, $DA = 5\sqrt{3}$, $AC = 10$ og $PQ = 12$.

Bevis, at Grundfladen har en omskreven Cirkel, og at Pyramiden har en omskreven Kugle.

Beregn Pyramidens Sidekanter, disses Vinkler med Grundfladen, Sidefladernes Vinkler med Grundfladen og Radius i Pyramidens omskrevne Kugle.

3. Konstruer en spidsvinklet Trekant ABC af Vinkel A, den modstaaende Side a og Afstanden p fra B til Højdernes Skæringspunkt.

Beregn Trekantens øvrige Vinkler og Sider, naar $\angle A = 51°,37$, $a = 38{,}29$ og $p = 26{,}25$.

Studentereksamen September 1942.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver II.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er:

$$y = -\cos^2 x + \cos x + 2 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

Beregn Arealet af den Figur, der begrænses af Kurven og Linien $y = 2\frac{1}{4}$.

2. Til Parablen $y^2 = 4x$ tegnes i et vilkaarligt Punkt P Kurvens Tangent og Normal; Tangenten skærer X-Aksen i Punktet T.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem den omtalte Normal og en Linie gennem T parallel med Y-Aksen.

Skitser et Stykke af Kurven ved Hjælp af beregnede Koordinater til de Punkter, hvis Abscisser er $0, -\frac{1}{4}, -1, -2$.

3. Løs Ligningen $\cos 3x \cdot \cos x = \frac{7}{16}$.
Løs derpaa Ligningen

$$\cos 3x \cdot \cos x = a,$$

og bestem Grænserne for a.

Studentereksamen Maj–Juni 1943.
Matematisk-naturvidenskabelig Linie.

Matematik I.

1. Summen af to Terningers Rumfang er 35 cm^3, og Summen af Terningernes Overflader er 78 cm^2. Find Kantlængden i hver af de to Terninger.

2. I en Trekant ABC er Siderne $a = 5{,}24$, $b = 6{,}48$ og $c = 8{,}20$. Beregn Vinkel B og Vinkel C.

Vinkel B's Halveringslinie v_B og Vinkel C's Halveringslinie v_C skærer hinanden i Punktet O. Beregn Længderne af de Stykker, hvori O deler v_B.

3. I en Cykleudflugt deltager 4 Herrer og 5 Damer. Et Hold paa 3 Deltagere, hvoraf mindst een skal være en Herre, skal cykle i Spidsen. Paa hvor mange Maader kan Holdet udtages?

Paa hvor mange Maader kunde Holdet paa 3 Deltagere udtages, hvis der skulde være mindst een Herre og mindst een Dame paa Holdet?

I en anden Cykleudflugt deltager 4 Herrer, 5 Damer og 6 Børn. Her skal et Hold paa 4 Deltagere, hvoriblandt findes mindst een Herre, een Dame og eet Barn, cykle i Spidsen. Paa hvor mange Maader kan et saadant Hold udtages?

Studentereksamen Maj—Juni 1943.
Matematisk-naturvidenskabelig Linie.

Matematik II.

---

1. Vinkelspidserne i en Trekant er (0,0), (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Angiv Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt.

Find derpaa Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Medianerne i en Trekant, hvis ene Vinkelspids falder i (0,0), og hvis to andre Vinkelspidser er Endepunkterne af en vilkaarlig Korde gennem Brændpunktet for den Parabel, hvis Ligning er $y^2 = px$. Angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{1}{\sin x \cos x},$$

idet x varierer fra 0 til π.

Den Figur, der begrænses af X-Aksen, Kurven og Linierne $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{3\pi}{8}$, drejes 360° om X-Aksen. Beregn Rumfanget af det fremkomne Omdrejningslegeme.

3. I et retvinklet Koordinatsystem XYZ i Rummet er givet Punkterne A (8, 0, 6) og B (0, 4, 3); Begyndelsespunktet er O.

Beregn 1) Vinklen mellem OA og OB.

2) Rumfanget af Pyramiden $O—ABB_1A_1$, hvor A_1 og B_1 er A's og B's Projektioner paa henholdsvis X-Aksen og Y-Aksen.

3) Længden af den korteste Afstand CD mellem Linien AB og Z-Aksen samt Koordinaterne til C og D.

Studentereksamen. September 1943.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver I.

1. En Kugle har sit Centrum i en ret cirkulær Kegles Toppunkt og tangerer Keglens Grundflade. Bestem Keglens Toppunktsvinkel, naar Kuglefladen deler Keglen i to Legemer, hvis Rumfang er lige store.

   Beregn dernæst Forholdet mellem de to Dele, hvori Kuglefladen deler Keglens krumme Overflade.

2. Løs Ligningen

$$x^6 = 8i,$$

   idet Rødderne skal opgives paa Formen $a + ib$, hvor a og b er reelle Tal, der, hvis de er irrationale, skal være udtrykt ved Kvadratrod.

   Bestem Summen af Roddernes Kvadrater.

3. Vinkelspidserne i en Trekant er (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3). Angiv Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt. P er et vilkaarligt Punkt paa Parablen $y^2 = px$. Korderne PA og PB danner Vinkler paa henholdsvis 45° og -45° med X-Aksen.

   Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem Medianerne i Trekant PAB og angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

Studentereksamen. September 1943.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver II.

1. Tegn i samme Koordinatsystem Kurverne

$$y = e^x \quad \text{og} \quad y = e^{2x} - e^x,$$

hvor e er Grundtallet for den naturlige Logaritme.

Beregn dernæst Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af de ovennævnte Kurver samt af Linien $x = -l.\,2$.

2. I den indskrivelige Firkant $ABCD$ staar Diagonalerne AC og BD vinkelret paa hinanden; Diagonalernes Skæringspunkt er O. Endvidere er $AB = 39$, $BO = 36$ og $BC = 60$.

Beregn Gradstørrelsen af de fire Cirkelbuer, hvori Firkant $ABCD$'s omskrevne Cirkel deles af Punkterne A, B, C og D, samt Radius i Firkantens omskrevne Cirkel.

Beregn endvidere Siderne i den Firkant, hvis Sider er Tangenter til Firkant $ABCD$'s omskrevne Cirkel i Punkterne A, B, C og D.

3. Find Ligningen for den Kugleflade, som i et retvinklet Koordinatsystem XYZ i Rummet skærer XY-Planen i den Cirkel, hvis Ligning er

$$x^2 + y^2 - 20x - 18y + 156 = 0,$$

og som tillige skærer XZ-Planen i en Cirkel med Centrum i (10,0,12).

Find Ligningen for den Cirkel, hvori Kuglefladen skærer YZ-Planen.

Find sluttelig Ligningen for den Kugleflade, som gaar gennem Centrerne for de tre ovennævnte Cirkler samt gennem Koordinatsystemets Begyndelsespunkt.

Studentereksamen Maj—Juni 1944.

Matematik I.

1. Paa Ellipsen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ligger Punkterne A og B begge med Ordinaten $\frac{9}{5}$. Idet m og n er to konjugerede Diametre i Ellipsen, tegnes gennem A og B rette Linier parallelle med henholdsvis m og n.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem disse Linier, naar m og n varierer.

Angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}.$$

Find Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, X-Aksen og Linien $x = -3$, samt Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der fremkommer, naar den nævnte Figur drejes 360° om X-Aksen.

3. Konstruer Trekant ABC af Vinkel A, Siden AC og Liniestykket AB_1, hvor B_1 betegner Røringspunktet mellem AC og Trekantens indskrevne Cirkel. Angiv Mulighedsbetingelse.

Beregn dernæst de ubekendte Vinkler og Sider i Trekant ABC samt Radius i dennes indskrevne Cirkel, naar Vinkel $A = 60°,12$, $AC = 5{,}204$ og $AB_1 = 2{,}123$.

Studentereksamen Maj—Juni 1944.

Matematik II.

1. Løs Ligningen

$$\frac{a}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} = 0$$

og angiv Grænserne for a.

Find x, naar 1) $a = 0$, 2) $a = -1$, 3) $a = -\frac{3}{4}$.

2. To Punkter A og B bevæger sig paa Abscisseaksen saaledes, at A's Abscisse x_1 og B's Abscisse x_2 er bestemt ved:

$$x_1 = 2^{2t} - 3 \cdot 2^t + 2 \text{ og } x_2 = 2 \cdot (2^t - 1),$$

hvor t er Tiden. ($t \geqq 0$.)

Find 1) Punkternes Begyndelsessteder og Begyndelseshastigheder,
2) Afstanden fra A til B, naar A har den mindst mulige Abscisse, samt A's og B's Hastigheder til det paagældende Tidspunkt,
3) de Værdier af t, for hvilke A og B har samme Abscisse, samt for hver af disse Værdier Forholdet mellem de numeriske Værdier af A's og B's Hastigheder.

3. I en given Kugle med Radius R indskrives en regulær 6-sidet Pyramide.

Find Pyramidens Højde, naar dens Rumfang skal være saa stort som muligt.

Beregn dernæst Længden af alle Kanterne, Vinklen mellem Grundfladen og en Sideflade samt Vinklen mellem to sammenstødende Sideflader i den saaledes bestemte Pyramide.

KGL. DANSK GESANDTSKAB I SVERIGE, SKOLEKOMMISSIONEN.

STUDENTEREKSAMEN 1944.

MATEMATISKE OPGAVER I.

1. I Trekant ABC er AB = 13 cm, BC = 12 cm og Medianen AM = 9 cm. Beregn Trekantens Vinkler og Siden AC.

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

   Find Koordinaterne til Røringspunktet for den Tangent, der kan trækkes til Kurven fra Punktet (0,0), og beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Y-Aksen, Tangenten og det Stykke af Kurven, der ligger mellem Røringspunktet og Skæringspunktet med Y-Aksen.

3. Hvor stor skal Toppunktsvinklen i en Omdrejningskegle være, naar dens krumme Overflade har et konstant Areal k^2, og dens Rumfang skal være saa stort som muligt?

KGL. DANSK GESANDTSKAB I SVERIGE, SKOLEKOMMISSIONEN.

STUDENTEREKSAMEN 1944.

MATEMATISKE OPGAVER II.

1. Der er givet en Cirkel og en ret Linie, som skærer Cirklen uden at gaa gennem Centrum. Find det geometriske Sted for et Punkt, hvis Afstand fra den rette Linie er lig Længden af Tangenten fra Punktet til Cirklen, regnet til Røringspunktet.
   Vis, at det geometriske Sted og Cirklen har fælles Tangent i deres Fællespunkter.

2. Find x og y af Ligningerne
$$\cos x + \sin y = a$$
$$\cos^3 x + \sin^3 y = 7a^3,$$
   og angiv Mulighedsbetingelse.
   Sæt derefter specielt $a = -\frac{1}{2}$.

3. Et Ægtepar har indbudt 8 ugifte Herrer og 8 ugifte Damer til Middag. I deres Spisestue findes 9 bekvemme og 9 ubekvemme Stole, som er anbragt, skiftevis, omkring Spisebordet, og det er bestemt, at Damerne skal sidde paa de bekvemme, Herrerne paa de ubekvemme Stole.
   1) Paa hvormange Maader kan de 18 Mennesker placeres om Bordet?
   2) Paa hvormange Maader kan Placeringen ske, naar Værten skal sidde paa en bestemt Plads?
   3) Paa hvormange Maader kan Placeringen ske, naar Værten skal sidde paa en bestemt Plads, og Værtinden hverken maa sidde paa hans højre eller venstre Side?

   Efter Middagen skal de 18 Mennesker fordeles i 3 mindre Stuer, saaledes at der i hver Stue skal være 3 Damer og 3 Herrer. Paa hvormange Maader kan Fordelingen ske, naar Vært og Værtinde ikke maa komme i samme Stue?

Studentereksamen September 1944.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver I.

---

1. P er et vilkaarligt Punkt af Hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

og N er Skæringspunktet mellem Y-Aksen og Hyperblens Normal i P. Linien gennem Begyndelsespunktet O og Hyperbelpunktet P tegnes tillige med Linien gennem N parallel med X-Aksen.

Find Ligningen for det geometriske Sted for disse Liniers Skæringspunkt, idet P gennemløber Hyperblen. Angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. En Kugle har Centrum O og Radius r. En Omdrejningskegle har Toppunkt i O, medens dens Grundfladecirkel er en Lillecirkel paa Kuglen.

Bestem Keglens Toppunktsvinkel og Rumfang, naar dette sidste er saa stort som muligt.

Bestem i det fundne Maksimumstilfælde den nøjagtige Værdi af Forholdet mellem Arealerne af de to Kalotter, hvori Keglens Grundflade deler Kuglefladen.

3. Find

$$\int_0^2 (e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}ex)\,dx \text{ og } \int_0^2 (e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}ex)^2\,dx,$$

hvor e betegner Grundtallet for den naturlige Logaritme.

Studentereksamen September 1944.

Sygeeksamen.

Matematiske Opgaver II.

---

1. Løs Ligningen

$$2 \sin 2x + 3 \sin^2 x = n$$

og bestem Grænserne for n.

Eksempler: 1) $n = 3$, 2) $n = 1\frac{1}{2}$ og 3) $n = 0$.

2. Konstruer et ligebenet Trapez omskrevet om en given Cirkel med Radius 3 cm, saaledes at Forholdet mellem Trapezets parallelle Sider er 1 : 4.

Beregn Trapezets Sider og Vinkler, dets Diagonaler samt Radius i dets omskrevne Cirkel.

3. En regulær tresidet Pyramide O—ABC har Sidekanten $a\sqrt{3}$, medens Kanten i Grundfladen er a.

Beregn Pyramidens Højde, Vinklen mellem en Sidekant og Grundfladen samt den korteste Afstand mellem en Sidekant og den modstaaende Grundfladekant.

Gennem hver Sidekant lægges en Plan parallel med den modstaaende Grundfladekant. Bevis, at disse tre Planer sammen med Grundfladens Plan begrænser et regulært Tetraeder.

Studentereksamen Maj—Juni 1945.

Matematiske Opgaver I.

1. Løs Ligningen

$$\sin 3x - a \cdot \cos 2x \cdot \sin x + \sin x = 0$$

og angiv Mulighedsbetingelser.

Find x, naar 1) $a = 6$, 2) $a = 0{,}5$, 3) $a = -2$.

2. Bevis, at Parablerne

$$y^2 = 2x \text{ og } x^2 = 8y - 12$$

rører hinanden (d. v. s. i et fælles Punkt har en fælles Tangent).

Find dernæst Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Parablerne og Y-Aksen.

Find sluttelig Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der dannes, naar den nævnte Figur drejes 360° om X-Aksen.

3. Et Polyeder er sammensat af et tresidet ret Prisme $ABC - A_1B_1C_1$ ($AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1$), hvis Grundflade er en ligesidet Trekant med Siden $3a$, og hvis Højde er $2a$, og en tresidet Pyramide $D - ABC$, hvori Sidekanterne er $2a$.

1) Beregn Polyedrets Toplansvinkler.

2) Vis, at Polyedret har en omskreven Kugle, og find dennes Radius.

Studentereksamen Maj—Juni 1945.

Matematiske Opgaver II.

1. I en ligebenet Trekant med Grundlinie g og tilhørende Højde h indskrives et Rektangel med to Vinkelspidser paa g og een paa hvert af Benene. Rektanglet foldes, saa det danner den krumme Overflade af en Omdrejningscylinder, hvis Højde er den af Rektanglets Sider, der er parallel med h.

   Bestem denne Side i Rektanglet saaledes, at den nævnte Cylinders Rumfang bliver størst muligt, og angiv Rumfangets Størsteværdi.

2. I et Koordinatsystem er givet Cirklen $x^2 + y^2 = 4$; en variabel Tangent til denne skærer Koordinatakserne i A og B.

   Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af AB.
   Bestem Asymptoterne for det geometriske Sted og tegn Kurven.

3. I en Trekant ABC skærer Vinkel B's Halveringslinie Siden AC i Punktet E, og Halveringsliniens Forlængelse skærer Trekantens omskrevne Cirkel i D.

   Konstruer Trekanten, naar AC og DE er givne, og man tillige ved, at $AB:BC = p:q$, hvor p og q er givne Liniestykker ($p > q$).
   (Diskussion kræves ikke).

   Beregn Trekantens Vinkler og dens ubekendte Sider, naar $AC = 14$, $DE = 2{,}6$ og $AB:BC = 4:3$.

KGL. DANSK GESANDTSKAB I SVERIGE. SKOLEKOMMISSIONEN.

STUDENTEREKSAMEN 1945.

MATEMATIK I.

1. For hvilke Værdier af x tilfredsstilles Ulighederne

$$0 < \frac{x^2}{x^2 - 9} < 4.$$

2. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

Find Ligningerne for de Tangenter, der indeholder Punktet (2,0).
Find endelig Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven og den fundne skraa Tangent.

3. Parablen $y^2 = 4x$ er beliggende i et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunktet O. En ret Linie, der bevæger sig saaledes, at den stadig er parallel med X-Aksen, skærer Parablen i P og den rette Linie $x = 1$ i Q. Find det geometriske Sted for Centrum i Trekant OPQ's omskrevne Cirkel.

KGL. DANSK GESANDTSKAB I SVERIGE. SKOLEKOMMISSIONEN.

STUDENTEREKSAMEN 1945.

MATEMATIK II.

1. I et Trapez $ABCD$ ($AB \neq CD$) er O Diagonalernes Skæringspunkt. Konstruer Trapezet, idet AB, CD, AO og BO er givne Liniestykker. Beregn de ubekendte Sider samt Diagonalerne og Vinklerne, naar $AB = 17$, $CD = 10$, $AO = 15$ og $BO = 8$.

2. I Trekant ABC er Vinkel B givet; tillige er $2 \sin B = \sin A + \sin C$. Angiv en Metode til Bestemmelsen af Vinklerne A og C. Eks. $\angle B = 45°$.

3. En Omdrejningskegleflades Toppunkt O er beliggende paa en Kugleflade; Keglefladens Akse gaar igennem Kuglens Centrum. Kuglens Overflade deles af Keglefladen i 2 Dele, af hvilke den, der indeholder O, har dobbelt saa stort et Areal, som den Del af Omdrejningskeglefladen, der ligger inden for Kuglefladen. Find
   a) Keglefladens Toppunktsvinkel.
   b) Forholdet mellem Arealerne af de Dele, hvori Kuglefladen deles af Keglefladen.
   c) Forholdet mellem Rumfangene af de Dele, hvori Kuglen deles af Keglefladen.

Studentereksamen.

Reserveopgave.

Matematiske Opgaver I.

1. Find x af Ligningen

$$\sin 3x = 3 \sin x (1 - 4 \cos^2 x).$$

2. Et Punkt bevæger sig paa X-Aksen saaledes, at Accelerationen er lig $12t - 38$, hvor t er Tiden. Til Tiden $t = 0$ befinder Punktet sig i $(-50,0)$ og har Hastigheden 55.

   Bestem Bevægelsesligningen.

   Til hvilke Tidspunkter passeres Nulpunktet?

   Til hvilke Tidspunkter er Hastigheden 0?

   Mellem hvilke Tidspunkter er Bevægelsen tilbagegaaende?

3. I en Plan er givet et Kvadrat $A_1B_1C_1D_1$ med Siden a. I A_1 og C_1 oprejses Normalerne til Planen til samme Side. Ud ad Normalerne afsættes $A_1A = C_1C = a$.

   Der tegnes to Pyramider begge med Grundflade $A_1B_1C_1D_1$ og Toppunkt i henholdsvis A og C.

   Pyramiderne har et Legeme fælles.

   Vis, at dette Legeme er en regulær Pyramide, og beregn dets Rumfang og Overflade samt Radius i dets indskrevne og i dets omskrevne Kugle.

Studentereksamen.

Reserveopgave.

Matematiske Opgaver II.

1. Der er givet en Kugle med Radius r. Find Højden i en Omdrejningskegle, der kan omskrives om denne Kugle, og hvis Rumfang er saa lille som muligt.

2. Vis, at Cirklerne
$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$$
og
$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + 1 = 0$$
skærer hinanden ortogonalt (d. v. s. Tangenterne til Cirklerne i hvert af Skæringspunkterne staar vinkelret paa hinanden).

3. Konstruer en Trekant ABC af Siden AB og Vinkel A, naar det tillige er givet, at Vinkel C's Halveringslinie deler Siden AB i Stykker, der forholder sig som $p : q$, hvor p og q er givne Liniestykker.
   Beregn dernæst Trekantens ubekendte Sider og Vinkler, naar $p : q = 3 : 2$, $AB = 4{,}74$ cm og $\angle A = 40°{,}43$.

Studentereksamen August 1945.
Sygeeksamen. (Ekstraordinær Eksamen).

Matematik I.

1. I Ellipsen

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$$

trækkes gennem Punktet $(0, -2)$ de Linier, der er Normaler til Ellipsen. Find disse Liniers Ligninger.

2. I Ligningerne

$$a \cdot 2^x + b \cdot 3^y = 8$$

og

$$a^2 \cdot 2^{3x} + b^2 \cdot 3^y = 50$$

betegner a og b to Konstanter.

Bestem a og b saaledes, at Ligningerne har Rodsættet $(x, y) = (0, 0)$, og løs derefter Ligningerne fuldstændigt.

3. Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven

$$y = \frac{lx}{\sqrt{x}},$$

X-Aksen og den rette Linie $x = e^2$, hvor e er Grundtallet for den naturlige Logaritme.

Beregn endvidere Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar man drejer den omtalte Figur 360° om X-Aksen.

Studentereksamen August 1945.

Sygeeksamen. (Ekstraordinær Eksamen).

Matematik II.

1. Undersøg og tegn Kurven

$$y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 4}.$$

Kurven skæres med Linien $y = p$, hvor p har en saadan Værdi, at der bliver 2 Skæringspunkter.

Angiv de Værdier af p, for hvilke denne Betingelse er opfyldt.

2. Beregn i en Trekant ABC Vinklerne A og B samt Siderne, naar $\angle C = 120°$, $CA + CB = 9{,}5$ cm og $R = 5$ cm, idet R betegner Radius i Trekantens omskrevne Cirkel.

3. I en 6-sidet Pyramide $O - ABCDEF$ er Grundfladen $ABCDEF$ en regulær Sekskant med Siden a. Sidefladen OCD er en ligesidet Trekant, der staar vinkelret paa Grundfladen.

Find Pyramidens Sidekanter.

Gennem Diagonalen BE i Grundfladen lægges et plant Snit vinkelret paa Sidefladen OAF. Snittet skærer Sidekanterne OA og OF i henholdsvis Q og R.

Find Siderne i Firkant $BQRE$ samt Firkantens Areal.

Studentereksamen Oktober 1945.
(Ekstraordinær Eksamen).

Matematiske Opgaver I.

---

1. Konstruer en Trekant ABC af Vinkel A, dennes Halveringslinie v_A og Trekantens Omkreds.

Angiv Mulighedsbetingelse.

2. Bestem en saadan positiv Værdi af a, at Ligningen

$$4x^2 - y^2 - 24x + ay + 27 = 0$$

fremstiller to rette Linier.

Find (for den fundne Værdi af a) x og y af Ligningerne

$$\begin{aligned} & 4x^2 - y^2 - 24x + ay + 27 = 0 \\ \text{og} \quad & 9x^2 + 18y^2 - 162 = 0. \end{aligned}$$

3. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \left[\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \cdot \left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Beregn Arealet af den lukkede Figur, som begrænses af Kurven og Koordinatakserne.

Beregn endvidere Rumfanget af det Legeme, der fremkommer, naar den omtalte lukkede Figur drejes 360° om x-Aksen.

Studentereksamen Oktober 1945.
(Ekstraordinær Eksamen).

Matematiske Opgaver II.

---

1. Givet Parablen $y^2 = 2x$ og den rette Linie $x = 2$. En vilkaarlig ret Linie l gennem (0,0) skærer Parablen i Punktet A (forskelligt fra (0,0)) og den rette Linie i B.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af Liniestykket AB, naar l drejer sig om (0,0).

Skitser den fundne Kurve.

2. En Kugle har sit Centrum i Skæringspunktet for en given Ternings Diagonaler og skærer hver af Terningens Sideflader i en Cirkel.

Naar $\frac{1}{n}$ af Kuglens Overflade ligger uden for Terningen, hvor stor en Del af Kuglens Rumfang ligger saa udenfor.

3. I den spidsvinklede Trekant ABC er Siden $a = 32{,}75$, Radius i den omskrevne Cirkel 18 og Radius i den indskrevne Cirkel 8.

Beregn Trekantens Vinkler og dens ubekendte Sider.

Studentereksamen Maj—Juni 1946.

Matematik I.

1. Undersøg og tegn Kurven

$$y = \sin^2 x - 2 \sin x + \tfrac{3}{4} \text{ i Intervallet } 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Beregn Arealet af hvert af de Omraader, der begrænses af Kurven og Linien $y = \frac{3}{4}$.

2. Vis, at Ligningen

(I) $$3x^2 + 12y^2 - 13xy + 27x - 36y = 0$$

fremstiller to rette Linier, og at Ligningen

(II) $$x^3 + xy^2 - 25x - x^2 - y^2 + 25 = 0$$

fremstiller en ret Linie og en Cirkel.

Find dernæst Koordinaterne til Skæringspunkterne mellem I og II.

3. En Omdrejningskegleflade, hvis Toppunktsvinkel er 120°, skæres af en Plan i en ligesidet Hyperbel (ɔ: Hyperblens Førsteakse er lig dens Andenakse).

Beregn den spidse Vinkel, som Hyperblens Førsteakse danner med Keglefladens Akse.

Idet Hyperblens Førsteakse er lig $\sqrt{6}$, skal man dernæst beregne Afstanden fra Keglefladens Toppunkt til Skæringspunktet mellem Keglefladens Akse og Forlængelsen af Hyperblens Førsteakse.

Studentereksamen Maj—Juni 1946.

Matematik II.

1. P er et vilkaarligt Punkt paa Parablen $y^2 = px$. Tangenten i P skærer Y-Aksen i A, og Normalen i P skærer X-Aksen i B.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem AB og en Linie gennem P parallel med Parablens Akse.

Angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. En Kugle med Radius 5 cm overskæres af to parallelle Planer, hvis Afstand er 1 cm, og som ligger til samme Side for Centrum. Bestem Planernes Afstand fra Centrum saaledes, at Rumfanget af den Del af Kuglen, der afskæres mellem Planerne, bliver lige saa stor en Del af hele Kuglens Rumfang, som Overfladen af det mellem Planerne liggende Kuglebælte bliver af hele Kuglens Overflade.

3. Konstruer en omskrivelig Firkant $ABCD$ af Vinkel B og den indskrevne Cirkels Radius r, naar man tillige ved, at $AB:BC:CD = m:n:p$, hvor m, n og p er givne Liniestykker. (Diskussion kræves ikke).

Beregn Firkantens ubekendte Vinkler, naar Vinkel $B = 120°$, og $AB:BC:CD = 2:3:4$.

Studentereksamen.
Mat.-nat.
Sygeeksamen, September 1946.

Matematik I.

---

1. I Parablen $y^2 = 4x$ tegnes en vilkaarlig Korde, der skærer Parablen i $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ og $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$. Parablens Tangent i A og dens Tangent i B tegnes. Tangenterne skærer hinanden i C. Bevis, at Arealet af $\triangle\ ABC$ er lig $\frac{|(y_1 - y_2)^3|}{16}$

2. Bestem a saaledes, at Linierne:

$$
\begin{array}{ll}
ax - 4y + 6 = 0 & \text{(I)} \\
3x + (a - 2)\,y - 9 = 0 & \text{(II)} \\
ax - y - 3 = 0 & \text{(III)}
\end{array}
$$

skærer hinanden i eet Punkt, og find dette.

Find dernæst Ligningen for en fjerde Linie gennem dette Punkt, naar den sammen med (III) skal skære X-Aksen i et Punktpar, der er harmonisk forbundet med det Punktpar, hvori (I) og (II) skærer X-Aksen.

3. I et Trapez $ABCD$, hvor $AD \neq BC$, er $\angle\ A = 60°$, $\angle\ D = 40°$, $AB + CD = 18{,}78$ og $BC + AD = 24{,}26$. Beregn Trapezets Sider og Areal.

Studentereksamen.

Mat.-nat.

Sygeeksamen, September 1946.

Matematik II.

1. Undersøg og tegn Kurven $y = \sin x \sqrt{\cos x}.\left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

Find dernæst Arealet af en af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurven og X-Aksen. Find endelig Rumfanget af det Omdrejningslegeme, der dannes, naar den betragtede Figur drejes 360° om X-Aksen.

2. Konstruer en indskrivelig Firkant $ABCD$, hvis Diagonaler skærer hinanden i et Punkt O saaledes, at AO er Vinkelhalveringslinie i $\triangle ABD$, BO Median i $\triangle ABC$ og $BO = 3 \cdot DO = 3p$, hvor p er et givet Liniestykke.

3. I en Pyramide $O - ABCD$ er Grundfladen $ABCD$ et Kvadrat med Siden 6. Sidefladen OBC er en ligesidet Trekant, der staar vinkelret paa Grundfladen $ABCD$.

Beregn Pyramidens Rumfang og Toplansvinklerne mellem Grundfladen og enhver af Sidefladerne.

Beregn sluttelig den korteste Afstand mellem 1) AB og OC samt mellem 2) AB og OD.

Studentereksamen, Maj—Juni 1947.

Matematik I.

1. P er et Punkt paa Parablen $y^2=px$. Brændstraalen FP forlænges ud over P til S, saaledes at $FP=PS$. N er Skæringspunktet mellem Parablens Akse og Parabelnormalen i P.

   Find Ligningen for det geometriske Sted for Midtpunktet af SN, idet P gennemløber Parablen, og angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

2. Undersøg og tegn Kurven

$$y=\tfrac{1}{6}(x^3-3x^2-3x+9).$$

   Bestem Røringspunkterne for de Kurvetangenter, der danner Vinkler paa 45° og 135° med X-Aksen, og vis, at disse Røringspunkter ligger paa en ret Linie l.

   Find sluttelig Arealet af den ene af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurven og Linien l.

3. I en regulær, firsidet Pyramide O-ABCD, hvis Grundfladekanter og Sidekanter alle er a, er M Midtpunktet af Kanten OA og N Midtpunktet af Kanten CD. Vis, at Liniestykket MN er parallelt med Sidefladen OBC, og find dets Længde samt de Vinkler, det danner med Sidekanterne OA, OB, OC og OD.

Studentereksamen, Maj—Juni 1947.

Matematik II.

1. Ligningen

$$x^5+5x^4+4x^3-8x^2-4x+4=0$$

har to reelle Dobbeltrødder. Løs Ligningen.

2. **Givet Ellipsen**

$$x^2+3y^2=3.$$

A er et løbende Punkt paa Ellipsen i første Kvadrant, B det diametralt modsatte Punkt, medens C er Skæringspunktet mellem Y-Aksen og Ellipsens Normal i A.

Bestem den største Værdi, som Trekant ABC's Areal kan faa.

Vis, at Siden BC i dette Tilfælde er Tangent til Ellipsen.

3. Find Højden h_a i Trekant ABC udtrykt ved den omskrevne Cirkels Radius R og Vinklerne B og C.

Idet $h_a=3$, $R=2{,}5$ og $\angle A=66^\circ{,}67$, skal man beregne Trekantens ubekendte Vinkler og dens Sider.

Studentereksamen. September 1947. Sygeeksamen.

Matematik. I.

1. I en Kugle med Radius r indskrives to Omdrejningskegler, hvis fælles Grundflade er et plant Snit i Kuglen.
   Keglerne ligger paa hver sin Side af Snittet.
   Bestem Keglernes Højder, saaledes at Differensen mellem Keglernes Rumfang bliver saa stor som mulig.

2. I en indskrivelig Firkant $ABCD$ er Siden $AB = 32{,}00$, Siden $BC = 34{,}46$ og Diagonalen AC = Diagonalen $BD = 36{,}92$. Desuden er Vinkel A en stump Vinkel.
   Beregn Firkantens Vinkler, Radius i dens omskrevne Cirkel og dens to ubekendte Sider.

3. Konstruer en Trekant ABC af a, $b—c$ og r_a, hvor r_a er Radius i den af Trekantens ydre Røringscirkler, der rører Siden a. (Diskussion kræves ikke).

Studentereksamen. September 1947. Sygeeksamen.

Matematik. II.

1. Løs Ligningen

$$2\ \cos^2 x + \frac{1}{16} = \sin^2 2x.$$

2. Undersøg Funktionen

$$y = \frac{4x^2 - 16x - 9}{x^2 - 4x + 4},$$

og tegn dens grafiske Billede.
Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Koordinatakserne og Kurven.

3. I et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunkt O er A Punktet (0,2). C er Centrum for en Cirkel, der rører Y-Aksen i O, og R betegner Røringspunktet for den anden Tangent fra A til Cirklen.
Man skal finde det geometriske Sted for Højdernes Skæringspunkt i Trekant ORC, idet C gennemløber X-Aksens Punkter.

Studentereksamen Maj—Juni 1948.

Matematik I.

1. Undersøg og tegn den Kurve, hvis Ligning er

$$y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

Beregn Arealet af den lukkede Figur, der begrænses af Kurven, X-Aksen og de rette Linier $x = 2$ og $x = 5$.

2. En Trekant har Vinkelspidserne $A\,(-a, 0)$, $B\,(0, b)$ og $C\,(a, 0)$. En ret Linie bevæger sig saaledes, at den stadig er vinkelret paa X-Aksen; den skærer Linien AB i P og Linien BC i Q.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem CP og AQ, og angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

3. I Parallelogrammet $ABCD$ er Siden $AB = 9{,}894$, Siden $BC = 5{,}736$ og Diagonalen $AC = 7{,}652$.

Centrerne for Trekant ABC's og Trekant ACD's indskrevne Cirkler kaldes henholdsvis P og R; P projiceres paa AC i Q og R paa AC i S.

Beregn Sider, Vinkler og Diagonaler i Firkant $PQRS$.

Studentereksamen Maj—Juni 1948.

Matematik II.

1. En Gæld er stiftet 2. Januar 1930. Den forrentes og afdrages ved, at der hvert Aar, første Gang 2. Januar 1931, sidste Gang 2. Januar 1951, betales en Ydelse paa 6 pCt. af den oprindelige Gæld og ved, at der 2. Januar 1940 desuden betales en ekstra Ydelse paa 2000 Kr. Efter at den aarlige Ydelse er betalt 2. Januar 1951, er Gælden fuldstændig afdraget.
   Hvor stor var Gælden? Rentefoden 5 pCt. p. a., helaarlig Rentetilskrivning.

2. I et regulært Tetraeder $ABCD$ med Sidekanten 2 er M Midtpunktet af AB og N det Punkt paa CD, der er saaledes beliggende, at $CN = \frac{3}{4}$.
   Beregn Længden af MN samt Toplansvinklen mellem Planerne ABC og ABN.
   Angiv Forholdet mellem Rumfangene af de Tetraedre, hvori det regulære Tetraeder deles af Planen ABN.

3. Konstruer en Trekant ABC af Vinkel A, Højden h_b og Medianen m_a. Angiv Mulighedsbetingelser og gør Rede for Antallet af Løsninger.

Studentereksamen September 1948.
Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. Beregn Arealerne af de lukkede Figurer, der begrænses af Kurverne

$$x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \quad \text{og} \quad y^2 = 2(x - 2),$$

samt Rumfangene af de Legemer, der fremkommer, naar de nævnte Figurer drejes 180° om X-Aksen.

2. Paa en vandret Plan p ligger en Kugle med given Radius r. Paa p staar tillige en Omdrejningskegle, saaledes at dennes Grundflade ligger i p. Kuglen og Keglen har ingen Punkter fælles. Radius i Keglens Grundflade er lig med r og Keglens Højde lig med $2r$.

Idet x betegner Afstanden mellem p og en Plan q, der er parallel med p, skal x bestemmes saaledes, at Summen af Arealerne af de Cirkler, hvori q skærer Kuglen og Keglen, bliver saa stor som mulig.

Idet t betegner Afstanden mellem p og en Plan q_1, der er parallel med p, skal man bestemme t saaledes, at Rumfanget af det Kugleafsnit, der ligger mellem p og q_1, bliver lige saa stort som Rumfanget af den Keglestub, som q_1 afskærer af Keglen.

3. Fra et Punkt E paa Ellipsen

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

med Centrum O nedfældes de vinkelrette paa Ellipsens Ledelinier; Fodpunkterne paa disse betegnes L_1 og L_2.

Ledelinien, hvorpaa L_1 ligger, skærer X-Aksen i Punktet A. Midtpunkterne af EL_1 og EL_2 kaldes henholdsvis M og N.

Find Ligningen for det geometriske Sted for Skæringspunktet S mellem Diagonalerne i Firkant $OAMN$, naar E gennemløber Ellipsen.

Angiv den fundne Kurves Art og dens Beliggenhed i Koordinatsystemet.

Studentereksamen September 1948.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Undersøg og tegn Kurven

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

Find Arealet af den lukkede Figur, som begrænses af Kurven, X-Aksen og Linien $x = \frac{\pi}{4}$.

2. I den konvekse Firkant $ABCD$ er $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, $DA = 8$ og $BD = 9$.

Beregn Vinklerne mellem Diagonalerne.

3. Givet en ligesidet Trekant med Siden a. En Trekant, hvis Sider er lig med Højderne i den givne Trekant, konstrueres. Derpaa konstrueres en Trekant, hvis Sider er lig med Højderne i den først konstruerede Trekant, og derefter tænkes efter den angivne Fremgangsmaade Konstruktionerne af ligesidede Trekanter fortsat ubegrænset.

Find Summen S af den uendelige Række, hvis n^{te} Led er Arealet af den n^{te} ligesidede Trekant, idet første Led er Arealet af den givne Trekant.

Idet S_n betegner Summen af de n første Led af den uendelige Række, skal man bestemme, fra hvilket n at regne

$$S - S_n < \frac{a^2\sqrt{3}}{25}.$$

Studentereksamen maj—juni 1949.

Matematik I.

1. P er et vilkårligt punkt på parablen $y^2 = px$, og Q er skæringspunktet mellem X-aksen og parablens normal i P. Projektionen af P på Y-aksen kaldes N.

Idet P gennemløber parablen, skal man finde ligningen for det geometriske sted for N's projektion på PQ's halveringsnormal (midtnormal).

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

2. En omdrejningskeglefIade skæres af en kugleflade med centrum i keglefladens toppunkt i to cirkler, hvis planer sammen med keglefladen begrænser en dobbeltkegle.

Vis, at dobbeltkeglens krumme overflade er mellemproportional mellem overfladerne af de to kuglekalotter, hvori den ene af de to cirkler deler kuglefladen.

Bestem dernæst keglefladens toppunktsvinkel således, at dobbeltkeglens rumfang er mellemproportional mellem rumfangene af de to kugleafsnit, hvori den omtalte cirkels plan deler kuglen.

3. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \qquad \text{i intervallet } 0 < x < \pi.$$

Beregn arealet af den lukkede figur i første kvadrant, der begrænses af kurven, X-aksen og kurvens tangent i det punkt, hvis abscisse er $\frac{\pi}{4}$.

Beregn endvidere rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den nævnte figur drejes 360° om X-aksen.

Studentereksamen maj—juni 1949.

Matematik II.

1. I en konvergent uendelig kvotientrække med positive led er produktet af første og andet led lig med summen af første og tredie led.

Bestem rækkens kvotient og dens første led, når rækkens sum skal være så lille som mulig.

2. Konstruer en trekant ABC af radius R i dens omskrevne cirkel og liniestykkerne BD og CD, idet D er skæringspunktet mellem siden BC og vinkelhalveringslinien for vinkel A.

Angiv mulighedsbetingelse og antallet af løsninger.

Beregn trekantens vinkler og sider, når $R = 2\sqrt{3}$, $BD = 4$ og $CD = 2$.

3. En ellipse fremkommer som snit i en omdrejningskegleflade med toppunktsvinklen $90°$. Ellipsens akser er $8\sqrt{2}$ og 8.

Bestem snitplanens vinkel med keglefladens akse, og find længden af stykket på denne akse fra keglefladens toppunkt til planens skæringspunkt med aksen.

Find endvidere afstandene fra keglefladens toppunkt til endepunkterne af ellipsens lilleakse.

Studentereksamen september 1949.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. En halvcirkel med den begrænsende diameter $AB = 2r$ er givet. Idet P er et variabelt punkt på halvcirklen og Q dette punkts projektion på AB, skal man bestemme vinklerne i den retvinklede trekant APQ således, at højden på hypotenusen er så stor som mulig, og angive højdens størsteværdi.

2. I trekant ABC er vinkel $A = 68{,}^{\circ}46$, siden $AB = 5{,}465$ og siden $AC = 7{,}885$. Vinkel B's halveringslinie skærer trekantens omskrevne cirkel i punktet D.
   Beregn firkant $ABCD$'s vinkler og ubekendte sider, den omskrevne cirkels radius og diagonalen BD.

3. A er et vilkårligt punkt på hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gennem A tegnes en ret linie l parallel med den ene af hyperblens asymptoter; l skærer den hyperbeldiameter, der er konjugeret med diameteren gennem A, i punktet S.
   Find ligningen for det geometriske sted for S, når A gennemløber hyperblen.
   Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

Studentereksamen september 1949.
Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Find ligningerne for de tangenter, der kan tegnes fra punktet $(-4, -9)$ til hyperblen $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Beregn dernæst arealet af den konvekse firkant, der begrænses af de nævnte tangenter samt hyperblens asymptoter.

2. Find x af ligningen

$$2\sin^2 x + 3\sin^2 2x = 2(1 + \sin 2x).$$

3. Undersøg og tegn for $x \geqq 1$ den kurve, hvis ligning er

$$y = x^2\left(\tfrac{3}{2} - l.x\right),$$

hvor $l.x$ er den naturlige logaritme af x.

Beregn dernæst arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, X-aksen samt linierne $x = 1$ og $x = e$, hvor e er grundtallet for den naturlige logaritme.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1950

Matematik I.

1. Find x af ligningen

$$x^2 - (3 - 2i)x + (5 - i) = 0.$$

Idet α og β betegner de fundne rødder, skal man danne en ny andengradsligning $x^2 + Ax + B = 0$, hvis rødder er $\frac{1}{\alpha}$ og $\frac{1}{\beta}$.

Såvel α og β, som A og B skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn den kurve, hvis ligning er

$$y = \frac{x - 3}{x + 3}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og koordinatakserne.

Den lukkede figur, der begrænses af kurven, Y-aksen samt linierne $y = 1$ og $x = 3$, drejes 360° om linien $y = 1$. Beregn rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme.

3. Løs ligningen

$$a(\cos x + \sin x) = \sin x \cos 2x,$$

idet diskussion kræves.

Eksempel: $a = -\frac{1}{2}$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1950

Matematik II.

1. Tangenterne fra punktet $N(0,5)$ til ellipsen

$$9\,x^2 + 25\,y^2 = 225$$

rører denne i punkterne P og Q.

Vis, at trekant NPQ's omskrevne cirkel går gennem ellipsens brændpunkter.

Find desuden den spidse vinkel mellem ellipsetangenten og cirkeltangenten i P.

2. I en regulær firesidet pyramide er grundfladens kant a og pyramidens højde $2a$. En plan parallel med grundfladen skærer pyramidens overflade i et kvadrat, hvis indskrevne cirkel er den ene grundflade i en omdrejningscylinder, der har sin anden grundflade beliggende i pyramidens grundflade.

Bestem cylinderens højde, således at dens rumfang bliver så stort som muligt, og angiv rumfangets størsteværdi.

3. Konstruer en spidsvinklet trekant ABC af vinkel A og radius R i trekantens omskrevne cirkel, når det tillige er givet, at afstandene fra den omskrevne cirkels centrum O til siderne b og c skal have forholdet $p : q$, hvor p og q er givne liniestykker.

Idet vinkel $A = 62^\circ{,}80$, $R = 3{,}456$, $p = 1$ og $q = 2$, skal man beregne de vinkler, hvori AO deler vinkel A.

Beregn dernæst trekant ABC's ubekendte vinkler og sider.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1950

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$x^6 + 4x^4 + x^2 + 4 = 0.$$

Idet de fundne rødder kaldes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 og x_6, skal man finde værdien af

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3.$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{3x^2}{(x^3 - 1)^2}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, X-aksen samt $x = -a$, hvor $a > 0$.

Find grænseværdien for det fundne arealtal, når a går mod uendelig.

3. En trekant ABC er beliggende i et retvinklet koordinatsystem. Siderne AB og BC ligger på linier, hvis ligninger er henholdsvis

$$y - 8x = 65 \quad \text{og} \quad y + 8x = 65.$$

Midtpunktet af AC er $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{29}{3}\right)$.

Find vinkelspidsernes koordinater samt ligningen for trekantens indskrevne cirkel.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1950

Sygeeksamen.

Matematik II.

1. På hyperblen

$$x^2 - y^2 = 4$$

ligger punktet P, hvis projektion på Y-aksen kaldes Q. Hyperblens toppunkter er $A\,(2,0)$ og $B\,(-2,0)$.

Find ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de rette linier PA og QB, idet P gennemløber hyperblen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

2. I en ligesidet trekant ABC med siden a er O medianernes skæringspunkt. Gennem O tegnes normalen til trekantens plan. På denne normal afsættes $OD = OE = a$, således at D og E ligger på hver sin side af trekant ABC's plan.

Find toplansvinklerne i polyedret $ABCDE$.

3. Konstruer trekant ABC af den omskrevne cirkels radius R, siden $AB = R\sqrt{3}$ og højden h_a. Diskussion kræves.

Beregn sider og vinkler i trekant ABC, når $R = 5$ og $h_a = 4$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1951.

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$a \cos 2x + a \sin 2x = \sqrt{2},$$

og bestem grænserne for a.

Eksempler: [1]) $a = 1$; [2]) $a = \sqrt{2}$; [3]) $a = -\sqrt{2}$.

2. P er et vilkårligt punkt i 1. kvadrant på hyperblen $x^2 - y^2 = 4$, medens Q er dette punkts projektion på X-aksen, og T er skæringspunktet mellem hyperbeltangenten i P og X-aksen. Toppunktet (2,0) kaldes A.

Ved en drejning på 360° om X-aksen frembringes af hyperbelbuen AP og liniestykket PQ et omdrejningslegeme, hvis rumfang kaldes V_1, og af liniestykkerne TP og PQ et andet omdrejningslegeme, hvis rumfang kaldes V_2.

Find forholdet mellem V_1 og V_2 udtrykt ved P's abscisse.

Bestem til sidst abscissen til P, når forholdet er $\frac{8}{9}$.

3. Konstruer en indskrivelig konveks firkant $ABCD$, hvori diagonalen BD halverer vinkel D, af siden $AB = a$ og diagonalen $AC = b$, når det tillige er givet, at diagonalernes skæringspunkt O deler AC således, at $AO : OC = p : q$, idet a, b, p og q er givne liniestykker.

Beregn dernæst firkantens ubekendte sider og vinklerne, når $a = 7{,}642$, $b = 9{,}348$, $p = 2$ og $q = 3$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1951.

Matematik II.

1. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og linierne $y = x + 1$, $x = -1$ og $x = 1$.

2. Bestem de værdier af x, for hvilke brøken

$$\frac{x^4 + 1}{2x^8 + x^4 + 1}$$

antager samme værdi som den reciprokke (omvendte) brøk.

De komplekse værdier angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

3. $ABCD - MNPQ$ er et retvinklet parallelepipedum, hvor $AM \neq BN \neq CP \neq DQ$, og hvor længderne af AB, AD og AM er henholdsvis 4, 4 og 3.

Bestem rumfang og overflade af det tetraeder, der har hjørnespidser i A, B, C og Q.

Beregn endvidere dette tetraeders toplansvinkler langs kanterne BA, BC og BQ samt vinklen mellem kanterne AC og BQ.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1951.

Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. Løs ligningerne

$$x^2 - (2 - 3i)\,x + 1 - 3i = 0$$

$$\text{og}\quad x^4 - (1 - 3i)\,x^3 + 8ix - 24 - 8i = 0,$$

når det er givet, at de har en fælles rod.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} - 1.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, som begrænses af kurven, dennes tangent i punktet med abscissen 3, linien $y = -1$ og linien $x = 6$.

3. Konstruer trekant ABC af siden c, højden h_a på siden a samt radius r_a i den af trekantens ydre røringscirkler, som rører siden a.

(Diskussion kræves ikke).

Beregn trekantens vinkler og ubekendte sider, når $c = 4$, $h_a = 2$ og $r_a = 3{,}732$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1951.
Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Løs og diskuter ligningen

$$\frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{a}{\cos^2 x} = 2(1 + a).$$

2. $D-ABC$ er et givet tetraeder, hvor $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a\sqrt{2}$, $AC = a$ og $CD = a\sqrt{2}$; desuden er CD vinkelret på trekant ABC's plan.

Beregn samtlige toplansvinkler i tetraedret samt længderne af de korteste afstande mellem tetraedrets modstående kanter.

Idet M, N og P er midtpunkterne af henholdsvis AB, AD og BD, skal man derefter beregne rumfanget af det tetraeder, der har hjørnespidser i punkterne C, M, N og P.

3. På parablen $y^2 = 8x$, hvis brændpunkt kaldes A, er C det punkt i 1. kvadrant, der har dobbelt så stor abscisse som A.

Bestem koordinaterne til to andre punkter B og D på parablen, således at firkant $ABCD$ bliver et parallelogram.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1952.

Matematik I.

1. Gennem punktet $A\,(1,2)$ tegnes en ret linie med hældningskoefficienten (retningskoefficienten) α og gennem punktet $B\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ en ret linie med hældningskoefficienten β.

   Find ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de to linier, når α og β varierer således, at $\alpha-\beta=\frac{1}{2}$.

   Angiv brændpunkt og ledelinie for den fundne kurve.

2. Løs ligningen

$$8x^6+63i\cdot x^3+8=0,$$

   idet rødderne angives på formen $a+ib$, hvor a og b er reelle tal.

3. I en konveks firkant $ABCD$ er vinkel A lig med vinkel C. Idet siden $AB=57$, siden $BC=44$, siden $CD=61$ og siden $DA=51$, skal man beregne firkantens vinkler og diagonalen BD.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1952.

Matematik II.

1. Løs ligningssystemet

$$x + y = 90^\circ$$

og $$\frac{1}{2}\sin 2x - \sin 3y = (1 + \cos y)^2 \cdot \cos x.$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

Find derpå arealet af den lukkede figur, der begrænses af X-aksen, kurven og linien $x = \sqrt{3}$.

Bestem endvidere k således, at $x = k$ halverer ovennævnte lukkede figurs areal.

3. Normalsnittet i en omdrejningscylinderflade er en cirkel med radius r.

Bestem akser og ekscentricitet for den ellipse, som fremkommer, når cylinderfladen skæres med en plan, der danner en vinkel på 60° med cylinderfladens akse.

I ellipsen indskrives en ligebenet trekant ABC med toppunkt A i et af storaksens endepunkter og således, at trekantens projektion på et normalsnit i cylinderfladen er en ligesidet trekant.

Beregn længderne af trekant ABC's sider samt sidernes vinkler med normalsnittets plan.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1952.

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$ skærer X-aksen i punkterne $A(r, 0)$ og $B(-r, 0)$. P er et vilkårligt punkt på cirklen. Cirkeltangenten i B skærer den rette linie AP i punktet Q. Skæringspunktet mellem den rette linie BP og linien gennem Q parallel med X-aksen kaldes S.
   Find ligningen for det geometriske sted for S, idet P gennemløber cirklen.
   Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

2. Bestem de værdier af a, for hvilke ligningen
$$4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 5 \sin x \cdot \cos x = a$$
   har løsninger.
   Find x, når 1) $a = \frac{1}{2}$ og 2) $a = 4\frac{1}{2}$.

3. Parablen $y = x^2$, der har toppunkt i O, skæres af den rette linie $y = a^2$ i punkterne A og B; a er en konstant og $a > 1$.
   Idet et punkt P gennemløber parabelbuen AOB, endepunkterne medregnet, skal man bestemme den største og den mindste værdi, som summen $PA^2 + PB^2$ antager.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1952.

Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Find ligningerne for de normaler, der kan tegnes fra punktet $P\left(7\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}\right)$ til parablen $y^2 = 4x$.

2. I den konvekse firkant $ABCD$ er siden $AB = 3{,}214$, siden $BC = 4{,}996$ og diagonalen $AC = 7{,}288$; endvidere er trekant ACD ligesidet.
Beregn firkantens vinkler samt diagonalen BD.

3. I den regulære tresidede pyramide $T - ABC$ er højden $TP = 2$, og kanten i grundfladen ABC er $2\sqrt{6}$.
Beregn alle pyramidens toplansvinkler samt arealet af pyramidens overflade.
Beregn dernæst radius i pyramidens indskrevne kugle og radius i dens omskrevne kugle.
En plan bestemt ved kanten AB og centrum for den indskrevne kugle skærer kanten CT i punktet D. Bestem forholdet $CD : DT$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1953.

Matematik I.

1. Bevis formlen

$$2\cdot a + 4\cdot(a+1) + 6\cdot(a+2) + \cdots\cdots + 2n\cdot(a+n-1) = \frac{n(n+1)(3a+2n-2)}{3},$$

idet a er et givet tal og n et vilkårligt positivt helt tal.

Find dernæst summen

$$1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + \cdots\cdots + n\cdot 2n.$$

2. A og B er to punkter på parablen $y^2 = px$, beliggende på hver sin side af parablens akse; A's afstand fra parablens akse er numerisk dobbelt så stor som B's afstand fra denne akse. Skæringspunktet mellem tangenterne i A og B kaldes C. Linien gennem C og midtpunktet af AB skærer linien, der går gennem A vinkelret på BC, i punktet P.

Find ligningen for det geometriske sted for P, når A gennemløber parablen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. I trekant ABC er M midtpunktet af siden AB, N midtpunktet af siden BC og P det punkt på siden AC, der er således beliggende, at $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{1}{2}$.

Idet $AB = 7{,}652$, $AC = 5{,}670$ og $MP = 2{,}418$, skal man beregne vinklerne og de ubekendte sider i trekant MNP.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1953.

Matematik II.

1. Løs ligningen

$$x^2 + (2 - 3i)\,x - (17 + 7i) = 0.$$

Idet de fundne rødder kaldes α og β, skal man danne den andengradsligning $x^2 + Ax + B = 0$, hvis rødder er $\alpha^2 + 3$ og $\beta^2 + 3$.

Såvel α og β som A og B skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{x^3}{4\,(x - 1)}.$$

Find dernæst arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, linien $x = 3$ og tangenten til kurven i det punkt, hvis abscisse er $\frac{3}{2}$.

3. I kassen $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, hvor $AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1 \neq DD_1$, er kanten $AB =$ kanten $BC = 4$, og kanten $BB_1 = 2$. Midtpunkterne af kanterne AB og BC kaldes henholdsvis M og N.

Find rumfanget og overfladen af tetraedret B_1DMN.

Find endvidere tetraedrets toplansvinkler langs kanterne MN og B_1D.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1953.

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. I en ligebenet trekant ABC $(AB = AC)$ er

$$h_a + a = 2R ,$$

hvor h_a betegner højden på grundlinien a og R radius i trekantens omskrevne cirkel.

Find topvinklen.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \cot x + \cos x \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Beregn arealerne af hver af de to lukkede figurer, der begrænses af henholdsvis kurven, X-aksen og linien $x = \frac{\pi}{6}$ samt af kurven, X-aksen og linien $x = \frac{11\pi}{6}$.

3. En trekant ABC, hvor $AB = 5$, $BC = 3$ og $CA = 6$, projiceres på en given plan α i trekant $A_1B_1C_1$. Endvidere er det givet, at $A_1A = 3$, $B_1B = 4$ og $C_1C = 6$.

Beregn vinklen mellem trekant ABC's plan og α.

Find endvidere rumfanget af det legeme, der begrænses af trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ samt firkanterne A_1ABB_1, B_1BCC_1 og C_1CAA_1.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1953.

Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Vis, at ligningen

$$x^2 + xy - 2y^2 + x + 5y - 2 = 0$$

fremstiller to rette linier.

De to rette linier begrænser sammen med $5x - 2y - 5 = 0$ en trekant. Beregn denne trekants areal.

2. I en spidsvinklet trekant ABC er O skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinien v_A og højden h_b. Idet h_b's fodpunkt kaldes D, skal man beregne sider og vinkler i trekant ABC, når vinkel $AOD = 60°,48$, $v_A = 4{,}568$ og $h_b = 3{,}782$.

3. En given omdrejningskegle med højden h og radius i grundfladen lig med r skæres af to planer parallelle med grundfladens plan. Afstanden mellem planerne er lig med den ene plans afstand fra grundfladen.

Vis, at rumfanget af den del af keglen, der ligger mellem planerne er

$$\frac{\pi r^2}{3 h^2} \cdot (7x^3 - 9hx^2 + 3h^2x),$$

hvor x betegner afstanden mellem planerne.

Find den værdi af x, for hvilken rumfanget antager sin største værdi.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1954.

Matematik I.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne $A(10,0)$, $B(0,17)$, $C(-10,0)$ og $D(0,-3)$.

Midtnormalerne (halveringsnormalerne) til liniestykkerne AB og CD skærer hinanden i punktet Q.

Vis, at vinkel AQB og vinkel CQD begge er rette.

Find ligningen for radikalaksen for de to cirkler, der har AB og CD som diametre.

2. Undersøg og tegn i samme koordinatsystem de to kurver

$$y = 2^x - 1 \quad \text{og} \quad y = (2^x - 1)^2.$$

Find arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurverne.

3. I en konveks firkant $ABCD$ er siden $AB = 3{,}456$, siden $BC = 4{,}064$ og siden $CD = 5{,}284$; endvidere er vinkel $C = 90°$, og diagonalerne AC og BD er lige store.

Beregn diagonalerne, siden AD og firkantens ubekendte vinkler.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1954.

Matematik II.

1. Find x af ligningen

$$1 - 6 \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 1 \right) = \frac{5}{\cos^2 x}.$$

2. I et retvinklet koordinatsystem, hvis begyndelsespunkt er O, er givet punkterne $A(4,0)$ og $B(8,0)$.

Der tegnes to cirkler c_1 og c_2 over henholdsvis OA og OB som diametre. En vilkårlig ret linie gennem O skærer c_1 og c_2 anden gang i henholdsvis P og Q.

Liniestykket PQ's midtpunkt kaldes M, og den rette linie gennem B og M skærer den rette linie gennem A og P i punktet S.

Find ligningen for det geometriske sted for S, idet den vilkårlige rette linie gennem O gennemløber alle stillinger, og angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. I trapezet $ABCD$ ($AD \neq BC$) er $AB = AD = 4$, $BC = 2$ og vinkel $BAD = 90°$.

I AB's midtpunkt M oprejses normalen til trapezets plan, og ud ad normalen afsættes $MO = 2\sqrt{3}$. Punktet O bestemmer sammen med trapezet $ABCD$ en pyramide med toppunkt i O og grundflade $ABCD$.

Beregn overfladen af denne pyramide.

Igennem midtpunktet af BC lægges en plan parallel med planen OAB; snitplanen skærer pyramiden i en firkant.

Beregn sider og vinkler i denne firkant.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1954.

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Find x og y af ligningerne

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{6}{5},$$

$$y^2 = \frac{1}{2}x.$$

2. I et rektangel $ABCD$ er $AB = 12$ og $BC = x$, hvor $0 < x < 6$. I rektanglet tegnes de fire halveringslinier til vinklerne A, B, C og D. Disse linier bestemmer sammen med siderne AB og CD en sekskant.

Bestem x således, at sekskantens areal får sin størsteværdi.

3. Givet en vinkel v og to liniestykker p og q.

Konstruer en trekant ABC af vinkel $A = v$, siden $AB = p$ og liniestykket $OA = q$, idet O er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Angiv mulighedsbetingelse.

Beregn trekantens ubekendte sider og vinkler, når $v = 60°,72$, $p = 5{,}678$ og $q = 3{,}684$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1954.

Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Givet parablen $y^2 = 4x$.
Find ligningerne for de parabelnormaler, som går igennem punktet $(9, -6)$.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{1}{2}x + \cos x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

Find arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, X-aksen, Y-aksen og linien $x = \frac{\pi}{2}$.

Find dernæst rumfanget af det omdrejningslegeme, som dannes, når den nævnte figur drejes 360° om X-aksen.

3. En kugle med centrum O_1 og radius 1 røres udvendigt af en anden kugle med centrum O_2 og radius 2. P er skæringspunktet mellem den første kugle og forlængelsen af centerlinien O_2O_1 ud over O_1. Gennem P lægges en plan, som skærer begge kuglerne.
Find denne plans vinkel med centerlinien, når det af kuglen med centrum O_1 afskårne kugleafsnit, der er større end halvkuglen, har samme rumfang som det af kuglen med centrum O_2 afskårne afsnit, der er mindre end halvkuglen.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR—MARTS 1955.

Matematik I.

1. Bestem de værdier af a, for hvilke ligningen

$$a\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$$

har løsninger.

Find x, når $a = -2{,}5$.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = (x - 1)\sqrt{x + 2}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og X-aksen.

3. Konstruer en trekant ABC af siden AB og den omskrevne cirkels radius R, når det tillige er givet, at $\frac{AC}{BC} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er givne liniestykker.

Beregn trekantens vinkler og ubekendte sider, når $AB = 5{,}832$, $R = 4{,}476$, $p = 5$ og $q = 3$.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR—MARTS 1955.

Matematik II.

1. Find x af ligningen

$$i \cdot x^4 - (8 + 2i)\, x^2 - 56 + 33i = 0.$$

Rødderne skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Vis, at ligningerne

$$x^2 + y^2 - 2tx - 4ty + t^2 = 0$$

og

$$x^2 + y^2 + tx = 0$$

for enhver værdi af t, der ikke er 0, fremstiller to cirkler, der rører hinanden udvendigt.

Find dernæst ligningen for det geometriske sted for de to cirklers røringspunkt, når t gennemløber alle tal undtagen 0.

3. $ABCD$ er et kvadrat med siden 12. I kvadratets vinkelspidser oprejses til samme side normaler til kvadratets plan, og ud ad disse afsættes $AA_1 = BB_1 = 15$ og $CC_1 = DD_1 = 10$.

Find overflade og rumfang af den pyramide, der har AA_1C_1C til grundflade og toppunkt i D_1.

Beregn endvidere toplansvinklen mellem planerne B_1AC og D_1AC.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1955.

Matematik I.

1. Angiv de værdier af x, for hvilke

$$x + 8 \leqq \frac{3x - 2}{x - 4} < 4.$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$$

Beregn arealet af den lukkede figur, som begrænses af kurven og den rette linie $3x - 2y = 5$.

3. I en omdrejningskegle med toppunkt O er sidelinien 16 og radius i grundfladen $4\sqrt{2}$. AB er en diameter i grundfladen, og C et punkt på sidelinien OB således beliggende, at $OC = 12$.

Gennem punktet C og tangenten til grundfladecirklen i punktet A lægges en plan α.

Bevis, at plan α står vinkelret på OB, og beregn akserne i den ellipse, som er skæringskurven mellem keglens krumme overflade og α.

Beregn endvidere afstanden fra det ene endepunkt af ellipsens lilleakse til keglens grundflade.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1955.

Matematik II.

1. Find x af ligningen

$$(1 - i)\,x^2 - (3 - i)\,x + 4 - 2\,i = 0.$$

Idet α betegner den af de fundne rødder, hvis modulus (numeriske værdi) er mindst, og β den anden rod, skal man dernæst beregne værdien af udtrykket

$$(\alpha - 1)^6 + (\beta - i)^6.$$

Såvel den givne lignings rødder som resultatet af det beregnede udtryk skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I firkant $ABCD$ er vinkel $A = 90°$, siden $AD = 2{,}383$, siden $BC = 6{,}823$ og diagonalen $BD = 4{,}842$; endvidere halverer diagonalen AC vinkel A.

Beregn firkantens ubekendte sider og vinkler.

3. Givet cirklen $x^2 + y^2 = r^2$, hvis centrum betegnes med O. P er et vilkårligt punkt på cirklen og Q dette punkts symmetriske punkt med hensyn til abscisseaksen. S er et punkt på forlængelsen af OP ud over P, således at $OP = PS$.

Idet R betegner punktet $(-r,\ 0)$, skal man finde ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de rette linier OQ og RS, når P gennemløber cirklen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1955.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$x^2 - (5 + 5i)x + 13i = 0.$$

Løs derefter ligningen

$$x^5 - (5 + 5i)x^4 + 13ix^3 + x^2 - (5 + 5i)x + 13i = 0.$$

Alle komplekse rødder skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I en trekant ABC betegner D et punkt på siden BC. Idet siden $AB = 6{,}888$, liniestykket $DC = 6{,}859$, liniestykket $AD = 8{,}032$ og vinkel $ADC = 138^\circ{,}12$, skal man beregne vinklerne og de ubekendte sider i trekant ABC.

3. En kurve med ligningen

$$y = x^3 + ax + b,$$

hvor a og b er konstanter, har i det punkt, hvis abscisse er $-\frac{1}{2}$, en tangent med ligningen $y = -\frac{9}{4}(x - 1)$.

Find a og b.

Tegn for de fundne værdier af a og b kurven, og beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og den givne tangent.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1955.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet en linie p med ligningen $2x - y + 1 = 0$ samt et punkt F med koordinaterne (6,5).

   Bestem ligningen for den hyperbel, der har p som asymptote og F som brændpunkt, når det tillige er givet, at hyperblens førsteakse er parallel med X-aksen.

   Opskriv ligningerne for hyperblens to ledelinier.

2. I en ligebenet trekant ABC er grundlinien $AB = 4$ og højden $CD = 4$.

   Idet O er et punkt på højden CD, skal man bestemme vinkel OAD således, at summen af afstandene fra O til trekantens vinkelspidser bliver så lille som mulig.

3. I tetraedret $D - ABC$ er grundfladen en trekant med siderne $AB = 9$, $BC = 5$ og $AC = 10$. Punktet D's projektion på grundfladen er AC's midtpunkt M, og $DM = 2\sqrt{14}$.

   Find vinklen mellem kanten BD og grundfladen samt toplansvinklen langs kanten AB.

   Beregn arealet af trekant ABD's projektion på sidefladen ADC.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR 1956.

Matematik I.

1. En hyperbel er givet ved ligningen $x^2 - y^2 = a^2$.
Bevis, at asymptoterne halverer vinklerne mellem et par konjugerede diametre.

2. Undersøg og tegn kurven
$$y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}.$$
Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af X-aksen, kurven og linierne $y = 1$ og $x = 4$.

3. To cirkler med centrerne O_1 og O_2 skærer hinanden i punkterne A og B således, at vinkel $O_1AO_2 = 90°$; endvidere er radius for cirklen, der har centrum i O_1, lig med 3,396, og centerlinien $O_1O_2 = 4{,}156$. Til cirklerne tegnes den fællestangent, hvis røringspunkter R_1 og R_2 med cirklerne ligger på samme side af centerlinien som A.
Beregn længden af R_1R_2 samt den spidse vinkel, som linien R_1R_2 danner med linien O_1O_2.
Linien BA skærer R_1R_2 i punktet P. Vis, at P er midtpunktet af R_1R_2, og beregn længden af AP.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR 1956.

Matematik II.

1. Find x og y af ligningerne

$$x^2 = 32\,i$$

og $$y^2 = 32 - 24\,i.$$

Idet x og y er de ovenfor fundne rødder, skal man beregne værdien af

$$U = x^4 - y^4 \quad \text{og} \quad V = \frac{x^4}{y^4}.$$

Både de fundne værdier af x og y samt af U og V skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. P er et vilkårligt punkt på parablen $y^2 = px$, hvis brændpunkt kaldes F. Parabeltangenten med røringspunktet i P skærer Y-aksen i T, og gennem dette punkt tegnes en ret linie l vinkelret på FP. En linie gennem begyndelsespunktet parallel med parabeltangenten i P skærer l i punktet S.

Find ligningen for det geometriske sted for S, idet P gennemløber parablen.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. I en firesidet pyramide O–$ABCD$ er grundfladen $ABCD$ et ligebenet trapez, hvor $AD \neq BC$. Fodpunktet af pyramidens højde er midtpunktet af AD.

Idet $AD = 6$, $BC = 2$, afstanden mellem AD og BC er lig med 2 og pyramidens højde er lig med 2, skal man beregne toplansvinklerne langs kanterne AD, BC, AB og CD.

Beregn endvidere vinklen mellem kanterne AD og OC samt længden af den korteste afstand mellem linierne AD og OC.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1956.

Matematik I.

1. P er et vilkårligt punkt på parablen $y^2 = px$. Parabeltangenten i P skærer X-aksen i punktet A. PA forlænges ud over A til punktet B således, at $AB = PA$. Parabelnormalen i P skærer X-aksen i punktet C.

   Find ligningen for det geometriske sted for midtpunktet af BC, når P gennemløber parablen.

   Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

2. Af en forsamling på 9 personer: A, B, C, D, E, F, G, H og I skal vælges et udvalg bestående af 4 medlemmer.

   På hvor mange forskellige måder kan udvalget sammensættes,

   1) når der kan vælges frit mellem de 9 personer?
   2) når H og I ikke samtidig må være medlemmer af udvalget?
   3) når H og I ikke samtidig må være medlemmer, men A skal være medlem af udvalget?

3. Konstruer en trekant ABC af vinkel A og siden BC, når det tillige er givet, at $v_A : AB = p : q$, hvor p og q er givne liniestykker. (v_A betegner vinkel A's halveringslinie).

   Angiv mulighedsbetingelse.

   Beregn trekantens ubekendte vinkler og sider, når vinkel $A = 103^\circ{,}12$, $BC = 3{,}218$, $p = 2$ og $q = 5$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1956.

Matematik II.

1. Løs ligningssystemet

$$x + y = i$$

$$2(x^3 + y^3) = 3ix^2y^2 + 4i.$$

De komplekse værdier af x og y skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = 2x - \frac{6x}{x^2 + 3}.$$

Find ligningerne for de kurvetangenter, der er parallelle med linien $5x - 4y + 10 = 0$.

Find endvidere arealet af den i 1. kvadrant beliggende lukkede figur, der begrænses af kurven, linien $x = 3$ og den af de fundne tangenter, hvis røringspunkt har positiv abscisse.

3. Et kvadrat $ABCD$ med siden a er grundflade i en pyramide med toppunkt O. Sidekanten OA, der er lig med $a\sqrt{2}$, er højde i pyramiden.

Gennem diagonalen BD i grundfladen lægges en plan, som er parallel med pyramidens højde OA. Denne plan skærer sidekanten OC i punktet E.

Find overflade og rumfang af det konvekse polyeder, hvis hjørnespidser er A, B, D, E og O.

Find endvidere afstanden d (den korteste afstand) mellem linierne BE og OA, og angiv beliggenheden af d's endepunkter, idet der tillige ønskes forklaring på, hvorledes d bestemmes.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1956.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. I en konvergent uendelig kvotientrække er det første led lig med $\frac{1}{8}$, og det andet led er lig med kvadratet på rækkens sum.

   Find rækkens kvotient og dens sum.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \qquad (-\pi < x < \pi).$$

   Beregn arealet af den i 1. kvadrant beliggende lukkede figur, der begrænses af kurven, X-aksen og tangenten til kurven i det punkt, hvis abscisse er $\frac{\pi}{2}$.

   Beregn endvidere rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den nævnte figur drejes 360° om X-aksen.

3. I en cirkel med radius 36,82 er indskrevet en konveks femkant $ABCDE$ således, at cirkelbuen AB er 40°, og cirkelbuerne BC, CD, DE og EA er lige store.

   Diagonalen AC skæres af diagonalerne BE og BD i henholdsvis punkterne F og G.

   Beregn vinkler og sider i firkant $DEFG$ samt arealet af denne firkant.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1956.
Sygeeksamen.

Matematik II.

---

1. Løs ligningen

$$a \sin^2 2x = 4 \cdot [a \cos^4 x - \cos 2x].$$

Diskussion kræves.

Eksempler: 1) $a = 1$; 2) $a = -1$; 3) $a = 6$.

2. I et retvinklet koordinatsystem er givet parablen $y^2 = 2x$.
Find ligningen for den parabelnormal, der står vinkelret på linien $x - 2y + 4 = 0$.
Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af den givne parabel og den fundne normal.

3. En terning $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, hvor $AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1 \neq DD_1$, har kanten a. Gennem diagonalen BD i sidefladen $ABCD$ og midtpunktet P af kanten B_1C_1 lægges en plan. Denne plan udskærer af terningen en pyramidestub, hvis ene endeflade er trekant BCD.
Find pyramidestubbens toplansvinkler langs kanterne BD og BP samt den vinkel, som linien BP danner med planen BB_1D_1D.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR—MARTS 1957.

Matematik I.

1. I en given cirkel er indskrevet en regulær n-kant samt en regulær p-kant. Forholdet mellem antallet af diagonaler i n-kanten og i p-kanten er 6, medens forholdet mellem polygonernes vinkelsummer er $\frac{5}{2}$.

   Find n og p, og beregn for de fundne værdier forholdet mellem n-kantens og p-kantens arealer.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \sqrt{5x} + \sqrt{6-x}.$$

   Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og linien $y = \sqrt{30}$.

3. I en sfærisk trekant ABC er vinkel $C = 90°$, siden $AC = 45°$ og siden $BC = 135°$.

   Beregn siden AB, vinklerne A og B og den sfæriske afstand fra C til midtpunktet af siden AB.

   Idet punktet D er den af storcirklen BC's poler, hvis sfæriske afstand fra A er mindre end $90°$, skal man finde de ubekendte sider og vinklerne i den sfæriske trekant ABD.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR—MARTS 1957.

Matematik II.

1. Løs ligningssystemet

$$x + y = i$$

$$x^4 + y^4 = -3.$$

De komplekse værdier af x og y skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I et retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunktet O er givet punkterne $A\ (a,b)$ og $B\ (0,b)$, hvor $a > b > 0$. Punkterne P og M bevæger sig på henholdsvis X-aksen og Y-aksen således, at $OP = MB$, regnet med fortegn.

Find ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de rette linier PB og MA.

Angiv den fundne kurves art og dens beliggenhed i koordinatsystemet.

3. Et konvekst polyeder er sammensat af en regulær firesidet pyramidestub og en regulær firesidet pyramide.

Kanterne i pyramidestubbens endeflader $ABCD$ og $A_1B_1C_1D_1$ er henholdsvis $5\sqrt{2}$ og $2\sqrt{2}$, og sidekanterne AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 er 6.

Pyramiden, hvis toppunkt kaldes T, har grundfladen $A_1B_1C_1D_1$, og dens sidekanter A_1T, B_1T, C_1T og D_1T er $2\sqrt{2}$.

Beregn de vinkler, som kanterne AA_1 og A_1T danner med kvadratet $ABCD$, samt polyedrets toplansvinkler langs samtlige kanter.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1957.

Matematik I.

1. Ligningen

$$2x^6 - 4x^5 + 2x^4 + cx^2 - x + d = 0$$

har dobbeltroden 1.

Bestem c og d.

Løs derefter ligningen, idet de komplekse rødder angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I en indskrivelig, konveks firkant $ABCD$ er vinkel $A = 98°,84$, siden $BC = 2{,}989$ og diagonalen $AC = 3{,}816$; endvidere er den vinkel, som diagonalen AC danner med siden BC, lig med $56°,64$.

Beregn firkantens ubekendte vinkler og sider samt diagonalen BD.

3. Undersøg og tegn kurven

$$y = (\ln x)^2 - 2\ln x,$$

hvor $\ln x$ betyder den naturlige logaritme af x.

Beregn derefter arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x-aksen.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1957.

Matematik II.

1. Den 1. maj 1950 er der i et hus optaget et statslån på 40000 kr.; rentefod 2% p.a. Lånet forrentes og afdrages ved årlige ydelser, der alle betales den 1. maj, første gang den 1. maj 1951. De første 20 ydelser er hver på 800 kr. (d.v.s. den årlige rente af det oprindelige lån), og de følgende ydelser er hver på 1200 kr. undtagen den sidste, der er mindre end 1200 kr.
Hvilket år betales den sidste ydelse, og hvor stor bliver denne?

2. P er et variabelt punkt på hyperblen

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Normalen til hyperblen i P skærer x-aksen i punktet N.
Find N's abscisse udtrykt ved P's abscisse.
På liniestykket NP's forlængelse udover P afsættes punktet Ssåledes, at $PS = NP$.
Find ligningen for det geometriske sted for S.
Undersøg det geometriske steds art og dets beliggenhed i koordinatsystemet, såvel for $a \neq b$ som for $a = b$.

3. I en pyramide P—$ABCD$ er grundfladen en konveks firkant $ABCD$ med siderne $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$ og $AD = \sqrt{21}$, medens vinkel C er ret.
Bevis, at grundfladen har en omskreven cirkel.
Højden PQ, der har sit fodpunkt Q i midtpunktet af diagonalen BD, har længden 6.
Find pyramidens rumfang samt toplansvinklen langs kanten CD.
P er toppunktet for en kegleflade, på hvilken alle punkter af firkant $ABCD$'s omskrevne cirkel er beliggende. Denne kegleflade skæres med en plan gennem D parallel med keglefladens tangentplan langs frembringeren gennem P og B.
Beregn afstanden mellem brændpunkt og toppunkt i den fremkomne parabel.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1957.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Bestem k således, at tallet $1 - 2i$ er rod i ligningen

$$x^3 - x^2 (2 - 4i) - x (6 + 15i) + 5k = 0.$$

Løs derefter ligningen for den fundne værdi af k. Rødderne skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven, x-aksen, linien $x = \frac{3}{2}$ og linien $y = \frac{3}{2}$.

3. Den konvekse firkant $ABCD$ er omskrevet om en cirkel. Siden $AB = 48{,}84$, siden $CD = 40{,}38$ og diagonalen $AC = 61{,}21$; desuden er vinkel $B = 73^\circ{,}26$.

Beregn firkantens ubekendte sider og vinkler samt cirklens radius.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1957.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Ligningen

$$3\,x^2 - 4\,xy - 4\,y^2 + x + 6\,y - 2 = 0$$

fremstiller to rette linier l og m.
Find de to liniers ligninger.
En ellipse har brændpunkter i punkterne (2,0) og (— 2,0), og de to af ellipsens diametre, der er parallelle med henholdsvis l og m, er konjugerede.
Find ellipsens ligning.

2. Angiv de værdier af x i intervallet $0 \leqq x \leqq 2\,\pi$, for hvilke funktionen

$$\frac{2\cot 2\,x}{\sin^2 2\,x + 3\sin^2 x + 2\cos x - 2}$$

er defineret.

3. I en rhombe $ABCD$ med siden a er vinkel $A = 120°$. Siden AB forlænges ud over B til punktet P således, at $BP = a$. I P oprejses normalen til rhombens plan, og ud ad normalen afsættes $PO = a\sqrt{3}$. Punktet O er toppunkt for en pyramide med grundflade $ABCD$.
Find pyramidens toplansvinkler langs grundfladens kanter.
Find endvidere vinklen mellem de to planer, hvori sidefladerne OBC og OAD er beliggende.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1958.

Matematik I.

1. Løs ligningssystemet

$$3x + 3y - 5xy = 1 + 2x^2 + 2y^2$$
$$xy + x^2 + y^2 = 2 - 5x - 5y.$$

2. En omdrejningskegle, hvis toppunktsvinkel er ret, og hvis højde er k, står på en vandret plan. På denne plan hviler også en kugle med diameter k, og begge legemer er omgivet af vand op til højden x over planen ($x < k$). Rumfanget af den del af kuglen, der er under vand, er $\frac{3}{7}$ af rumfanget af den del af keglen, der er under vand.

   Beregn x, og udregn dernæst forholdet mellem den tørre del af kuglens overflade og den tørre del af keglens overflade.

3. Der er givet en vinkel v og tre linjestykker l, p og q.

   Konstruer en trekant ABC af siden $AC = l$ og vinkel $AMB = v$, hvor M er midtpunktet af siden BC, når det tillige forlanges, at $BC : AB = p : q$. Diskussion kræves.

   Beregn vinklerne og de ubekendte sider i trekanten, når $v = 30°$, $l = 6{,}032$, $p = 8$ og $q = 5$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1958.

Matematik II.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne A $(-5, -1)$ og D $(2,0)$. Gennem A tegnes to rette linjer med hældningskoefficienterne (retningskoefficienterne) α og $\alpha + \beta$ $(\beta \neq 0)$ og gennem D en ret linje med hældningskoefficienten $\alpha - \beta$. Den sidste linje skærer de to første i henholdsvis B og C.

   Find koordinaterne til B og C udtrykt ved α og β.

   Find β udtrykt ved α, når det forlanges, at punktet C skal ligge på y-aksen, og bestem derefter det geometriske sted for punktet B, når α varierer.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{1}{\sin x} - 2\cos x$$

   i intervallet $0 < x < \pi$.

   Den lukkede figur, der begrænses af kurven, x-aksen og linjen $x = \frac{\pi}{2}$, drejes $360°$ om x-aksen.

   Beregn rumfanget af det herved fremkomne omdrejningslegeme.

3. Der er givet et kvadrat $ABCD$, hvori diagonalen $AC = 8$. I punktet C oprejses normalen til kvadratets plan; P er et punkt på denne normal således beliggende, at $CP = 8$.

   Gennem et punkt på diagonalen AC lægges en plan α vinkelret på AC; α skærer kvadratets sider i punkterne M og N samt linjen AP i punktet T.

   Idet afstanden mellem planen α og punktet C kaldes x, skal man finde arealet af trekant MNT udtrykt ved x og bestemme dette areals størsteværdi.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1958.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Find ligningerne for de to cirkler, der har centrer på linien $4x - 19y + 5 = 0$, og som rører begge linierne $8x + y - 16 = 0$ og $4x + 7y - 34 = 0$.

2. I en konveks firkant ABCD er AB = 3,444, BC = 2,127, AC = AD = 5,123 og arealet af trekant ABD = 6,000.
   Beregn CD og firkantens vinkler.

3. Givet funktionen
$$y = x^3 - ax^2 + 3x + 1.$$
   1. Hvilke værdier kan a have, når det forlanges, at funktionen skal have både maksimum og minimum?
   2. For hvilke positive værdier af a vil funktionen have både maksimum og minimum for værdier af x beliggende i intervallet $0 \leqq x \leqq 5$?
   3. Angiv funktionens størsteværdi og mindsteværdi i intervallet $0 \leqq x \leqq 5$ både for $a = 3$ og $a = 5$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1958.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Find rødderne i ligningen

$$x^2 - (11 + 3i)\,x + 4\,(7 + i) = 0.$$

Idet α er den af rødderne, hvis modulus (numeriske værdi) er mindst, og β den anden rod, skal man dernæst løse ligningen

$$y^3 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Begge ligningers rødder skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Et konvekst polyeder er sammensat af to regulære firsidede pyramider med fælles grundflade, hvis side er $2a$. Den ene pyramide har højden $2a$, den anden højden a.

Bevis, at polyedret har en omskreven kugle.

På den af polyedrets diagonaler, der forbinder de nævnte pyramiders toppunkter, skal man bestemme et punkt, som har samme afstand fra alle otte sideflader i polyedret. Beregn denne afstand.

3. Linien $y = \alpha x$ $(0 < \alpha < 1)$ skærer parablen $y = x^2$ i punkterne $O(0,0)$ og A. Punktet $(1,1)$ benævnes B.

Bestem α således, at summen af arealet af den figur, der begrænses af parablen og linien $y = \alpha x$, og arealet af den figur, der begrænses af parabelbuen AB samt linierne $y = \alpha x$ og $x = 1$, bliver så lille som mulig.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1959.

Matematik I.

1. Løs og diskuter ligningssystemet

$$x + y - 1 = 0$$

$$x^2 + (1 - a)\,xy - ay^2 - ax + a^2y + 1 - a = 0.$$

2. Find ligningen for den cirkel, der har radius 1 og centrum i første kvadrant, og som rører begge linierne

$$3y = 4x \qquad \text{og} \qquad 4y = 3x.$$

Find røringspunkternes koordinater.
Find ligningerne for tangenterne til cirklen fra punktet (3,6).

3. Et konvekst polyeder er sammensat af to tresidede pyramider D–ABC og E–ABC, hvis fælles grundflade er den ligesidede trekant ABC med siden a. Liniestykket DM, hvor M er midtpunktet af AC, er lig med $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, og kanten BE er lig med $a\sqrt{3}$. DM og BE står begge vinkelret på trekant ABC's plan.

Find polyedrets toplansvinkler langs AB, BC og CA.

Igennem midtpunktet af kanten AB lægges en plan α parallel med sidefladen ACD. Find vinkler og sider i den polygon, hvori α skærer polyedret.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1959.

Matematik II.

1. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne $A(3{,}0)$ og $B(-1{,}3)$ samt linien l med ligningen $x = 9$.

   Find ligningen for det geometriske sted for de punkter, hvis afstande fra A og l har et konstant forhold, når det forlanges, at det geometriske sted skal indeholde punktet B.

   Angiv koordinaterne til den fundne kurves brændpunkter.

2. Konstruer en trekant ABC af siden AC og højden h_c på siden AB, idet desuden afstandene fra AB og AC til midtpunktet M af siden BC skal have forholdet $p : q$, hvor p og q er givne liniestykker. — Diskussion kræves.

   Beregn trekantens vinkler og ubekendte sider samt AM, når $AC = 4{,}574$, $h_c = 2{,}902$, $p = 1$ og $q = 1$.

3. Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af abscisseaksen, kurven $y = \ln x$ og den kurvetangent, hvis røringspunkt har ordinaten 1. ($\ln x$ betegner den naturlige logaritme af x).

   Den nævnte figur drejes 360° om ordinataksen. Beregn rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1959.
Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. Bestem a og b, således at ligningen

$$x^5 - 12x^4 + 62x^3 - ax^2 + ibx - 82 = 0$$

får rødderne i og $-i$.

Løs derefter ligningen fuldstændigt.

2. Givet parablen $y = 2x^2$. P er et vilkårligt parabelpunkt, hvis abscisse betegnes t, og Q er et parabelpunkt med abscissen $2t$. Gennem P tegnes en ret linie l med hældningskoefficienten (retningskoefficienten) t og gennem Q en ret linie m med hældningskoefficienten $2t$.

Find ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem l og m, idet t gennemløber intervallet $-\infty < t < \infty$.

Angiv den fundne kurves brændpunkt og ledelinie.

3. I en konveks firkant $ABCD$ er siderne AD og CD lige store, og diagonalen BD halverer vinkel B. Diagonalernes skæringspunkt betegnes E.

Beregn de ubekendte vinkler og siderne i firkanten, når vinkel $B = 84{,}^\circ 56$, $AE = 2{,}579$ og $CE = 1{,}803$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1959.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Løs og diskuter ligningen

$$a \sin^2 x = \cos^2 x + \cos x .$$

Eksempler: $^{1})$ $a = -3$ og $^{2})$ $a = -\frac{1}{3}$.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = x - 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x}} .$$

Den lukkede figur, der begrænses af kurven, y-aksen, linien $x = -3$ og linien $y = x - 1$, drejes $360°$ om x-aksen.

Beregn rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

3. I en firsidet pyramide $T—ABCD$ er grundfladen $ABCD$ et trapez ($AD \neq BC$), hvori $AB = BC = CD = 6$ og $AD = 12$. Pyramidens højde er lig med 6, og dennes fodpunkt er skæringspunktet mellem grundfladens diagonaler.

Beregn toplansvinklerne mellem grundfladen og sidefladerne.

Bevis, at CD står vinkelret på AT.

Beregn afstanden (den korteste afstand) mellem CD og AT.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1960.

Matematik I.

1. Løs ligningssystemet

$$\frac{x-3y+4}{3}=\frac{y-2}{x-3}$$

$$xy-x-y-1=0.$$

2. Idet p og q er givne liniestykker og v en given vinkel, skal man konstruere en trekant ABC, således at vinkel A er lig med v, højden fra B lig med p og vinkel A's halveringslinie lig med q.

   Diskussion kræves.

   Beregn trekantens sider og ubekendte vinkler, når $v=150°$, $p=3$ og $q=2$.

3. Givet ellipsen

$$3x^2+8y^2=72.$$

   En ligesidet trekant T_1 er indskrevet i ellipsen, og en ligesidet trekant T_2 er omskrevet om ellipsen. Enhver af de to trekanter har en side, som er parallel med x-aksen, og som skærer y-aksens negative del.

   Bestem koordinaterne til trekanternes vinkelspidser.

   Ved multiplikation med et tal m med hensyn til et punkt O går trekant T_1 over i trekant T_2. Bestem tallet m og koordinaterne til punktet O.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1960.

Matematik II.

1. Bestem de positive hele tal n og p således, at

$$K_{n,p-1} : K_{n,p} : K_{n,p+1} = 1 : 2 : 3 .$$

($K_{n,q}$ betyder antallet af kombinationer af q elementer udtaget blandt n givne).

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = 2\sin^3 x - 3\sin x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x-aksen.

3. Et ligebenet trapez $ABCD$ med siderne $AB = CD = 4$, siden $BC = 4\sqrt{2}$ og siden $AD = 8\sqrt{2}$ er beliggende i en plan α. Ud ad normalen til α gennem A afsættes $AE = 4$, og ud ad normalen til α gennem D afsættes $DF = 4$; E og F skal ligge på samme side af α. E og B, E og F samt F og C forbindes.

Find alle toplansvinkler i det konvekse polyeder, hvis hjørnespidser er A, B, C, D, E og F.

Find polyedrets rumfang.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1960.
Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Løs uligheden

$$-x + \sqrt{x^2 - 3x + 2} < 3.$$

2. I en firkant $ABCD$ halverer diagonalen AC vinkel A, og trekant ABC's areal er det dobbelte af trekant ACD's areal.

   Beregn firkantens ubekendte vinkler og sider, når vinkel $A = 63{,}^\circ 28$, siden $AB = 2{,}568$ og siden $BC = 3{,}707$.

3. En funktion $y = f(x)$ har differentialkvotienten

$$y' = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2},$$

   og den opfylder desuden betingelsen $f(-1) = 0$.

   Bestem funktionen $f(x)$ og tegn dens grafiske billede.

   Om en anden funktion $y = g(x)$ er det givet, at den også har ovennævnte differentialkvotient, og at den for én og kun én værdi af x antager værdien 0.

   Bestem funktionen $g(x)$ og tegn dens grafiske billede.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1960.
Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Bestem tallet v $\left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right)$ således, at

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{v} (\operatorname{tg} x + \cot x)\, dx = \tfrac{1}{2} \ln 3,$$

idet $\ln 3$ er den naturlige logaritme af 3.

2. Find ligningerne for de cirkler, som har linien $x = -5$ til tangent, går gennem punktet $(13,6)$ og har udvendig røring med cirklen

$$(x - 5)^2 + y^2 = 4.$$

3. I tetraedret $ABCD$ er $AB = BC = CA = 2a$, $BD = CD = a\sqrt{3}$ og $AD = a$.

Beregn alle tetraedrets toplansvinkler samt dets rumfang og overflade.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1961.

Matematik I.

1. To tal har summen 1, og summen af deres kvadrater er -1.
Find tallene.
Find summen af de to tals n'te potenser for $^1)$ $n = 33$ og $^2)$ $n = 7$.

2. I et trapez $ABCD$ er vinkel A = vinkel $D = 60°$, og dets omkreds er 56.
Bestem siderne i trapezet, således at dets areal bliver så stort som muligt.
Bestem dernæst siderne i trapezet, således at rumfanget af det legeme, der fremkommer ved en drejning af trapezet $360°$ om siden AD, bliver så stort som muligt.

3. p, q og R er givne liniestykker og v en given spids vinkel.
Konstruer en firkant $ABCD$, hvori diagonalen BD halverer vinkel B, vinkel $BAC = v$, $AB : BC = p : q$, og således at firkanten kan indskrives i en cirkel med radius R.
Diskussion kræves.
Beregn firkantens vinkler og sider, når $p = 4$, $q = 5$, $R = 3$ og $v = 70°, 78$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1961.

Matematik II.

1. $ABCD$ er et rektangel, hvori siden $AB = a$ og siden $BC = 2a$. P er et punkt på siden AB. Linien gennem P parallel med diagonalen BD skærer siden AD i punktet Q. Cirklen med A som centrum og AP som radius skærer cirklen over AB som diameter i punkterne H og K. S er skæringspunktet mellem linien HK og linien gennem Q parallel med AB.

   Bestem det geometriske sted for S, når P gennemløber siden AB. Angiv art og beliggenhed af det fundne geometriske sted.

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = \sin 2x + 2\cos x \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

   Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og x-aksen.

   Beregn desuden rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den omtalte figur drejes $360°$ om x-aksen.

3. I terningen $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$, hvor kanterne AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 er parallelle, er kantlængden 2. Midtpunkterne af kanterne C_1D_1, BB_1 og CD kaldes henholdsvis M, N og P.

   Beregn siderne i trekant AMN samt trekantens areal.

   Beregn toplansvinklen mellem planerne AMN og $ABCD$.

   Beregn rumfanget af pyramiden A—$BNMP$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1961.

Sygeeksamen.

Matematik I.

---

1. Løs hver af ligningerne

$$x^3 + 7x^2 + 31x + 25 = 0$$

$$x^6 + 7x^4 + 31x^2 + 25 = 0$$

De rødder, som ikke er reelle, skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. Der er givet en ligesidet trekant ABC med siden a. På forlængelsen af BC ud over C afsættes punktet P, således at $CP = \frac{1}{2}a$.

Konstruer en ret linie gennem P, som skærer AC i R og AB i S, således at $PR = RS$.

Beregn derefter vinkel SPB, liniestykket PR og arealet af firkant $BSRC$.

Find forholdet mellem arealerne af trekanterne ASR og CPR.

3. En kurve fremstilles ved ligningen

$$y = a \ln x + \sqrt{2x},$$

hvor $\ln x$ betegner den naturlige logaritme af x.

For hvilke værdier af a vil der på kurven findes et punkt $P\,(x_0, y_0)$, således at tangenten i P er parallel med x-aksen og $1 \leqq x_0 \leqq 4$?

Find for $a = 1$ og $a = -1$ størsteværdien af funktionen

$$a \ln x + \sqrt{2x}$$

i intervallet $1 \leqq x \leqq 4$.

Find arealet af det område, der begrænses af kurven

$$y = -\ln x + \sqrt{2x},$$

x-aksen samt linierne $x = 1$ og $x = 4$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1961.

Sygeeksamen.

Matematik II.

1. En cirkel skærer parablen $y^2 = x$ i punktet $(1, -1)$ og rører den i punktet $(9,3)$.

   Bestem cirklens ligning.

   Cirklen har endnu et punkt fælles med parablen. Find dette punkts koordinater.

2. I firkant $ABCD$ er siden $AB = 6$, siden $AD = 9$, diagonalen $BD = 10$ og diagonalen $AC = 8{,}212$. Diagonalerne skærer hinanden i BD's midtpunkt.

   Find længden af siden BC.

3. I tetraedret $ABCD$ er $AB = 8$, $CD = 2$ og $AD = BD = AC = BC = 5$.

   Beregn
   1) tetraedrets overflade og rumfang
   2) toplansvinklerne langs kanterne AB og CD
   3) afstanden mellem linierne AB og CD
   4) vinklen mellem linierne AD og BC.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1962.

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

2. Undersøg og tegn kurven

$$y = (x - 2)\sqrt{5 - x}.$$

Tangenten til kurven i punktet (2,0) begrænser sammen med kurven og y-aksen en lukket figur. Beregn denne figurs areal.

Beregn endvidere rumfanget af det legeme, der fremkommer, når den nævnte figur drejes $360°$ om x-aksen.

3. En omdrejningskegle, hvis grundflades radius er r, har højden $r\sqrt{3}$. Grundfladens centrum kaldes O, og keglens toppunkt kaldes T. A og B er to punkter på grundfladens periferi således beliggende, at vinkel $AOB = 120°$.

Find vinkel ATB.

Midtpunktet af sidelinien TA kaldes M. Find længden af BM samt vinklen mellem linierne BM og OT.

Igennem M lægges en plan, som skærer keglefladen i en parabel med toppunkt i M. Bestem afstanden mellem parablens brændpunkt og toppunkt.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1962.

Matematik II.

---

1. I femkant $ABCDE$ er de tre sider AB, AE og BC alle lig med 4,268, og de fire vinkler A, B, C og D er alle lig med $105°,58$.
Beregn siderne CD og DE.

2. Angiv de reelle værdier af x, for hvilke

$$1 \leqq \left| \frac{x}{x-1} \right| \leqq 2$$

3. Bevis, at for enhver fast værdi af v i intervallet $0 < v < \pi$ er

$$\begin{aligned} x &= 4\,(t^2 + t\cos v) \\ y &= 4t\sin v \end{aligned} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

en parameterfremstilling for en parabel.

Find koordinaterne til parablens brændpunkt F udtrykt ved v.

Bestem det geometriske sted for F, når v gennemløber intervallet $0 < v < \pi$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1962.

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Løs ligningssystemet

$$x + y = -3i$$
$$i\,x^2 + i\,y^2 + xy - 5x - 5y = 20 + 16i.$$

De fundne værdier af x og y skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I et retvinklet koordinatsystem er givet punkterne

$$A(1,4) \qquad B(5,1) \qquad C(1,1)$$

Find ligningerne for trekant ABC's ydre røringscirkler.

3. Der er givet en vinkel v og tre liniestykker m, p og q.
Konstruer en trekant ABC, hvori vinkel $A = v$, siden $AC = m$ og $AO : AO_1 = p : q$, idet O betegner centrum for trekantens indskrevne cirkel, og O_1 betegner centrum for den af trekantens ydre røringscirkler, der rører siden AB.

Diskussion kræves.

Beregn trekantens ubekendte vinkler og sider, når $v = 42{,}^\circ 36$, $m = 4{,}567$, $p = 5$ og $q = 4$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1962.

Sygeeksamen.

Matematik II.

1. Undersøg og tegn kurven

$$y = \frac{25x}{1 + x^2} - \frac{12}{x}.$$

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven, x-aksen og linierne $x = 2$ og $x = 3$.

2. En talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ er givet ved

$$a_1 = 1$$
$$a_n = 3a_{n-1} + n \qquad (n = 2,3,4, \ldots)$$

Bevis ved induktion, at

$$a_n = \frac{1}{4}(3^{n+1} - 2n - 3)$$

for alle hele positive værdier af n.

Bevis, at tallet $3^{101} - 203$ er deleligt med 4.

3. I en pyramide T—$ABCD$ er grundfladen $ABCD$ et kvadrat med siden a; sidekanten TA, der har længden $a\sqrt{3}$, er højde i pyramiden.

Bevis, at AD står vinkelret på TB.

Gennem AD lægges en plan α vinkelret på TB. α skærer TB i punktet E og TC i punktet F.

Beregn de vinkler, som kanterne TD, TC og CD danner med α.

Beregn rumfanget af det konvekse polyeder, hvis hjørnespidser er A, B, C, D, E og F.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1963

Matematik I

1. Vis, at der findes et komplekst tal t, så polynomiet

$$x^2 - (1 + 2i)\,x + (1 - 5i)$$

går op i polynomiet

$$P(x) = x^5 - (1 + 2i)\,x^4 + (1 - 5i)\,x^3 - t\,x^2 + (t^2 + t)\,x - 10 - t.$$

Løs for denne værdi af t ligningen

$$P(x) = 0.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. I en a-klasse er der 7 drenge og 1 pige, og i en b-klasse er der 6 drenge og 4 piger.

På hvor mange måder kan der dannes et udvalg bestående af 3 elever fra a-klassen og 3 elever fra b-klassen,

1) når der kan vælges frit mellem eleverne inden for hver af de to klasser?

2) når det skal indeholde pigen fra a-klassen, 1 pige fra b-klassen og 4 drenge?

3) når det skal indeholde 3 piger og 3 drenge?

3. Givet et liniestykke m, et liniestykke p og en vinkel v. Konstruer en trekant ABC således, at siden $AC = m$, vinkel $C = v$ og liniestykket $OM = p$, hvor M er midtpunktet af AC, og O er skæringspunktet mellem BM og vinkelhalveringslinien fra C.

Diskussion kræves.

Beregn de ubekendte sider og vinkler i trekant ABC, når $m = 2$, $p = \sin 33^\circ{,}67$ og vinkel $v = 77^\circ{,}34$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1963

Matematik II

1. En hyperbel går gennem punktet M (— 4,6), og dens asymptoter har ligningerne

$$x\sqrt{3} + y = 0 \qquad \text{og} \qquad x\sqrt{3} - y = 0.$$

Find hyperblens ligning.

Hyperblens tangent i M betegnes m, og det brændpunkt, der har positiv abscisse, betegnes F.

Find koordinaterne til det punkt, der ligger symmetrisk med F med hensyn til m.

2. Givet en pyramide T—$ABCD$, hvori grundfladen $ABCD$ er et trapez (AD parallel med BC) med siderne $AB = BC = CD = a$ og $AD = 2a$. Linien TC er vinkelret på grundfladen, og $TC = a$.

Find toplansvinklerne langs grundfladens kanter.

Vis, at pyramiden har en omskreven kugle, og find dennes radius.

3. Undersøg og tegn den kurve, hvis ligning er

$$y = \frac{2^x}{1 - 2^x}.$$

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven, x-aksen samt linierne $x = -2$ og $x = -1$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1963

Matematik I.

(Ny prøve, tirsdag d. 21. maj)

1. Find ligningerne for de to rette linier, der fremstilles ved ligningen

$$2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0.$$

Løs derefter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 &= 0 \\ x^2 + xy + 2x + y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

2. I en given kugle med radius R er indskrevet et legeme, der består af en omdrejningscylinder, hvis endefladers periferier ligger på kuglefladen, og to omdrejningskegler, hvis grundflader falder sammen med hver sin af cylinderens endeflader, og hvis toppunkter ligger på kuglefladen.

Bestem cylinderens højde, så legemets rumfang bliver så stort som muligt.

3. Der er givet en stump vinkel v og to liniestykker p og q. Konstruer en trekant ABC, hvori vinkel A er lig med v, siden AB lig med p og vinkel B's halveringslinie lig med q.

Diskussion kræves (stadig under forudsætning af, at den givne vinkel er stump).

Beregn de ubekendte vinkler og sider i trekanten, når $v = 102°,37$, $p = 1{,}261$ og $q = 1{,}666$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1963

Matematik I

(Særopgaver for klasser, som har læst differentialligninger).

1. Løs differentialligningen

$$(2x - 3)\, y(x) + (x^2 - 3x + a)\, y'(x) = 5$$

for $a > \frac{9}{4}$.

Bestem a således, at den tilsvarende løsningskurve gennem (0,0) i dette punkt har en tangent med hældningskoefficienten 1.

Bestem a således, at den tilsvarende løsningskurve gennem (1,1) i dette punkt har en tangent med hældningskoefficienten 1.

2. I en a-klasse er der 7 drenge og 1 pige, og i en b-klasse er der 6 drenge og 4 piger.

På hvor mange måder kan der dannes et udvalg bestående af 3 elever fra a-klassen og 3 elever fra b-klassen,

1) når der kan vælges frit mellem eleverne inden for hver af de to klasser?

2) når det skal indeholde pigen fra a-klassen, 1 pige fra b-klassen og 4 drenge?

3) når det skal indeholde 3 piger og 3 drenge?

3. Givet et liniestykke m, et liniestykke p og en vinkel v. Konstruer en trekant ABC således, at siden $AC = m$, vinkel $C = v$ og liniestykket $OM = p$, hvor M er midtpunktet af AC, og O er skæringspunktet mellem BM og vinkelhalveringslinien fra C.

Diskussion kræves.

Beregn de ubekendte sider og vinkler i trekant ABC, når $m = 2$, $p = \sin 33°{,}67$ og vinkel $v = 67°{,}34$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1963

Matematik II

(Særopgaver for klasser, som har læst sandsynlighedsregning).

1. En hyperbel går gennem punktet M (— 4,6), og dens asymptoter har ligningerne

$$x\sqrt{3} + y = 0 \qquad \text{og} \qquad x\sqrt{3} - y = 0 .$$

Find hyperblens ligning.

Hyperblens tangent i M betegnes m, og det brændpunkt, der har positiv abscisse, betegnes F.

Find koordinaterne til det punkt, der ligger symmetrisk med F med hensyn til m.

2. En stokastisk variabel X har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 60\,x^3\,(1-x)^2 & \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og for } x > 1 . \end{cases}$$

Tegn frekvensfunktionens grafiske billede.

Beregn den stokastiske variables middelværdi μ.

Undersøg, hvilken af de to sandsynligheder

$$P(X \leqq \mu) \qquad \text{og} \qquad P(X > \mu)$$

der er størst.

3. Undersøg og tegn den kurve, hvis ligning er

$$y = \frac{2^x}{1 - 2^x} .$$

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven, x-aksen samt linierne $x = -2$ og $x = -1$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1963

Sygeeksamen.

Matematik I.

1. Løs ligningen

$$\cos 2x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0.$$

2. I firkant $ABCD$ er vinkel $A = 90°$, vinkel $B = 135°$, siden $AB = 8$ og siden $AD = 15$. Desuden er det givet, at firkanten har en indskreven cirkel.

   Beregn den indskrevne cirkels radius.

   Beregn de ubekendte vinkler og sider i firkanten.

3. Undersøg og tegn den kurve, hvis ligning er

$$y = \ln \frac{x+1}{x-1},$$

hvor ln betegner den naturlige logaritme.

   Find arealet af den figur, der begrænses af kurven, x-aksen samt linierne $x = 2$ og $x = 3$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1963

Sygeeksamen.

Matematik II.

1. I en differensrække med 10 led er det første led lig med det komplekse tal $2 + 3i$, og det andet led lig med $-5 - i$. Find rækkens sum.

   En kvotientrække med 10 led har første og andet led fælles med differensrækken. Find kvotientrækkens sum.

   I en anden kvotientrække, som har tre led, er det første led $2 + 3i$, og summen er $-5 + 12i$. Find kvotienten.

   Alle resultater ønskes angivet på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

2. A er et punkt på parablen $y^2 = x$, og B er et punkt på parablen $y^2 = 4x$; tangenten i A til parablen $y^2 = x$ er parallel med tangenten i B til parablen $y^2 = 4x$.

   Idet ordinaten til A betegnes t, skal man finde koordinaterne til B udtrykt ved t.

   Bestem derefter t således, at afstanden mellem de to tangenter er $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3. I trekant ABC er siden $AB = 5$, siden $AC = 7$ og siden $BC = 8$. Trekanten er grundflade i en pyramide, hvis højde DO har længden $7\sqrt{\frac{2}{3}}$. Højdens fodpunkt O er centrum for den omskrevne cirkel til trekant ABC.

   Find pyramidens volumen.

   Find tillige arealet af trekant ACD samt de vinkler, denne sideflade danner med grundfladen og med sidefladen BCD.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1964

Matematik I

1. Givet en parabel med ligningen $y^2 = 4x$ samt punkterne $A(-12{,}0)$ og $O(0{,}0)$.

   Find, idet P er et vilkårligt punkt på parablen, det geometriske sted for skæringspunktet mellem linien AP og en linie gennem O vinkelret på linien OP.

   Angiv den fundne kurves art og beliggenhed.

2. I en plan π er givet et kvadrat $ABCD$ med siden a. M er midtpunktet af siden AB, N er et punkt på siden BC, og R er et punkt på siden CD således beliggende, at $DR = BN$. I N tegnes normalen til π, og punktet T afsættes på normalen således, at $NT = BN$.

   Bestem længden af BN således, at rumfanget af tetraedret T-MNR bliver så stort som muligt.

3. Der er givet to liniestykker p og q.

   Konstruer en trekant ABC, således at $BC = 2AB$, $BD = p$ og $DC = q$, hvor D betegner skæringspunktet mellem siden BC og halveringslinien for vinkel A.

   Diskussion kræves.

   Beregn sider og vinkler i trekant ABC, når $p = 2{,}464$ og $q = 3{,}696$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1964

Matematik II

1. Løs ligningen

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}.$$

2. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = x\sqrt{4 - x^2}.$$

En figur F i første kvadrant begrænses af kurven, dennes tangent i (0,0) og en kurvetangent, som er parallel med x-aksen.
Bestem arealet af F.

3. En plan skærer en omdrejningskegleflade i en ellipse med storaksen 12 og excentriciteten $\frac{1}{6}$. Planens vinkel med keglefladens akse er lig med keglefladens toppunktsvinkel.
Bestem keglefladens toppunktsvinkel.
Bestem afstandene fra keglefladens toppunkt til hvert af ellipsens fire toppunkter.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1964

Sygeeksamen.

Matematik I

1. Grundfladen i et ret prisme er et kvadrat. Prismets overflade er 32, og hver af dets diagonaler er $\sqrt{17}$.

   Beregn prismets højde og siden i dets grundflade.

2. Find ligninger for de cirkler, der går gennem punkterne A (1,2) og B (3,4) og har linien med ligningen

$$3x + y - 3 = 0$$

som tangent.

3. I trekant ABC tegnes medianen m_a fra A og medianen m_b fra B. Medianernes skæringspunkt kaldes O. Trekant AOB's indskrevne cirkel rører m_a i punktet D. Idet denne cirkels radius er lig med 1, $AD = 2$ og $DO = 1$, skal man beregne sider og vinkler i trekant ABC.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1964

Sygeeksamen.

Matematik II

1. Givet ellipsen med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A er toppunktet $(a,0)$, P er et vilkårligt ellipsepunkt, og Q er P's projektion på x-aksen. Trekant APQ drejes 360° om x-aksen.

Bestem P's abscisse således, at den ved drejningen fremkomne kegle får størst muligt rumfang.

2. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x - 2} \quad .$$

Den figur, der begrænses af kurven, x-aksen og linien med ligningen $x = 1$, drejes 360° om x-aksen. Find rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme.

3. T-$ABCD$ er en regulær firsidet pyramide, hvis kanter alle er lige lange, og M betegner midtpunktet af sidekanten TA. De tre punkter B, C og M bestemmer en plan π.

Bevis, at π går gennem midtpunktet N af TD.

Bestem de spidse vinkler, som π danner med planerne TBC og $ABCD$.

Bestem forholdet mellem rumfangene af de to legemer, som π deler pyramiden i.

STUDENTEREKSAMEN MAJ – JUNI 1965

Matematik I

1. Løs ligningen

$$(x^3 + i)(x^2 - 1 + i\sqrt{3}) = 0.$$

Ligningens rødder x_1, x_2, x_3, x_4 og x_5 skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal.

Find værdien af

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6.$$

2. En ellipsebue E er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{2}\cos t \\ y &= 2\sin t \end{aligned} \qquad 0 < t < \pi\,.$$

P betegner et vilkårligt punkt på E, og Q betegner skæringspunktet mellem x-aksen og normalen til E i P. Punktet S er beliggende på liniestykket PQ's forlængelse ud over Q, således at længden af QS er lig med længden af PQ.

Bestem det geometriske sted for S, når P gennemløber ellipsebuen E.

3. For hvilke positive tal k eksisterer der en trekant ABC, i hvilken vinkel $A = 60°$ og $OB : OA = k$, hvor O betegner centrum for trekantens indskrevne cirkel?

Beregn de ubekendte vinkler og sider i en sådan trekant, når $k = 1{,}234$ og siden BC har længden $4{,}237$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1965

Matematik II

1. Bestem det tal x i intervallet $-2 \leqq x < -1$, for hvilket

$$\int_{-2}^{x} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln 3,$$

hvor ln betegner den naturlige logaritme.

2. I et ret prisme $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ er grundfladen $ABCD$ et rektangel med sidelængderne $AB = 1$ og $BC = 2$. Enhver af de indbyrdes parallelle kanter AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 har længden 3.

En plan π gennem A_1 skærer kanten BB_1 i B_2, så $BB_2 = 2$, og kanten DD_1 i D_2, så $DD_2 = 2$. Endvidere skærer den kanten CC_1 i C_2.

Beregn 1) længden af liniestykket CC_2.
2) siderne og vinklerne i firkant $A_1B_2C_2D_2$.
3) den spidse vinkel mellem planen π og planen gennem A, B, C og D.

3. K betegner det kurvestykke, der er bestemt ved

$$y = \cos x, \qquad \pi \leqq x \leqq 2\pi,$$

og l betegner den linie, hvis ligning er

$$4x - 5y + 10 = 0.$$

Idet afstanden (regnet positiv) fra linien l til et vilkårligt punkt på K kaldes d, skal man bestemme den største og den mindste værdi, som d kan antage.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1965

Matematik I

SÆROPGAVER

1. Angiv de reelle tal x, for hvilke det gælder, at

$$\frac{3 - x}{x} \leqq 3 - x < x^2 + \frac{1}{x} .$$

2. I et koordinatsystem i planen er en ellipse givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3}\,\cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \qquad 0 \leqq t < 2\pi .$$

K er et kvadrat, hvis sider rører ellipsen, og hvis vinkelspidser ligger på koordinatakserne.

Find koordinaterne til ellipsens røringspunkter med siderne i K.

Vis, at den indskrevne cirkel for K går gennem ellipsens brændpunkter.

3a. En terning $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$, hvor AA_1, BB_1, CC_1 og DD_1 er parallelle kanter, har kantlængden 2.

M er midtpunktet af AB, og N er midtpunktet af B_1C_1. Planen gennem M, N og D_1 betegnes p, og den skærer kanten BB_1 i punktet P.

Find længden af BP, f. eks. ved regning i et passende valgt koordinatsystem.

Beregn vinklen mellem p og diagonalplanen AA_1C_1C.

3b. Inden for januar måned et år, i hvilket den 1. januar er en søndag, udtrækkes tilfældigt 5 forskellige dage.

Beregn

1) sandsynligheden for, at alle udtrukne dage falder på ulige datoer.

2) sandsynligheden for, at netop to af de udtrukne dage er tirsdage.

3) sandsynligheden for, at de udtrukne dage ligger ækvidistant (d.v.s. med lige store mellemrum).

De søgte sandsynligheder angives som decimalbrøker med to betydende cifre. Januar har 31 dage.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

Matematik II

SÆROPGAVER

1. Løs ligningssystemet

$$3x^2 - iy^3 = 8 + 12i$$
$$2x^2 + (1+i)y^3 = 7 + 7i$$

inden for mængden af komplekse tal.

2. Der er givet en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \frac{3 \sin x}{2 - \cos x} ,$$

hvor x betegner et reelt tal.

Undersøg funktionens definitionsmængde, periodicitet, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og extrema.

Tegn på grundlag heraf funktionens grafiske billede i et periode-interval.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

3a. To punkter P og Q bevæger sig i en plan, hvori der er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O, således at der til tiden t gælder, at

$\overrightarrow{OP}$ har koordinatsættet $(t^2 - t,\ 22 - t)$, og
$\overrightarrow{OQ}$ har koordinatsættet $(t - 2,\ 3t^2 - 5t)$.

Bestem den mindste værdi, arealet af trekant OPQ antager.

3b. I en plan π er der givet et koordinatsystem. Desuden er der givet følgende afbildninger af π på π:

f er spejlingen i linjen med ligningen $x - 2y = 0$,
g er den rette affinitet, som har førsteaksen (x-aksen) som affinitetsakse og forvandlingstallet 2,
p er den parallelforskydning, der afbilder punktet O(0,0) i punktet P(4,0).

Bestem det punkt Q, der opfylder betingelsen

$$g(f(Q)) = p(Q).$$

Idet q er den parallelforskydning, der opfylder betingelsen

$$g(f(P)) = q(P),$$

skal man finde billedet af punktet S(1,1) ved parallelforskydningen q.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1965

Sygeeksamen.

Matematik I

1. For hvilke a gælder det, at ligningssystemet

$$\begin{aligned}(2 - 5i)x + (1 + i)y &= 8 + i \\ a\,x + (1 - i)y &= 1 - 8i\end{aligned}$$

har netop én løsning?

For hvilke a har ligningssystemet mere end én løsning?

Løs ligningssystemet for $a = 2i$.

De i resultaterne forekommende komplekse tal skal angives på formen $\alpha + i\beta$, hvor α og β er reelle tal.

2. I et omskriveligt trapez $ABCD$ (linien AB parallel med linien DC) er vinkel $A = 122°,26$, $AB = 5{,}271$ og $AD = 4{,}278$.

Beregn radius r i den indskrevne cirkel samt de ubekendte vinkler og sider i trapezet.

3. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

S_a betegner arealet af det område, der begrænses af kurven, x-aksen og linien $x = a$ $(a > 0)$.

Find S_a for $a = 2$.

R_a betegner arealet af det rektangel, der har en side på hver af koordinatakserne og en vinkelspids i det kurvepunkt, hvis abscisse er a $(a > 0)$.

Find a, når

$$\frac{S_a}{R_a} = \frac{17}{25}.$$

Find grænseværdien af $\dfrac{S_a}{R_a}$ for a gående mod uendelig.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1965

Sygeeksamen.

Matematik II

1. For hvilke tal a har ligningen

$$a\,(\sin^2 x - 4) = \sin^2 x + 2 \sin x$$

løsninger?

Løs ligningen for 1) $a = \frac{1}{3}$, 2) $a = -\frac{1}{2}$.

2. For hvilke tal m fremstiller ligningen

$$2x^2 + my^2 - 4x + 2y + m = 0$$

en ellipse?

Find for $m = 1$ koordinaterne til ellipsens brændpunkter og ligninger for ellipsens ledelinier.

3. I et tresidet ret prisme ABC-PQR har enhver af de parallelle kanter AP, BQ og CR længden 4. I grundfladen ABC er vinkel $C = 90°$, og siderne AC og BC har længderne henholdsvis $2\sqrt{3}$ og $\sqrt{6}$. Midtpunktet af AP betegnes M, og planen, der er bestemt ved punkterne C, M og Q, betegnes π.

Beregn de spidse vinkler, som π danner med planerne ABC og $BCRQ$.

Find rumfanget af tetraederet $CMQR$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Løs inden for de komplekse tals legeme ligningen

$$(8z^3 + i)(z^4 + 7 + i\,4\sqrt{2}) = 0,$$

og afbild de fundne rødder som punkter i den komplekse plan.

2. I et plant koordinatsystem er givet parablen med ligningen $y^2 = 4x$. A, B og C er de tre punkter på parablen, hvis ordinater er henholdsvis 2, 6 og -4.

Bevis, at cirklen gennem punkterne A, B og C går gennem parablens brændpunkt, samt at cirklen og parablen har fælles tangent i punktet C.

Beregn vinklen mellem parabeltangenterne i B og C.

3a. En skål indeholder 7 røde, 6 gule og 5 blå kugler. På tilfældig måde udvælges 4 kugler af skålen.

Find sandsynligheden for, at dette udvalg indeholder

1) 4 røde kugler.
2) 2 gule og 2 blå kugler.
3) mindst én rød kugle.
4) mindst én kugle af hver farve.

De fundne sandsynligheder angives som decimalbrøker med 2 betydende cifre.

3b. I en plan er givet to koordinatsystemer I og II med fælles begyndelsespunkt O. II fremgår af I ved en drejning om O på $v°$, hvor $0 < v < 360$. Idet (x,y) er koordinatsættet til et vilkårligt punkt i systemet I, og (t,u) er koordinatsættet til samme punkt i II, gælder ligningerne

$$x = \frac{3}{5}t - \frac{4}{5}u$$

$$y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{5}u\ .$$

Beregn v.

En kurve K har i II ligningen

$$9t^2 + 16u^2 - 24tu - 4t - 3u = 0,$$

og en linje L har i I ligningen

$$2x + y = 3.$$

Angiv en ligning for K i I.

Find, såvel i I som i II, koordinaterne til de punkter, der er fælles for K og L.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1966
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Tegn i et koordinatsystem i planen hver af punktmængderne A og B bestemt ved henholdsvis

$$\{(x,y) \mid (2x + 3y - 6)(x + 5) = 0\}$$

og

$$\{(x,y) \mid (4x^2 + 25y^2 - 100)(16x^2 + 9y^2 - 144) = 0\}.$$

Bestem koordinaterne til punkterne i $A \cap B$.

2. Der er givet en funktion f bestemt ved

$$f: \quad x \curvearrowright \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},$$

hvor x betegner et reelt tal.

Undersøg f og dens graf med henblik på nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter, og tegn grafen.

F betegner den punktmængde, der er begrænset af førsteaksen (x-aksen), grafen for f samt linjen med ligningen $x = t$, hvor $t > 1$.

Find arealet $A(t)$ af punktmængden F.

F drejes 360° om førsteaksen. Find rumfanget $V(t)$ af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

Undersøg, om henholdsvis $A(t)$ og $V(t)$ har en grænseværdi for t gående mod uendelig, og angiv i bekræftende fald grænseværdien.

3a. Givet et koordinatsystem i rummet. En linje l har parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = (2 + 2t,\ 10 - 3t,\ 4).$$

Bestem koordinaterne til de to punkter A og B på l, der har afstanden 9 fra begyndelsespunktet O (0,0,0).

Find en ligning for den plan α, der indeholder såvel linjen l som punktet C (2, 1, 1).

Beregn rumfanget af tetraederet $OABC$.

3b. En plan bevægelse af et punkt $P(x,y)$ er givet ved

$$x = t(t-3)^2$$
$$y = \tfrac{1}{4}\, t^2(t-4)^2,$$

hvor t er tiden $(-\infty < t < \infty)$.

Bestem monotoniintervallerne for de to koordinatfunktioner og skitser på dette grundlag banekurven.

Bestem mindsteværdien af accelerationsvektorens længde.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1966
MATEMATISK LINJE

NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Løs ulighedssystemet

$$7 > |x+2| + |x-1| > |x+3| .$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = 2x - x \ln x .$$

Undersøg f i intervallet $[1; 10]$ med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold. Tegn grafen af f.

Find arealet af den punktmængde, der begrænses af kurven, x-aksen og linjen med ligningen $x = 1$.

3a. Fire personer A, B, C og D spiller 5 gange et spil, og ved hvert af de 5 spil har hver af de fire personer sandsynligheden $\frac{1}{4}$ for at vinde.

Find sandsynligheden for, at

1) A ikke vinder noget af de 5 spil.
2) A vinder netop 2 af de 5 spil.
3) A vinder netop 2 af de 5 spil, når det vides, at han har vundet det første spil.
4) A vinder netop 2, og B vinder netop 2 af de 5 spil.
5) A vinder 2 og B, C og D hver 1 af de 5 spil.

Alle resultater ønskes angivet som decimalbrøk med to decimaler.

3b. Beregn arealet af den plane punktmængde M, der i et koordinatsystem er bestemt ved

$$\left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 3 \wedge 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}.$$

Bestem tallet a, således at den delmængde af M, der ligger mellem førsteaksen (x-aksen) og linjen med ligningen $y = a$, får et areal, der udgør $\frac{39}{40}$ af arealet af M.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

SÆROPGAVER I GAMMELT PENSUM

---

1. Inden for de komplekse tals område betragtes polynomiet

$$P(x) = x^5 + (1+i)x^4 + (2-i)x^3 + ix^2 - (1-i)x + 1 + 2i.$$

Vis, at $P(x)$ er deleligt med polynomiet

$$x^3 + i.$$

Løs dernæst ligningen

$$P(x) = 0.$$

Alle rødder skal angives på formen $a + ib$, hvor a og b betegner reelle tal.

2. I et retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt O er givet ellipsen med ligningen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Find en ligning for den parabel, der har toppunkt i O og brændpunkt i F, hvor F betegner det af ellipsens brændpunkter, der har positiv abscisse.

Find endvidere en ligning for ellipsens tangent t i punktet $P(-3, 3\tfrac{1}{5})$.

Bevis, at t er tangent til parablen, og angiv koordinaterne til dens røringspunkt med parablen.

3. Givet to linjestykker p og q. Konstruer et parallelogram $ABCD$ med diagonalerne $AC = p$ og $BD = q$, når desuden siden AB skal danne en vinkel på $60°$ med diagonalen AC.

Diskussion ønskes.

Beregn parallelogrammets sider og vinkler, når $p = 2{,}000$ og $q = 2{,}800$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

SÆROPGAVER I GAMMELT PENSUM

---

1. Løs ligningen

$$3 \sin^2 x - a \sin x \cos x = 1 - a$$

for

1) $a = -\frac{1}{2}$.

2) $a = -2$.

2. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = (3 + x) \sqrt{3 - x}.$$

Beregn arealet af det lukkede område, som begrænses af kurven og x-aksen, samt rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når dette område drejes 360° om x-aksen.

3. Givet et regulært tetraeder $T—ABC$. Med M betegnes midtpunktet af kanten TA. B_1 betegner et punkt på linjen AB således beliggende, at B er midtpunktet af linjestykket AB_1. C_1 betegner et punkt på linjen AC således beliggende, at C er midtpunktet af linjestykket AC_1.

Find forholdet mellem rumfanget af tetraederet $T—ABC$ og rumfanget af tetraederet $M—AB_1C_1$.

Med π betegnes planen gennem M, B_1 og C_1. Find den vinkel, som π danner med

1) planen bestemt ved A, B og C.

2) planen bestemt ved B, C og T.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Løs ulighedssystemet

$$|x - 2| - |x - 1| \leqq 2x + 3 \leqq -x^2 + 2.$$

Illustrer resultatet ved tegning i et koordinatsystem af graferne for funktionerne f, g og h, hvor

$$\begin{aligned} f &: \quad x \curvearrowright |x - 2| - |x - 1|, \\ g &: \quad x \curvearrowright 2x + 3, \\ h &: \quad x \curvearrowright -x^2 + 2. \end{aligned}$$

2. I en given cirkel med radius r er indskrevet et rektangel $ABCD$. Dette rektangel er grundflade i et ret prisme, hvis højde er lig med $|AB|$.

Bestem $|AB|$ således, at prismets rumfang bliver størst muligt.

3a. I et koordinatsystem i rummet er punkterne O (0,0,0), A (3,0,0), B (0,3,0) og C (3,3,—3) hjørnespidser i et tetraeder.

Beregn tetraederets toplansvinkler langs kanterne OA, OB og AB.

Find en ligning for tetraederets omskrevne kugle K.

De to tangentplaner til K med røringspunkter O og A kaldes henholdsvis τ_O og τ_A.

Find en ligning for τ_O og en for τ_A.

Find en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem τ_O og τ_A.

3b. En kurve er i et koordinatsystem givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 2t \\ y &= -t^3 + 3t^2 - 2t \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Angiv de parameterværdier, for hvilke kurven enten skærer en koordinatakse eller har en vandret eller en lodret tangent.

Find koordinatsættene til de hertil hørende kurvepunkter samt en vektor på enhver af tangenterne i det punkt, hvori kurven skærer sig selv. Tegn på dette grundlag kurven.

Bevis, at kurven er symmetrisk om førsteaksen (x-aksen).

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Bevis ved induktion formlen

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n},$$

hvor n er et vilkårligt positivt helt tal større end 1.

Find grænseværdien a af

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

for n gående mod uendelig.

Find dernæst et positivt helt tal N, således at

$$\left|\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-a\right|<\frac{1}{1000} \text{ for } n>N.$$

2. I en plan er valgt et koordinatsystem. Med f betegnes multiplikationen med 2 ud fra punktet $Q(1,-1)$, og med g betegnes parallelforskydningen, der afbilder punktet $O(0,0)$ i punktet $P(-1,-1)$. Ellipsen med ligningen

$$4x^2+16y^2-4x-3=0$$

betegnes E.

Find en ligning for ellipsen $g(f(E))$.

Find centrum og halvakser for hver af de to ellipser.

Idet l betegner linjen med ligningen $x+y=1$, skal man finde en ligning for den linje m, om hvilken det gælder, at $l=g(f(m))$.

3a. For ethvert komplekst tal α betegnes med f_α den afbildning af mængden af komplekse tal ind i mængden af komplekse tal, der er bestemt ved

$$f_\alpha:\quad z \curvearrowright z^2+i\alpha z.$$

Bestem tallet α, så der gælder

$$f_\alpha(f_\alpha(i))=i.$$

Løs for $\alpha=0$ ligningen

$$f_\alpha(f_\alpha(z))=-8+i\,8\sqrt{3}.$$

VEND!

3b. Undersøg funktionen

$$f\colon\ x \curvearrowright \frac{x+1}{\sqrt{|x|}}$$

(hvor x er en reel variabel) med henblik på nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og lokale ekstrema.

Tegn grafen for f.

Beregn arealet af den punktmængde, der er givet ved

$$\{(x,y) \mid\ x > 0 \land f(x) \leqq y \leqq 2\tfrac{1}{2}\}.$$

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1966

MATEMATISK LINJE

NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Tegn i et koordinatsystem i planen de to punktmængder bestemt ved

$$\{(x,y) \mid y = \mid \tfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6\mid\}$$

og

$$\{(x,y) \mid y = 2 - x + 2\mid 2 - x\mid\}.$$

Angiv, f. eks. på grundlag af en figurbetragtning, løsningsmængden til uligheden

$$\mid \tfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6\mid \leqq 2 - x + 2\mid 2 - x\mid .$$

2. I et koordinatsystem i planen er givet en firkant $ABCD$. Siden AD ligger på linjen med ligningen

$$x + 3y + 4 = 0,$$

og siden AB ligger på linjen med ligningen

$$11x - 8y + 44 = 0.$$

Punktet B ligger på andenaksen (y-aksen), $\overrightarrow{BC}$ har koordinatsættet $(6, -\tfrac{1}{2})$, og punktet D ligger på midtnormalen for diagonalen AC.

Beregn firkantens areal samt vinklerne B og D.

3a. En funktion f er for $x \in [0;\ 2\pi]$ bestemt ved

$$f(x) = \cos x + \sin x - 1.$$

Undersøg f med hensyn til fortegnsvariation og monotoniforhold, og angiv dens værdimængde.

Tegn grafen for f.

Find en ligning for en tangent med hældningskoefficienten (stigningstallet) $\sqrt{2}$.

Den punktmængde i første kvadrant, der begrænses af x-aksen og grafen, drejes $360°$ om x-aksen. Find det herved frembragte legemes rumfang.

VEND!

3b. Funktionen f defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - |x|^3) & \text{for } x \in [-1;\, 1] \\ 0 & \text{for } x \notin [-1;\, 1] \end{cases}$$

(hvor k er en konstant) er en frekvensfunktion.

Bestem k, og tegn grafen for f.

Find den tilsvarende fordelingsfunktion F, og tegn også denne funktions graf.

Find ved denne fordeling sandsynligheden for

1) $x < -\frac{1}{2}$.

2) $x < \frac{1}{2}$.

3) $|x| < \frac{1}{2}$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1966
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

SÆROPGAVER I GAMMELT PENSUM

---

1. Angiv de reelle tal x, for hvilke

$$\frac{x+2}{x} < 3x < \frac{x+4}{x-1} .$$

2. Undersøg og tegn kurven med ligningen

$$y = \frac{x^2-3}{x-2} .$$

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven, y-aksen og linjen med ligningen $y = x$.

3. I en firsidet pyramide T-ABCD er grundfladekanterne givet ved

$$AB = 7,\ BC = 1 \text{ og } AD = CD = 5.$$

Endvidere er grundfladediagonalen $AC = 5\sqrt{2}$. Pyramidens højde er TO, hvor O er midtpunktet af AC.

Bevis, at pyramiden har en omskreven kugle.

Find pyramidens højde TO, når det er givet, at kuglens radius $R = \frac{15}{4}$, og at kuglens centrum ligger i pyramidens indre.

Beregn vinklen mellem AT og AC samt vinklen mellem DT og AC.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1966

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

SÆROPGAVER I GAMMELT PENSUM

---

1. Inden for de komplekse tals område har ligningen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 6x + 2 = 0$$

dobbeltroden 1.

Bestem koefficienterne a og b samt ligningens øvrige rødder p og q.

Find dernæst

$$p^4 - q^4 .$$

Alle resultater skal angives på formen c + id, hvor c og d betegner reelle tal.

2. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er P et punkt på parablen $y = x^2$ og Q et punkt på parablen $x = y^2$ således beliggende, at OP og OQ er vinkelret på hinanden.

Bestem koordinaterne til P og Q, når projektionen (regnet positiv) af PQ på x-aksen er dobbelt så lang som projektionen (regnet positiv) af PQ på y-aksen.

3. I den konvekse firkant ABCD er siden AD = 2,588, siden CD = diagonalen AC = diagonalen BD = 5,000 og vinkel BAD = $122^{\circ},34$.

Beregn firkantens ubekendte sider og vinkler.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1967

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Angiv på en figur hver af punktmængderne A og B, som i et koordinatsystem er bestemt ved henholdsvis

$$\{ (x,y) \mid 4 + xy \geqq 0 \}$$

og

$$\{ (x,y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 3 \}.$$

Beregn arealet af $A \cap B$ med 3 decimaler.

2. I en urne er nedlagt 20 sedler. Ved udtrækning vil en bestemt af sedlerne give en gevinst på 1 kr., to andre af sedlerne hver en gevinst på 2 kr. og en fjerde af sedlerne en gevinst på 5 kr. Resten af sedlerne vil ved udtrækning ingen gevinst give. Der udtrækkes på tilfældig måde tre sedler samtidigt.

Find sandsynligheden for, at den samlede gevinst netop bliver

^{1}) 1 kr. ^{2}) 2 kr. ^{3}) 3 kr. ^{4}) 5 kr. ^{5}) 8 kr.

3a. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt P bevæger sig således, at $\overrightarrow{OP}$ har koordinatsættet

$$(\cos t + \sin t,\ \cos^2 t - \tfrac{1}{2}),$$

hvor t betegner tiden og $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

Bestem banekurvens skæringspunkter med akserne samt de punkter af banekurven, i hvilke der er vandret eller lodret tangent. Bestem hastighedsvektorerne i alle disse punkter.

Tegn på dette grundlag banekurven.

Bevis, at der eksisterer mindst én værdi af t, for hvilken accelerationsvektoren har længden 1.

VEND!

3b. De reelle tals legeme betegnes R. Find de tal $a \in R$, for hvilke mængden

$$L = \{ x \in R \mid \; 4\,e^{2x} - 11\,e^{x} + 4\,a^{2} - 3 = 0 \}$$

ikke er tom, og angiv for enhver af de fundne værdier af a antallet af elementer i L.

Find elementerne i L, når $a = 1\tfrac{1}{2}$.
Bestem de tal a, for hvilke $x = \ln 0{,}11$ er element i L.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1967

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Idet

$$P:\quad z \curvearrowright (z-1-i)(z-1+i)(z-3)$$

er en given funktion af en kompleks variabel z, skal man løse hver af ligningerne

$$P(z) = P(4)$$

og

$$P(z^2) = P(4).$$

2. En funktion f er bestemt ved ligningen

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2\cos x},$$

hvor x er reel og $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Undersøg f og dens grafiske billede F med henblik på nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn F.

Idet g er den funktion, hvis grafiske billede er tangenten til F i punktet med abscissen π, skal man beregne arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{\, (x,y) \mid \; 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi \;\; \wedge \;\; f(x) \leqq y \leqq |g(x)| \,\}.$$

3a. I rummet er valgt et koordinatsystem. En pyramide har toppunkt $T(0,0,8)$, og dens grundflade er en firkant med vinkelspidserne $A(6,8,0)$, $B(-6,8,0)$, $C(-6,-8,0)$ og $D(6,-8,0)$.

Beregn pyramidens toplansvinkler.
Find en ligning for pyramidens omskrevne kugleflade.
Find en ligning for denne kuglefladens tangentplan i B.
Beregn afstanden fra T til denne tangentplan.

VEND!

3b. I en plan er givet et koordinatsystem. Med g betegnes den rette affinitet med andenaksen (y-aksen) som affinitetsakse og forvandlingstal -2. Med f betegnes drejningen på $90°$ i negativ omløbsretning omkring punktet med koordinatsættet $(-1, -1)$.

Idet $P(x,y)$ er et vilkårligt punkt i planen, skal man finde koordinatsættet for billedpunktet $f(g(P))$.

Find koordinatsættet for det punkt F i planen, for hvilket

$$F = f(g(F)).$$

En kurve K har ligningen

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 48y + 137 = 0.$$

Find en ligning for kurven $K_1 = f(g(K))$, og vis, at K_1 er en ellipse.

Brændpunkterne for ellipsen K_1 betegnes F_1 og F_2. Find arealet af trekant FF_1F_2.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1967

MATEMATISK LINJE

NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Tegn i et koordinatsystem det grafiske billede af funktionerne f og g, hvor

$$f:\quad x \curvearrowright \tfrac{3}{4}x^2 - 3\,|x| + 3$$

og

$$g:\quad x \curvearrowright \tfrac{3}{2}\,\big|\,2 - |x|\,\big|\,.$$

Angiv dernæst de tal x, for hvilke det gælder, at

$$g(x) \leqq f(x).$$

2. Med $P(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$, betegnes sandsynligheden for ved et kast med en vis falsk terning F at slå n øjne. Det er givet, at

$$P(1) = \tfrac{1}{4} \;\wedge\; P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \tfrac{1}{6}.$$

Beregn med 4 decimaler sandsynligheden for den hændelse, at man ved seks på hinanden følgende kast med F får

a) en sekser ved netop to af kastene.
b) en sekser ved mindst to af kastene.

En symmetrisk terning S, der i udseende ikke kan skelnes fra F, ligger på bordet sammen med denne. Man griber en tilfældig af de to terninger, kaster den og slår en sekser.

Beregn sandsynligheden for, at det var F, man kastede.

3a. Grafen F af funktionen

$$f:\quad x \curvearrowright ax^3 + bx^2 + c$$

går gennem punkterne $A(4,6)$, $B(1,0)$ og $C(-2,-6)$.

Beregn tallene a, b og c.

Tegn F på grundlag af støttepunkter, deriblandt de givne og dem, der svarer til funktionens lokale ekstrema.

Beregn arealet af den figur, der begrænses af linjestykket AB og en bue af F.

Bestem koordinaterne til de punkter af F, i hvilke denne har en tangent, som er parallel med linjen AC.

VEND!

3b. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(-1, 7)$ og $B(2, 6)$. D er det punkt, om hvilket det gælder, at $\overrightarrow{AD} = -3\,\hat{\boldsymbol{v}}$, hvor $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$.

Find koordinatsættet for D.

En linje l har parameterfremstillingen

$$x = 1 + t$$
$$y = -4 + 2\,t,$$

hvor t betegner et reelt tal.

Med P_t betegnes det til t hørende punkt på l. Bestem de tal t, om hvilke det gælder, at vinkel BP_tD er ret.

Bestem det tal t, for hvilket arealet af firkant ABP_tD er 35.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1967

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Løs ligningssystemet

$$2\,|x| + y - 2 = 0$$
$$x - |y - 1| + 2 = 0.$$

2. I en krukke ligger 20 sedler mærket med tallene 6, 7, 8, ..., 24, 25. På tilfældig måde trækkes samtidigt to sedler.

Find sandsynligheden for, at

1) begge de udtrukne tal er lige.
2) et og kun ét af de udtrukne tal er deleligt med 5.
3) mindst ét af de udtrukne tal er deleligt med 3.
4) differensen mellem de to udtrukne tal er delelig med 3.

3a. Der er givet to funktioner

$$f: \quad z \curvearrowright (-4 + 8\,i)\,z + 12 + 8\,i$$

og

$$g: \quad z \curvearrowright z^2,$$

hvor z er en kompleks variabel.

Find $f(2 + i)$ og $g(2 + i)$.

Løs ligningen

$$\frac{f(z)}{g(z)} = -4(1 + i).$$

Idet $A = \{ z \mid |z| = 2 \}$, $B = f(A)$ og $C = g(A)$, skal man beskrive de til A, B og C svarende punktmængder i den komplekse plan.

VEND!

3b. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter, og tegn grafen.

Bestem arealet af den punktmængde M, der er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 4 \leqq x \leqq 5 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

Find, ved anvendelse af

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x-1)},$$

rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes om førsteaksen (x-aksen).

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1967

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Beregn arealet af den punktmængde M, som i et koordinatsystem i planen er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid \quad 4|x| + 2 \geqq y \geqq 2x^2 \quad \wedge \quad y \leqq 8\}.$$

M drejes om andenaksen (y-aksen), hvorved der dannes et omdrejningslegeme. Find dette legemes rumfang.

2. I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(6,6,7),\ B(2,6,9) \quad \text{og} \quad C(0,0,11).$$

Beregn vinklerne i trekant ABC.

Find en ligning for den plan p, der indeholder trekant ABC.

Vis, at der findes en kugleflade K, der har centrum i punktet $O(0,0,0)$, og som går gennem A, B og C.

Find koordinaterne til centrum for trekant ABC's omskrevne cirkel.

3a. Et punkt $P(x,y)$ bevæger sig i et plant koordinatsystem i henhold til parameterfremstillingen

$$x = t + \frac{1}{t}$$

$$y = t - \frac{1}{t},$$

hvor t betegner tiden og $t > 0$.

Vis, at såvel hastighedsvektoren som accelerationsvektoren har en konstant projektion på den vektor $\boldsymbol{h}$, der har koordinatsættet $(1,1)$.

Find for vilkårligt tidspunkt t koordinaterne til hastighedsvektorens projektion på accelerationsvektoren.

Vis, at til ethvert tidspunkt t er vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{OP}$ og $\boldsymbol{h}$ lig med vinklen mellem hastighedsvektoren og $\boldsymbol{h}$.

VEND!

3b. I en plan, hvori der er valgt et koordinatsystem, er givet to punktmængder A og B bestemt ved henholdsvis

$$\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 = 64\}$$

og

$$\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 - 10x - 48y + 144 = 0\}.$$

Vis, at A og B er ellipser, og angiv for hver af dem centrums koordinater og halvaksernes længder.

Find ligninger for de billeder A_1 og B_1, der dannes af A og B ved den rette affinitet med x-aksen som affinitetsakse og forvandlingstal -2.

Vis, at A_1 og B_1 har et røringspunkt, og angiv en ligning for fællestangenten t_1 til A_1 og B_1 i røringspunktet.

Tangenten t_1 er ved den nævnte affinitet billede af en fællestangent t til ellipserne A og B. Find en ligning for t.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1967

MATEMATISK LINJE

NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Bestem reelle tal a, b, c og d, således at polynomiet

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

opfylder nedenstående to betingelser:

For alle reelle tal x gælder $3\,f(x) - x\,f'(x) = 9\,x^2 - 6$,

og

polynomiet f har lokalt maksimum for $x = 2$.

2. Bestem mængden af de reelle tal x, for hvilke

$$x - 5 < \sqrt{x+7} \leqq x + 1\,.$$

3a. Vi betragter et eksperiment, der består i kast med tre symmetriske terninger, først et kast med en hvid, dernæst et kast med en grøn og sluttelig et kast med en rød terning.

Find sandsynligheden for

1) at to af terningerne viser 4 øjne og den tredje 6 øjne.
2) at den hvide og den grønne terning tilsammen viser et lige øjenantal.
3) at øjenantallene, der vises af de tre terninger, tilsammen er større end 9.
4) at summen af øjenantallene for alle tre terninger er større end 9 under forudsætning af, at den hvide og den grønne viser øjenantal, der tilsammen er større end 5.

De fundne sandsynligheder ønskes angivet som uforkortelige brøker.

3b. Undersøg funktionen

$$f\colon\ x \curvearrowright \left(x - \frac{1}{x}\right)(x - 1)$$

og dens graf F med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn grafen.

Beregn arealet af den punktmængde A, der begrænses af F, x-aksen og linjen med ligningen $x = 2$.

Beregn arealet af den punktmængde B, der begrænses af F, x-aksen og linjen med ligningen $x = -\frac{1}{2}$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1968

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Bestem mængden af de reelle tal x, for hvilke

$$\sqrt{x+3} > \frac{x+1}{|x|} .$$

2. I et koordinatsystem i rummet er givet de tre punkter $A(1,2,2)$, $B(3,—3,—4)$ og $C(0,8,8)$.

Find arealet af trekant ABC.

Bestem koordinatsættet for et fjerde punkt D, om hvilket følgende oplyses:

a) Punktet D og koordinatsystemets begyndelsespunkt ligger på hver sin side af planen gennem A, B og C, og

b) tetraederet $ABCD$ har rumfanget $9\frac{1}{6}$, og

c) punktet D ligger på linjen med parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (6+2t,\ 1+t,\ 1+t).$$

3a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(10-x) + \ln(x+4) - \ln 24 ,$$

hvor x er en reel variabel.

Undersøg f og dens graf med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniegenskaber og asymptoter. Tegn grafen, og bevis, at den er symmetrisk om en linje parallel med andenaksen.

Find arealet af den punktmængde, der begrænses af grafen og førsteaksen.

3b. I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = (t^2,\ t^2 - \tfrac{1}{3}t^3), \quad -\infty < t < \infty .$$

Tegn kurven på grundlag af støttepunkter, og bestem koordinatsættene til de punkter af kurven, i hvilke denne har en tangent, som er parallel med en koordinatakse.

Beregn arealet af den figur, der begrænses af kurven og x-aksen.

Koordinatsystemets begyndelsespunkt O deler kurven i to dele. Bevis, at hver af disse to delkurver har samme linje L som tangent (halvtangent) i O, og angiv en ligning for L.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1968

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

---

1. Bestem de komplekse tal z, der tilfredsstiller ligningen

$$(z - i)^4 = (z - i)^{-4}.$$

Angiv, hvilket af disse tal der har størst modulus.

2. I rummet er valgt et koordinatsystem. Find en parameterfremstilling for den linje l, der går gennem punkterne $A(0,0,6)$ og $B(9,0,-3)$.

Med M betegnes punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y,z) \mid x = t \wedge y = \sqrt{t} \wedge z = 0\}, \quad \text{hvor} \quad 1 \leqq t \leqq 9.$$

Tegn en figur, der viser koordinatsystemet, linjen l og punktmængden M.

For et vilkårligt punkt P i M betegner P_1 dets projektion på l.

Find de punkter P, for hvilke det gælder, at

1) $|PP_1|$ er mindst.
2) $|PP_1|$ er størst.

3a. I planen er givet et koordinatsystem. Vektoren $\boldsymbol{v}$ har koordinatsættet $(2,-3)$. Punkterne A, B, C og D er vinkelspidser i en konveks firkant, og $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v} + 2\hat{\boldsymbol{v}}$, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$ og $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.

Bestem koordinatsættene for $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{DC}$.

Find $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Find koordinatsættet for vektoren $\overrightarrow{AP}$, når $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$, $k > 0$, og $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$.

Find længden af diameteren i den cirkel, som går gennem punkterne A, B og P.

3b. Løs for $a = -10$ ligningssystemet

$$a \cos x + 3 \sin y = 6$$
$$3 \cos x + a \sin y = a + 3$$

med hensyn til x og y.

Angiv de reelle tal a, for hvilke ligningssystemet har løsninger.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1968

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Der findes et reelt tal k, således at formlen

$$3 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2^3 + \ldots + (2n + 1) \cdot 2^{n-1} = (2n - k) \cdot 2^n + k$$

gælder for alle hele positive tal n.

Bestem k, og bevis formlen.

2. Der er givet funktionerne

$$f:\ x \curvearrowright 2\sqrt{x} \quad \text{og} \quad g:\ x \curvearrowright \sqrt{-x+5}\,.$$

Skitser i et koordinatsystem graferne for f og g.

Find for ethvert tal a i intervallet $[0;1]$ arealet af punktmængden M bestemt ved

$$\{(x,y) \mid \ a \leqq x \leqq a+1 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x) \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq g(x)\}.$$

Bestem det tal a, for hvilket arealet af M er størst, og find det største areal.

3a. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f:\ x \curvearrowright \ln x + \ln(x-2) + \ln(6-x)$$

og

$$g:\ x \curvearrowright \ln(3x),$$

hvor x betegner et reelt tal.

Bestem mængderne

$$M_1 = \{x \mid \ f(x) = g(x)\},$$
$$M_2 = \{x \mid \ f(x) > g(x)\},$$
$$M_3 = \{x \mid \ f(x) < g(x)\}.$$

Beregn derefter arealet af den punktmængde, der begrænses af graferne for f og g.

VEND!

3b. En fabrik har tre maskiner A, B og C, som hver fremstiller et meget stort antal skruer. Det har vist sig, at 5 % af A's produktion, 6 % af B's produktion og 3 % af C's produktion er defekt.

Man udtager på tilfældig måde 2 skruer blandt A's produktion. Hvor stor er sandsynligheden for, at

1) begge skruer er fejlfri?
2) én skrue er fejlfri og én er defekt?

Maskinerne A, B og C fremstiller henholdsvis 30 %, 25 % og 45 % af fabrikkens samlede produktion. Af denne udtages på tilfældig måde én skrue, og man konstaterer, at den er defekt. Hvor stor er sandsynligheden for, at den er fabrikeret af maskinen A?

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1968

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x,y)$ bevæger sig i planen, således at det til ethvert tidspunkt t gælder, at

$$x = \cos t - \sin t$$
$$y = \cos t + 2 \sin t.$$

Beregn det tidspunkt t_0, da hastighedsvektoren for første gang efter tidspunktet $t = 0$ står vinkelret på vektoren $\overrightarrow{OP}$.

2. I et koordinatsystem i rummet er givet planerne α og β med ligningerne henholdsvis

$$x + 2y + 3z = 4$$

og

$$5x + 6y + 7z = 8.$$

Beregn afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt til skæringslinjen s mellem α og β.

Beregn vinklen mellem s og planen med ligningen $z = 0$.

3a. Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2},$$

hvor x er en reel variabel.

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, ekstrema og asymptoter. Tegn grafen.

Bevis, at for $0 < x < 1$ er

$$-2x < f(x) < -x.$$

Bevis, at

$$-\tfrac{3}{4} < \int_0^1 f(x)\,dx < -\tfrac{1}{2}.$$

3b. Løs inden for mængden af komplekse tal hver af følgende tre ligninger:

1) $z^2 - 2 = (z + i)^2.$

2) $|z|^2 - 2 = (z + i)^2.$

3) $|z|^2 - 2 = |z + i|^2.$

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1968

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

---

1. Løs inden for mængden af reelle tal uligheden

$$\frac{4+x}{|x|} \leqq 5 - |x-1|,$$

og bestem derefter arealet af den plane punktmængde, som i et koordinatsystem er bestemt ved

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{4+x}{|x|} \leqq y \leqq 5 - |x-1|\right\}.$$

2. I et koordinatsystem i rummet foreligger et tetraeder med hjørnespidser $A\,(0,0,0)$, $B(10,0,0)$, $C(10,10,0)$ og $D(10,10,5)$.

1) Find tetraederets rumfang samt dets toplansvinkler langs kanterne AC, CD og DA.
2) Find afstanden mellem linjerne AB og CD samt afstanden mellem linjerne BC og AD.
3) Find en ligning for tetraederets omskrevne kugleflade.

3a. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Linjen med ligningen $y = \alpha x + q$ skærer parablen med ligningen $y = x^2$ i punkterne P og Q.

Vis, at det skalære produkt $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ afhænger af q, men er uafhængigt af α.

Om to punkter A og B på parablen er det givet, at $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 6$. Bestem koordinaterne til skæringspunktet mellem linjen AB og andenaksen (y-aksen).

Bestem den mindste værdi, som $\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OT}$ kan antage, når S og T er vilkårlige punkter på parablen.

3b. Tallene *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* skrives med rødt på hver sin af syv sedler, og tallene *5, 6, 7, 8, 9* skrives med sort på hver sin af fem andre sedler. Blandt de tolv sedler udtages på tilfældig måde fire sedler. Find sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

1) Der udtages fire sedler med røde tal.
2) Der udtages mindst én seddel med rødt tal.
3) Der udtages netop én seddel med et lige tal.
4) Der udtages fire sedler, som to og to har samme tal.
5) Der udtages netop to sedler med samme tal.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1968

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Find de tal x, for hvilke det gælder, at

$$\frac{x-3}{x-1} < 2 - x.$$

Find dernæst de tal x, for hvilke det gælder, at

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} < 2 - \sqrt{x}.$$

2. En behændighedsøvelse udføres af fire drenge A, B, C og D, der hver gør ét forsøg. For forsøget får de hver enten 0 eller 1 point. Det resultat, som opnås af hver enkelt dreng, er uafhængigt af de øvrige drenges resultater.

Drengene er inddelt i to hold. Hold I består af A og B, og hold II består af C og D. Øvelsen udføres som en kamp mellem de to hold, og resultatet for hvert hold fås ved addition af de enkelte deltageres points.

Sandsynligheden for at opnå et bestemt antal points er fastlagt for hver enkelt dreng ved nedenstående skemaer:

Hold I	0 point	1 point
A	0,4	0,6
B	0,5	0,5

Hold II	0 point	1 point
C	0,3	0,7
D	0,6	0,4

Find for hvert af holdene sandsynligheden for, at det opnår henholdsvis 0, 1 og 2 points.

Vi siger, at et hold har vundet kampen, hvis det får flere points end det andet hold, og at kampen ender uafgjort, hvis holdene får lige mange points.

Find sandsynligheden for, at
1) hold I vinder kampen.
2) hold II vinder kampen.
3) kampen ender uafgjort.

Kampen finder sted tre gange. Find sandsynligheden for, at netop to af de tre kampe ender uafgjort.

VEND!

3a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \qquad x \in [0;4].$$

Find nulpunkter og ekstremumspunkter for funktionen, og tegn dens grafiske billede F.

Med A og B betegnes de punkter på F, der har førstekoordinaterne (abscisserne) henholdsvis 0 og 4. Find det førstegradspolynomium $g(x)$ og det andengradspolynomium $h(x)$, hvis grafiske billeder indeholder A og B, når det om andengradspolynomiet yderligere oplyses, at $h'(1) = \frac{1}{4}$.

Bevis, at punktmængderne bestemt ved

$$\{(x,y) \mid g(x) \leqq y \leqq f(x)\} \quad \text{og} \quad \{(x,y) \mid h(x) \leqq y \leqq g(x)\}$$

har lige store arealer.

3b. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er tegnet kurven med ligningen

$$y = x^2 - 2x + 2.$$

Med P og Q betegnes to punkter på kurven, om hvilke det gælder, at førstekoordinaten (abscissen) til P er 1 mindre end førstekoordinaten til Q.

1) Bestem arealet af trekant OPQ, når P har førstekoordinaten 3.
2) Bestem koordinatsættet til P, således at O, P og Q ligger på ret linje.
3) Bestem koordinatsættet til P, således at arealet af trekant OPQ er 1.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1969

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Funktionen f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = (x - 1)e^x.$$

Det oplyses — og kræves ikke bevist — at

$$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty.$$

Gør rede for funktionens fortegnsvariation og monotoniforhold. Angiv funktionens værdimængde.

Tegn funktionens grafiske billede.

Den punktmængde, der for $t < 1$ er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid x \geqq t \ \land \ f(x) \leqq y \leqq 0\},$$

har arealet $A(t)$. Beregn dette areal.

Bestem

$$\lim_{t \to -\infty} A(t).$$

2. I rummet er valgt et koordinatsystem. En kugleflade med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunkt O har radius 3. To forskellige punkter A og B ligger på kuglefladen. Punktet A har koordinatsættet (3,0,0), og $\overrightarrow{AB}$ er parallel med $\boldsymbol{v}(-1,1,1)$.

Bestem koordinatsættet for B.

Punktet C ligger på kuglefladen samt i den halvplan, der er bestemt ved

$$z = -1 \ \land \ y \geqq 0.$$

Desuden er $|CA| = \sqrt{6}$.

Bestem koordinatsættet for C.

Beregn gradstørrelsen for hver af siderne i den sfæriske trekant ABC.

VEND!

3a. I et koordinatsystem i planen har linjen a ligningen

$$3x + 4y - 14 = 0\,,$$

linjen b ligningen

$$3x + 4y + 31 = 0$$

og linjen c ligningen

$$x + 2y + 4 = 0\,.$$

Find afstanden mellem de parallelle linjer a og b.

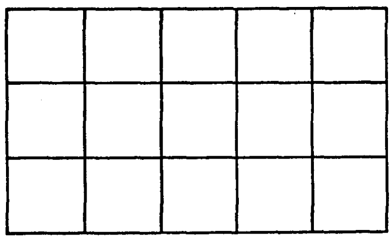
Bestem radius i en cirkel, der tangerer linjen a, og som skærer linjen b i to punkter P og Q, således at $|PQ| = 6$.

Find en ligning for cirklen, når det yderligere oplyses, at den har centrum på linjen c.

3b. Nedenstående figur viser et skema med fem lodrette og tre vandrette rækker af felter. I hvert af tre tilfældigt valgte felter anbringes et kryds.

Find sandsynligheden for, at

1) de tre kryds står i samme lodrette række.
2) de tre kryds står i samme vandrette række.
3) to og kun to af de tre kryds står i samme lodrette række.
4) to og kun to af de tre kryds står i samme vandrette række.
5) der står højst ét kryds i hver vandret række og højst ét kryds i hver lodret række.



Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1969

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

1. Løs hver af følgende to ligninger inden for de komplekse tals legeme:

$$(1) \quad 2iz^2 - (5-i)z - 17 - 7i = 0,$$

$$(2) \quad z^3 = 6{,}48i.$$

Rødderne i (1) skal angives eksakt, mens såvel realdel som imaginærdel af rødderne i (2) skal angives som decimalbrøker med to decimaler.

2. To funktioner f og g er for reelle tal x bestemt ved

$$f: \quad x \curvearrowright \cos 2x$$

og

$$g: \quad x \curvearrowright \tfrac{1}{3}\cos x - \tfrac{2}{3}.$$

Bestem mængden af reelle tal x, som tilfredsstiller uligheden

$$f(x) \leqq g(x),$$

og som tilhører intervallet $[0;\pi]$.

Find arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid \ 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi \ \wedge \ f(x) \leqq y \leqq g(x)\}.$$

Arealet ønskes angivet som decimalbrøk med tre decimaler.

3a. Om en differentiabel funktion f oplyses følgende:

$$f'(x) = |x-3| + x - 1,$$

$$f(2) = -2.$$

Bestem funktionen f og tegn dens grafiske billede.

Gør rede for, at f har en invers (omvendt) funktion g, og angiv tallene $g(-2)$ og $g(3)$ samt $g'(-2)$ og $g'(3)$.

VEND!

3b. I planen er valgt et koordinatsystem. En ret affinitet f er bestemt ved

$$(x,y) \curvearrowright \left(1 + \tfrac{5}{6}x - \tfrac{1}{6}y,\ 1 - \tfrac{1}{6}x + \tfrac{5}{6}y\right).$$

Bestem en ligning for affinitetsaksen, og find forvandlingstallet.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid y = x^2\}.$$

Find en ligning for $f(M)$.

Find koordinatsættene til skæringspunkterne mellem M og $f(M)$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ—JUNI 1969

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Find mængden af reelle tal x, der tilfredsstiller ulighedssystemet

$$x^2 - 3 \leqq 2x^2 + 5x + 3 < x^2 - 1.$$

Find endvidere mængden af reelle tal x, der tilfredsstiller ulighedssystemet

$$2 < \frac{3x^2 - 21x + 24}{x^2 - 6x + 8} \leqq 3.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = 4(\ln x)^2 - 4 \ln x.$$

Undersøg f med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold. Bevis, at grafen for f har en lodret asymptote, og tegn grafen.

Beregn arealet af den punktmængde, der er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 0\}.$$

3a. I en urne er der 10 kugler, hvoraf netop 2 er røde. Fra urnen trækkes tilfældigt 5 af kuglerne. Bestem sandsynligheden for, at der blandt de udtrukne kugler er mindst én rød.

I en anden urne er der $2p$ kugler ($p \geqq 2$), hvoraf netop 2 er røde. Fra urnen trækkes tilfældigt p af kuglerne. Bestem sandsynligheden s_p for, at der blandt de udtrukne kugler er mindst én rød.

Find grænseværdien af s_p for p gående mod uendelig.

Bevis, at s_p aftager, når p vokser.

VEND!

3b. I et koordinatsystem er for ethvert reelt tal a givet linjerne l_a, m_a og p_a med ligningerne

$$\begin{aligned} l_a:&\quad ax - y = 1 \\ m_a:&\quad x + ay = 3 \\ p_a:&\quad x - 3y = 2 - a^2. \end{aligned}$$

Vis, at $a = 2$ er det eneste rationale tal, for hvilket de tre linjer går gennem samme punkt.

Tegn linjerne l_2, m_2 og p_2.

Bestem en ligning for den linje s, der skærer linjen l_2 i punktet $A(5,9)$, linjen m_2 i et punkt B og linjen p_2 i et punkt C, således at C er midtpunktet af linjestykket AB.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1969

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. Løs ulighedssystemet

$$1 < \frac{x^2 + 2x}{|x+1| - 1} \leqq \frac{x+8}{3}.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = -2x\sqrt{2 - 4x^2}.$$

Undersøg f med henblik på definitionsmængde, fortegn og monotoniforhold. Tegn grafen.

Beregn arealet af den punktmængde M i anden kvadrant, der begrænses af grafen for f og førsteaksen.

Punktmængden M roteres om førsteaksen, hvorved der beskrives et omdrejningslegeme. Beregn rumfanget af dette omdrejningslegeme.

3a. Tegn den hyperbel H, som i et koordinatsystem i planen har ligningen

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Find en ligning for tangenten T til H i det punkt på H i fjerde kvadrant, hvis førstekoordinat er 8.

Ved en ret affinitet f, der har forvandlingstal μ og linjen med ligningen $x = 2$ som affinitetsakse, afbildes T på en linje, hvis hældningskoefficient (stigningstal) er 1.
Bestem μ og en ligning for $f(T)$.

Bestem en ligning for $f(H)$, og vis, at $f(H)$ er en hyperbel, hvis ene asymptote er parallel med T.

VEND!

3b. I rummet er givet et koordinatsystem. Bestem en ligning for en kugleflade, som har centrum i punktet med koordinatsættet $(2, 3, t)$, og som skærer xy-planen i en cirkel med radius 2.

Angiv de tal t, for hvilke det gælder:
(1) Kuglefladen har ikke punkter fælles med z-aksen.

Angiv de tal t, for hvilke det gælder:
(2) Kuglefladen har netop ét punkt fælles med den plan π, der har ligningen $x - y + 4z + 5 = 0$.

Med K betegnes den kugleflade, der opfylder begge betingelserne (1) og (2). Bestem en ligning for den tangentplan til K, som er parallel med π og ikke sammenfaldende med denne.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1969

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Løs inden for de komplekse tals legeme ligningen

$$(1 - i\sqrt{3})z^4 - 2i\sqrt{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{z^4}.$$

Angiv summen af ligningens rødder, og angiv produktet af ligningens rødder.

2. Om en funktion f gælder, at

$$f(x) = \sqrt{x}\,(3 - \ln x).$$

Bestem maksimum for $f(x)$, når x gennemløber

a) alle positive reelle tal.
b) alle positive hele tal.

Ethvert af disse maksima ønskes angivet eksakt samt som decimalbrøk med tre decimaler.

3a. I et koordinatsystem i rummet er givet fire punkter

$$A(2,3,1)\ ,\ B(-1,5,5)\ ,\ C(-2,6,6)\ \text{ og }\ D(5,6,10).$$

Et prisme har grundfladen ABC, og en af dets sidekanter er linjestykket AD.

Beregn med to decimaler gradtallet af den spidse vinkel u mellem sidekanten og den plan α, som grundfladen tilhører.

Bestem prismets rumfang.

En pyramide med grundfladen ABC har samme rumfang som prismet. Pyramidens toppunkt T og punktet D har samme projektion på α, men ligger på hver sin side af denne plan.

Bestem koordinatsættet for T.

VEND!

3b. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt P bevæger sig således, at

$$\overrightarrow{OP} \text{ har koordinatsættet } (t^3 + t^2 - 2t,\ t^2 - 4),$$

hvor t betegner tiden, og $-\infty < t < \infty$.

Bestem koordinatsættene for banekurvens skæringspunkter med koordinatakserne og for hastighedsvektorerne i disse punkter.

Bevis, at der findes et punkt D, som P passerer to gange. Bestem de til dette punkt D svarende værdier af t, og find punktets koordinatsæt.

Tegn banekurven.

Bevis, at hastighedsvektorerne i punktet D står vinkelret på hinanden.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1969

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. I et koordinatsystem i planen er for ethvert reelt tal a linjerne l_a og m_a givet ved ligningerne

$$l_a: \quad (a+1)x - y = 2$$

$$m_a: \quad 3x + (1-a)y = a.$$

Angiv mængden af de tal a, for hvilke $l_a \cap m_a$ består af ét punkt, hvis koordinatsæt tilfredsstiller uligheden

$$(x-1)^2 + y^2 < 4.$$

2. Løs uligheden

$$f(x) \leqq g(x),$$

hvor f og g betegner to funktioner, der for reelle tal x er bestemt ved

$$f: \ x \curvearrowright \frac{|1-x^2|}{1+x}$$

og

$$g: \ x \curvearrowright \tfrac{1}{2}(1-x^2).$$

Illustrer resultatet på en tegning, der viser graferne for f og g i samme koordinatsystem.

3a. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f: \ x \curvearrowright \frac{2+x}{\sqrt{x}}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på definitionsmængde, fortegn, monotoniforhold, ekstrema og asymptoter. Tegn grafen.

En punktmængde M begrænses af grafen for f, kurven med ligningen $y = \sqrt{x}$, linjen med ligningen $x = a$ og linjen med ligningen $x = a + 1$, hvor a er et vilkårligt positivt tal.

Find arealet af M.

Find det tal a, for hvilket arealet af M er 2.

VEND!

3b. Ved udførelsen af et bestemt eksperiment er sandsynligheden for udfaldet A lig med s, hvor $0 < s < 1$. Eksperimentet udføres 15 gange, og sandsynligheden for herved at få udfaldet A netop m gange betegnes $P(m)$.

Angiv en formel for $P(m)$.

Beregn s, når det er givet, at $P(3) = 2\,P(4)$.

Bestem for den fundne værdi af s det tal q, for hvilket det gælder, at $P(q) = 18\,P(q+1)$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1970

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

1. I en orienteret plan er givet to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, for hvilke det gælder, at

$$|\boldsymbol{a}| = 1 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b} = 2\hat{\boldsymbol{a}}.$$

I det følgende betegner R mængden af reelle tal og N mængden af hele positive tal.

Bestem mængden M_1 af tal $t \in R$, for hvilke det gælder, at

$$|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 6.$$

Bestem mængden M_2 af talsæt $(s, t) \in R \times R$, hvor $(s, t) \neq (0,0)$, for hvilke det gælder, at

$$s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

Bestem mængden M_3 af talsæt $(s, t) \in R \times R$, for hvilke det gælder, at

$$(s + 1)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} + (t + 1)\boldsymbol{b}.$$

Bestem mængden M_4, hvor

$$M_4 = M_2 \cap M_3.$$

Bestem mængden M_5 af talsæt $(s, t) \in N \times N$, for hvilke det gælder, at

$$(s, t) \in M_2 \quad \wedge \quad 0 < |\, s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \,| < 10.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{|\, x^2 - x - 6 \,|}{x}.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn grafen.

Linjen l har ligningen

$$y = \tfrac{1}{2}x + 1.$$

Bestem koordinatsættene til de punkter, der er fælles for l og grafen for f.

Beregn arealet af den punktmængde i første kvadrant, der er bestemt ved

$$\left\{ (x,y) \;\middle|\; f(x) \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}x + 1 \right\}.$$

VEND!

3a. I planen er valgt et koordinatsystem. Desuden er der givet følgende afbildninger af planen på sig selv:

f er den rette affinitet med forvandlingstallet $\frac{1}{2}$ og linjen med ligningen $x - 4 = 0$ som affinitetsakse,

g er spejlingen i linjen med ligningen $x - y = 0$,

h er parallelforskydningen bestemt ved vektoren $\mathbf{a}(-3, -1)$.

Bestem koordinatsættet til punktet P, således at $h(g(P)) = f(P)$.
Bestem en ligning for punktmængden $h(g(f(L)))$, hvor L er linjen med ligningen

$$x - y - 2 = 0.$$

Bestem en ligning for den punktmængde M, for hvilken det gælder, at $h(g(f(M))) = C$, hvor C er punktmængden med ligningen

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0.$$

3b. På en virksomhed med 100 medarbejdere skal 2 udtages til en særlig opgave. Udtagelsen foregår ved lodtrækning, hvor alle har samme chance for at blive valgt.

Netop 3 af de 100 medarbejdere er værkførere.

1) Find sandsynligheden for, at ingen værkfører udtages.

2) Find sandsynligheden for, at mindst én værkfører udtages.

Netop n af de 100 medarbejdere er kvinder.

3) Bestem, udtrykt ved n, sandsynligheden for, at mindst én af kvinderne udtages.

4) Bestem det mindste antal n, for hvilket denne sandsynlighed er større end $\frac{1}{2}$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1970

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Løs inden for mængden af komplekse tal ligningen

$$\frac{x^3 + 2x^2 - (3 + 2i)x + 4i}{2x^2 - (3 + 2i)x + 3i} = 1.$$

Løs inden for mængden af komplekse tal ligningen

$$\frac{x^3 + (6 - i)x^2 - 2ix - 8 + 4i}{2x^2 - (3 + 2i)x + 3i} = 1,$$

idet det oplyses, at denne ligning har en reel løsning.

2. I et koordinatsystem i rummet er en linje l bestemt ved parameterfremstillingen

$$(x,y,z) = (-\tfrac{11}{2} + 4t\,,\ \tfrac{7}{2}\,,\ -7 + 3t).$$

Den retvinklede projektion på linjen l af punktet $A(4,1,-3)$ kaldes S. Bestem koordinatsættet til S.

Bestem koordinatsættet til punktet C, således at S er midtpunktet af linjestykket AC.

Linjestykket AC er diagonal i et kvadrat $ABCD$, der ligger i en normalplan π til l. Bestem koordinatsættene til punkterne B og D.

Bestem koordinatsættet til den retvinklede projektion på π af punktet $T(-8,1,-12)$.

Beregn toplansvinklerne langs kanterne i grundfladen $ABCD$ i pyramiden $T-ABCD$.

VEND!

3a. Lad f være en i et interval $[a;b]$ defineret og differentiabel funktion, og lad den afledede funktion f' være kontinuert i det samme interval. Længden s af grafen for f er da bestemt ved formlen

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx .$$

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = \ln \sin x\,, \qquad x \in [\tfrac{1}{3}\pi\,;\tfrac{1}{2}\pi]\,.$$

Beregn længden af grafen for g.

For ethvert reelt tal a større end $\frac{4}{3}$ er en funktion h bestemt ved

$$h(x) = x^{\frac{3}{2}}, \qquad x \in [\tfrac{4}{3};a]\,.$$

Beregn tallet a, således at længden af grafen for h er $\dfrac{61}{27}$.

3b. I et koordinatsystem i planen er givet cirklen C_1 med ligningen

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 31 = 0.$$

Ved en multiplikation med 2 ud fra et punkt Q på førsteaksen efterfulgt af en drejning om Q afbildes C_1 på en cirkel C_2, der har centrum i punktet $P(9,0)$.

Bestem en ligning for C_2.

Bestem koordinatsættene til de punkter Q, der har den angivne egenskab.

Bestem for ethvert sådant punkt Q gradstørrelsen af drejningsvinklen.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

70-8-3

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1970

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Bestem de reelle tal x, der tilfredsstiller uligheden

$$\frac{x^2 - 7x + 21}{x} \leqq 3.$$

Bestem de reelle tal x, der tilfredsstiller uligheden

$$\frac{1 + \log x}{\log x} \leqq 3.$$

Bestem de reelle tal x, der tilfredsstiller mindst én af de nævnte uligheder.

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x - \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Undersøg f med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Bevis, at grafen for f har tre asymptoter. Tegn grafen.

Bestem arealet af den punktmængde i første kvadrant, der begrænses af grafen og linjen med ligningen $5x - 3y = 0$.

VEND!

3a. Tre krukker I, II og III indeholder henholdsvis 4, 5 og 4 kugler

I indeholder 2 røde og 2 blå kugler,
II indeholder 1 rød og 4 blå kugler,
III indeholder 4 røde kugler.

1) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt en kugle.
Find sandsynligheden for, at kuglen er rød.

2) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt to kugler.
Find sandsynligheden for, at begge kugler er røde.

3) Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt to kugler, som viser sig at være røde.
Find sandsynligheden for, at kuglerne blev taget fra krukke III.

4) Fem gange udføres følgende:
Fra en tilfældigt valgt krukke tages tilfældigt en kugle. Kuglens farve noteres.
Kuglen lægges tilbage i den krukke, hvorfra den blev taget.
Find sandsynligheden for, at der skiftevis tages en kugle af den ene farve og en kugle af den anden farve.

3b. I planen er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. For ethvert reelt tal a, hvor $a \neq 0$, fremstiller ligningen

$$y = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a - 1$$

en parabel P_a. Tegn i det valgte koordinatsystem parablerne P_1, P_3 og P_{-2}.

Angiv, udtrykt ved a, koordinatsættet til toppunktet T_a for parablen P_a, og tegn i det valgte koordinatsystem mængden af toppunkter.

Find en ligning for den parabel P_a, hvis toppunkt har mindst afstand fra O.

Bestem mængden af de tal a, for hvilke det gælder, at afstanden fra punktet $E(0,1)$ til T_a er mindre end $\sqrt{10}$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1970
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

1. I de komplekse tals legeme betragtes polynomierne

$$P(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + 16x + 16 - 16i$$

og

$$Q(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + (7 - 24i)x - 17 - 31i.$$

Løs ligningen

$$P(x) - Q(x) = 0.$$

Løs dernæst enhver af ligningerne

$$P(x) = 0$$

og

$$Q(x) = 0,$$

idet det oplyses, at $P(x)$ og $Q(x)$ har en fælles rod.

2. I et koordinatsystem i planen er givet en cirkel C_1 med ligningen

$$x^2 + y^2 + 10x - 14y + 56 = 0.$$

Bevis, at linjen med ligningen

$$x - y + 6 = 0$$

er tangent til C_1.

Ved en multiplikation med t, hvor $t > 0$, ud fra koordinatsystemets begyndelsespunkt afbildes C_1 på C_t. Angiv en ligning for C_t.

Bestem de tal t, for hvilke linjen med ligningen

$$x - y + 9 = 0$$

1) har netop ét punkt fælles med C_t.

2) har to punkter fælles med C_t.

3) ingen punkter har fælles med C_t.

VEND!

3a. To funktioner f og g er for $x \in [0;2\pi]$ bestemt ved

$$f(x) = 2\sin x$$

og

$$g(x) = \cos(x - \tfrac{1}{6}\pi).$$

Vis, at løsningsmængden til ligningen $f(x) = g(x)$ er $\{\tfrac{1}{6}\pi, \tfrac{7}{6}\pi\}$.

Tegn de to funktioners grafer i samme koordinatsystem.

Bestem maksimum for længderne af de linjestykker, der er parallelle med andenaksen, og hvis endepunkter har koordinatsættene $(x, f(x))$ og $(x, g(x))$, hvor $\tfrac{1}{6}\pi \leqq x \leqq \tfrac{7}{6}\pi$.

Det længste linjestykke betegnes L.

Punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid g(x) \leqq y \leqq f(x)\}$$

deles af L i to punktmængder.

Beregn arealet af enhver af disse punktmængder.

3b. To punkter P_t og Q_t bevæger sig i en plan, hvori der er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O, således at det til tiden t, hvor $t \geqq 0$, gælder, at

$\overrightarrow{OP_t}$ har koordinatsættet $(1 + 2t\ ,\ 1 + t)$,

$\overrightarrow{OQ_t}$ har koordinatsættet $(1 + t\ ,\ 3 + t)$.

Til tiden $t = 0$ befinder P_t og Q_t sig i henholdsvis P_0 og Q_0.

1) Bestem t, således at arealet af firkant $P_0Q_0Q_tP_t$ er 20.

2) Bestem t, således at linjen P_tQ_t går gennem punktet $A(1,8\tfrac{1}{2})$.

3) Vis, at firkant $P_0Q_0Q_tP_t$ har en omskreven cirkel, når linjen P_tQ_t går gennem punktet $B(4,10)$. Find en ligning for denne cirkel.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1970

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

1. I et givet koordinatsystem i planen er punktmængden M bestemt ved

$$\left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{x+y}{x-y} > 3 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Tegn M.

Løs derefter uligheden

$$\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} > 3$$

i intervallet $[0\,;\,2\pi]$.

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} + |x - 1|.$$

Undersøg funktionen med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, monotoniforhold og lokale ekstrema.

Bevis, at det grafiske billede af funktionen har tre asymptoter.

Tegn funktionens grafiske billede.

Løs ligningen

$$f(x) = \frac{5}{2}.$$

VEND!

3a. I en tresidet pyramide $T-ABC$ er $|AB| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{3}$ og $|BC| = 8$. Punktet H er såvel projektionen af A på linjen BC som projektionen af T på grundfladen ABC. Endvidere er $|TH| = 6$.

Beregn toplansvinklerne langs kanterne AB, BC, AC og AT.

Beregn afstanden mellem linjerne AT og BC samt radius i pyramidens omskrevne kugle.

3b. Løs hvert af følgende ulighedssystemer:

$$\frac{4}{3} < \int_0^x (t^2 + 1)dt < x + 3 \, ,$$

$$\frac{4}{3} < \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}dt < x + 3 \, .$$

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1970

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Tegn det grafiske billede F af funktionen f bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 7|x| - 10.$$

En funktion g med det grafiske billede G er bestemt ved

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x - 1.$$

Beregn koordinatsættene til punkterne i $F \cap G$.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid g(x) \leqq y \leqq f(x)\}.$$

2. Find mængden af tal $x \in [0;2\pi]$, for hvilke

$$\cos x \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Find mængden af tal $x \in [0;2\pi]$, for hvilke

$$\cos 2x \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Find mængden af tal $x \in [0;2\pi]$, for hvilke

$$\cos^2 x \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Find mængden af tal $x \in [0;2\pi]$, for hvilke

$$\cos 2x + \cos^2 x \geqq -\frac{1 + \cos x}{2}.$$

VEND!

3a. I mængden af reelle tal er funktionen f givet ved

$$f(x) = 4^x - 3 \cdot 2^x + \tfrac{5}{4}.$$

Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, fortegn og monotoniforhold. Vis, at grafen for f har en asymptote. Tegn grafen.

Beregn arealet af den punktmængde, der er bestemt ved

$$\{ (x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq -\tfrac{3}{4} \}.$$

3b. På en restaurant kan man for en fast pris frit sammensætte en middag bestående af forret og hovedret, idet der er 5 muligheder for valg af forret og 8 muligheder for valg af hovedret.

En bedømmelseskomité giver en vurdering af madens kvalitet, idet den giver hver ret en karakter valgt blandt tallene 1, 2 og 3.

Forretterne får karaktererne 1, 2, 2, 3, 3.
Hovedretterne får karaktererne 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

Derefter spiller man et spil, der består i på tilfældig måde at sammensætte en middag og notere talsættet (x,y), hvor

x betyder karakteren for den valgte forret, og
y betyder karakteren for den valgte hovedret.

Hvilke udfald har dette spil, og hvor stor er sandsynligheden for hvert af disse udfald?

Konstruer et stolpediagram, der viser sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variable $x + 2y$, og beregn dens middelværdi og spredning.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1971

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. a) Løs inden for mængden af reelle tal uligheden

$$\big|\,|x| - 3\,\big| < 2.$$

b) Bestem de reelle tal a, for hvilke uligheden

$$x^2 - (a + 2)x + (a + 2) > 0$$

gælder for alle reelle tal x.

c) Bestem det reelle tal t, således at det komplekse tal

$$\frac{t}{2 - i} + \frac{1}{1 + i}$$

har imaginærdelen 0.

d) En funktion f er for positive reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = 2x - \ln(2x).$$

Bestem mindsteværdien for f.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin 2x + 2\cos x\ , \quad x \in [0;2\pi].$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold. Tegn grafen for f.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{\,(x,y)\mid f(x) \leqq y \leqq 0\,\}.$$

Tegn i et andet koordinatsystem grafen for funktionen g, der er bestemt ved

$$g(x) = |f(x)|\ , \quad x \in [0;2\pi].$$

Angiv koordinatsættene til de punkter på grafen for g, i hvilke denne har en vandret tangent.

VEND!

3a. I mængden M af ikke-negative reelle tal er kompositionen $*$ bestemt ved

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab}.$$

Bevis, at kompositionen er kommutativ og associativ.
Bevis, at der findes et neutralt element i $(M, *)$.
Bevis, at kun tallet 0 har et inverst element i $(M, *)$.

Løs inden for M hver af ligningerne

1) $x * 3 = 2.$

2) $x * x = x.$

3) $x * 1 = 1.$

4) $x * 2 = 3.$

3b. Med a betegnes et tal i intervallet $]0;1[$. I et koordinatsystem i rummet er givet fire punkter

$$A(a, 0, 0) \quad , \quad B(0, a^2, 0) \quad , \quad C(a, 0, a^2) \quad \text{og} \quad D(-a, 2a, 3a).$$

Gør rede for, at de fire punkter ikke ligger i samme plan, og find rumfanget $V(a)$ af tetraederet $ABCD$.

Bevis, at funktionen V bestemt ved

$$a \curvearrowright V(a) \quad , \quad a \in \,]0;1[$$

har en størsteværdi, og angiv det tal, for hvilket størsteværdien antages.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1971

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. Inden for de komplekse tals legeme har ligningssystemet

$$\begin{aligned} z^3 - iu &= a \\ 2z + iu &= b \end{aligned}$$

løsningen $(z,u) = (1 + i,\ 2i)$.

Bestem tallene a og b.

Bestem for de fundne tal a og b de øvrige løsninger til ligningssystemet.

2. Af et sædvanligt spil kort (52 blade) trækkes på tilfældig måde tre kort.

Beregn sandsynligheden for, at

1) de tre kort alle er røde (er hjerter eller ruder).

2) ikke alle tre kort er røde.

3) mindst ét af de tre kort er rødt.

4) de tre kort er to konger og et rødt es.

5) de tre kort er enten tre esser eller to esser og en konge.

De fundne sandsynligheder ønskes angivet som uforkortelige brøker.

VEND!

3a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = xe^{-2x} \quad , \quad x \in R,$$

hvor R betegner mængden af reelle tal.

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{ (x,y) \mid \ 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2} \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x) \}.$$

For ethvert positivt reelt tal a er en funktion g_a bestemt ved

$$g_a(x) = xe^{-ax} \quad , \quad x \in R.$$

Vis, at g_a har en størsteværdi, og bestem denne.

3b. I et koordinatsystem i planen har en ellipse E ligningen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

og en hyperbel H ligningen

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Vis, at E og H har fælles brændpunkter F_1 og F_2.

Skæringspunktet i første kvadrant mellem E og H kaldes S.

Find længden af brændstrålerne F_1S og F_2S samt vinklen mellem brændstrålerne.

Den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og med positivt forvandlingstal, der afbilder E på en cirkel, betegnes f.

Bestem en ligning for $f(H)$.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1971

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Løs enhver af nedenstående ligninger med hensyn til x:

1) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0.$

2) $4\sin^4 x - 17\sin^2 x + 4 = 0.$

3) $4e^{4x} - 17e^{2x} + 4 = 0.$

2. En fabrik producerer elektriske sikringer, af hvilke 6 % er behæftet med fejl. Af produktionen udtages på tilfældig måde en stikprøve på 10 sikringer.

Beregn med to decimaler sandsynligheden for, at de 10 sikringer er fejlfri.

Beregn med to decimaler sandsynligheden for, at højst én af de 10 sikringer er defekt.

Bestem det mindste antal sikringer, der skal være i en stikprøve, når sandsynligheden for, at alle stikprøvens sikringer er fejlfri, skal være mindre end $\frac{1}{2}$.

Lad x betegne den stokastiske variable, der angiver antallet af defekte sikringer i en stikprøve på 20 sikringer.

Beregn middelværdi og spredning af x.

VEND!

3a. For ethvert reelt tal x er funktionerne f og g bestemt ved

$$f(x) = k|x - 3| - 3k$$

og

$$g(x) = 2k + 1,$$

hvor k er et positivt tal.

Tegn for $k = 2$ graferne for f og g i samme koordinatsystem.

Grafen for f, grafen for g og førsteaksen bestemmer et trapez T_k.

Beregn tallet k, således at arealet af T_k er mindst muligt.

3b. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(2x + 1) - 2(2x + 1).$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og ekstrema. Tegn grafen for f.

Løs uligheden

$$f(x) > \tfrac{3}{2}x + 3.$$

Grafen for f og linjen med ligningen $y = \frac{3}{2}x + 3$ begrænser to punktmængder, der begge har et areal. Beregn arealet af den af de to punktmængder, der kun indeholder punkter i anden kvadrant.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1971

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

---

1. I planen er givet en vektor $\boldsymbol{v}$ og en trekant ABC, således at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v} \text{ og } \overrightarrow{BC} = 2\hat{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}.$$

Beregn vinklerne i trekant ABC.

Centrum i den omskrevne cirkel for trekant ABC betegnes O. Find $\overrightarrow{AO}$ udtrykt ved $\boldsymbol{v}$ og $\hat{\boldsymbol{v}}$.

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 6}.$$

Undersøg funktionen og dens graf F med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn F.

Vis, at de punkter på F, der er røringspunkter for tangenter parallelle med førsteaksen, ligger på en ret linje. Denne linje betegnes l.

Beregn arealet af den begrænsede punktmængde i første kvadrant, der bestemmes af linjen l, grafen F og linjen med ligningen $x = 2$.

VEND!

3a. Bestem løsningsmængden A til uligheden

$$(9 - x)\,|\,x + 1\,| > 24.$$

Bestem løsningsmængden B til uligheden

$$5\sqrt{|x - 4|} \geqq x + 2.$$

Bestem mængden

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

3b. I et koordinatsystem i rummet er givet tre punkter

$$A(1, 2, -3) \quad , \quad B(4, 5, 2) \quad \text{og} \quad C(1, 0, -3).$$

Angiv en ligning for den plan, som indeholder de tre punkter.

Beregn arealet af trekant ABC.

Punktet $O(0,0,0)$ er toppunkt i den tresidede pyramide O—ABC.

Vis, at pyramidens rumfang er $4\frac{2}{3}$.

Et punkt P ligger på linjen med parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = (-2 + t,\ -3 + t,\ 20 - 3t).$$

Bestem de tal t, for hvilke P—ABC er en tresidet pyramide, hvis rumfang er mindre end eller lig med rumfanget af pyramiden O—ABC.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1971

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

---

1. I en trekant er de tre siders længder a, b og c givet ved ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2a - 3b + c &= 8 \\ a - 4b + 5c &= 15 \\ 4a - 2b - 2c &= 24. \end{aligned}$$

Beregn a, b og c samt trekantens største vinkel.

Højden på den længste side deler trekanten i to trekanter. Find forholdet mellem arealet af den største og arealet af den mindste af disse to trekanter.

2. Tegn i et forelagt koordinatsystem parablerne P_1 og P_2, hvis ligninger er henholdsvis

$$y^2 = -x$$

og

$$y^2 = 2x + 12.$$

To punkter A og B gennemløber henholdsvis P_1 og P_2, således at linjen gennem A og B er parallel med førsteaksen. Midtpunktet af linjestykket AB gennemløber herved en kurve K.

Bestem en ligning for K.

Parablerne P_1 og P_2 afgrænser en lukket, begrænset punktmængde M. Find arealet af M samt arealet af hver af de dele, hvori M deles af K.

VEND!

3a. En krukke I indeholder 1 rød og n blå kugler, og en krukke II indeholder n røde og 1 blå kugle. På tilfældig måde trækkes 2 kugler fra krukke I og 1 kugle fra krukke II.

Med R_0, R_1 og R_2 betegnes følgende hændelser:

R_0: der trækkes ingen røde kugler.

R_1: der trækkes netop én rød kugle.

R_2: der trækkes netop to røde kugler.

Med $p(R_0)$, $p(R_1)$ og $p(R_2)$ betegnes sandsynlighederne for disse hændelser.

1) Find for $n = 4$ sandsynlighederne $p(R_0)$, $p(R_1)$ og $p(R_2)$.

2) Bestem n, således at $p(R_0) = \frac{3}{32}$.

3) Bestem n, således at $6p(R_2) = 8p(R_0) + p(R_1)$.

3b. To afbildninger f og g af den komplekse talplan på sig selv er bestemt ved

$$f(z) = (1 + i)z$$

og

$$g(z) = z - 1 - 2i.$$

Bestem tallene $f(1 + i)$ og $g(1 + i)$.

Bestem den af f og g sammensatte afbildning $g \circ f$ og angiv eventuelle fikspunkter for denne afbildning.

Løs hver af ligningerne

(1) $$f(1 + i) - g(f(z)) = (g(z))^2$$

(2) $$(f(z))^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, g(1 + i).$$

Realdelen og imaginærdelen af rødderne i (2) angives som decimalbrøker med 3 decimaler.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1971

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

---

1. Løs uligheden

$$\sqrt{2x-3} < \frac{\sqrt{3x+1} - |x-2|}{\sqrt{2x-3}}.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = 2(x-4)\sqrt{x-1}.$$

Undersøg funktionen f med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold. Bevis, at funktionens graf har en lodret tangent (halvtangent), og tegn grafen.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 0\}.$$

3a. Mængden af reelle tal betegnes R.

For vilkårlige elementer i $R \times R$ defineres $\sim$ ved

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 + 4y_1 = 3x_2 + 4y_2.$$

Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation.

Bestem mængden af elementer i $R \times R$, som er ækvivalente med talparret $(1,-2)$.

For vilkårlige elementer i $R \times R$ defineres endvidere en ækvivalensrelation $\approx$ ved

$$(x_1,y_1) \approx (x_2,y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Angiv elementerne i

$$\{ (x,y) \in R \times R \mid (x,y) \sim (4,3) \ \wedge \ (x,y) \approx (4,3) \}.$$

VEND!

3b. På seks sedler er skrevet henholdsvis

1, 1, 2, 3, 4 og 5.

Tre vilkårlige af sedlerne lægges ved siden af hinanden, og cifrene læses som et trecifret tal.

Gør rede for, at der på denne måde kan fremkomme 72 forskellige trecifrede tal.

Bestem antallet af forskellige trecifrede lige tal, der kan fremkomme på denne måde.

Sedlerne lægges i en pose. En tilfældig seddel tages op, og tallet på sedlen noteres. Sedlen lægges tilbage i posen. Endnu en gang tages en tilfældig seddel op, og tallet på denne seddel noteres bag ved det først noterede tal, så der dannes et tocifret tal.

Find sandsynligheden for, at dette tocifrede tal

a) er skrevet med to ens cifre.

b) er et lige tal.

c) har tværsummen 5.

Af opgaverne 3a og 3b må kun én afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1972
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—4	ca. 10 points
hver af opgaverne 5—6	ca. 15 points
opgave 7	ca. 30 points

1. I et koordinatsystem har linjen l ligningen

$$x - 2y - 3 = 0.$$

Bestem en ligning for billedet af l ved multiplikationen ud fra $A(-1{,}0)$ med $\frac{3}{2}$.

2. Fra en skoles fire afgangsklasser med henholdsvis 14, 18, 20 og 21 elever skal udtages fire elever, én fra hver klasse.
Bestem antallet af muligheder for at udtage disse.

Næste år er der kun tre afgangsklasser med henholdsvis 16, 20 og 22 elever. Fra disse tre klasser udtages ligeledes fire elever, mindst én fra hver klasse.
Bestem antallet af muligheder for at udtage disse.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin x + |\sin x| + 2 \quad , \quad x \in [0; 2\pi].$$

Tegn grafen for f, og bevis, at f ikke er differentiabel i tallet π.

4. Løs ligningen

$$\int_{-2}^{x} (t^2 - 2)dt = 0.$$

VEND!

5. For ethvert positivt tal a er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{a}{x} \quad , \quad x > 0.$$

Gør rede for, at funktionen har en mindsteværdi.

Bestem a, således at funktionens mindsteværdi er 3.

6. To komplekse tal p og q, hvor p har større modulus end q, er rødder i ligningen

$$x^2 - (5 + 3i)x + 10 + 5i = 0.$$

Bestem argumentet for tallet

$$\frac{p + q}{p - q}.$$

7a. For ethvert reelt tal a er en funktion f_a bestemt ved

$$f_a(x) = \ln(x^2 + 2x + a),$$

hvor x betegner et reelt tal.

Undersøg funktionen f_{-3} og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold samt asymptoter.
Tegn grafen for f_{-3}.

Angiv for ethvert tal a definitionsmængden for f_a.
Angiv for ethvert tal a antallet af asymptoter til grafen for f_a.

7b. I planen er valgt et koordinatsystem. En ret affinitet f er bestemt ved, at den afbilder ellipsen E med ligningen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

på cirklen med ligningen

$$x^2 + y^2 = 9.$$

En anden ret affinitet g er bestemt ved, at den afbilder E på cirklen med ligningen

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Bestem billedet F af E ved den af f og g sammensatte afbildning $g \circ f$.

Mængden $E \cap F$ indeholder et punkt P i første kvadrant.
Beregn koordinatsættet for P.
Beregn en af vinklerne mellem tangenten til E i P og tangenten til F i P.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1972
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—2	ca. 15 points
hver af opgaverne 3—4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 30 points

---

1. Løs inden for mængden af reelle tal uligheden

$$\frac{6}{|x-1|} + |x-1| \geqq 5.$$

Afbild løsningsmængden på en tallinje.

2. Funktionen f er to gange differentiabel, og den anden afledede funktion f'' er for reelle tal x bestemt ved

$$f''(x) = 4 - 9\cos 3x + 9e^{3x}.$$

Endvidere er det givet, at

$$f(0) = 3 \quad \text{og} \quad f'(0) = 9.$$

Bestem funktionen f.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x\sqrt{4x - x^3}\ , \quad x \in [0;2].$$

Bevis, at grafen for f har vandret tangent (halvtangent) i det ene endepunkt og har lodret tangent (halvtangent) i det andet endepunkt.

VEND!

4. I planen er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x,y)$ bevæger sig i planen, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= \cos 2t + \tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Gør rede for, at banekurven er en del af parablen med ligningen

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2},$$

og tegn banekurven.

Bestem de tidspunkter t, for hvilke $\overrightarrow{OP}$ og accelerationsvektoren er parallelle.

5a. Der foreligger to sædvanlige spil kort. På tilfældig måde tages på én gang fire kort, to fra hvert spil.

Find sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

A: Blandt de fire kort er der to spar konger.
B: Alle fire kort er sparer.
C: Blandt de fire kort er der mindst ét billedkort. (Et billedkort er enten en knægt, en dame eller en konge.)
D: De fire kort er en spar, en hjerter, en ruder og en klør.

De fundne sandsynligheder ønskes angivet som uforkortelige brøker.

5b. Idet a, b og x_0 er reelle tal, er funktionen f bestemt ved

$$f(x) = ae^{-b(x-x_0)} \quad , \quad x \in \mathsf{R},$$

hvor R betegner mængden af reelle tal.

Om f er givet, at

$$f(x_0) = 3 \quad \text{og} \quad f(x_0 + 2) = 1.$$

1) Bestem $f'(x_0 + 2)$.

2) Bestem x, således at $f(x + x_0) = \sqrt{3}$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1972

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—2	ca. 10 points
hver af opgaverne 3—5	ca. 15 points
opgave 6	ca. 35 points

---

1. I planen er valgt et koordinatsystem. For ethvert reelt tal t er

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - 2tx + (2t - 1)$$

ligning for en parabel P_t.

Tegn parablen P_0 og parablen P_1.

Bevis, at samtlige parabler P_t går gennem samme punkt.

2. Bestem tallet x, således at

$$\int_4^x \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} + 1\right) du = 6.$$

3. Løs uligheden

$$\log \frac{14 - x}{x - 3} \leqq 1.$$

VEND!

4. Beregn den største og den mindste funktionsværdi for den funktion f, der er bestemt ved

$$f(x) = \ln x + 2\sqrt{2-x} \quad , \quad x \in [\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}].$$

5. I planen er givet et koordinatsystem. Et rektangel har en vinkelspids i punktet med koordinatsættet $(2,2)$, en vinkelspids i punktet med koordinatsættet $(1,6)$ og en diagonal på linjen med ligningen

$$13x + 16y - 109 = 0.$$

Bestem koordinatsættene til de to andre vinkelspidser.

6a. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{5-x}.$$

Undersøg f og dens graf F med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold. Specielt ønskes bevist, at grafen F har en lodret tangent (halvtangent).

Tegn grafen.

Grafen F og førsteaksen afgrænser en punktmængde i første kvadrant. Punktmængden roteres om førsteaksen. Beregn rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

6b. I en klasse med 28 elever er aldersfordelingen af eleverne således:

1 elev er 15 år,
10 elever er 16 år,
12 elever er 17 år,
5 elever er 18 år.

På tilfældig måde udtages to elever fra klassen.

Idet den stokastiske variable X angiver summen af de to valgte elevers alder, skal man

1) beregne sandsynligheden for, at X antager værdien k, hvor $k \in \{ 31, 32, 33, 34, 35, 36 \}$.
2) tegne et stolpediagram, der viser sandsynlighedsfordelingen for X.
3) bevise, at middelværdien for X er $33\frac{1}{2}$.
4) beregne spredningen for X.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1972

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2—4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 30 points

---

1. I planen er valgt et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Ved multiplikation ud fra O med et positivt tal k afbildes cirklen C med ligningen

$$x^2 + y^2 = 25$$

på en cirkel C_1, der har linjen med ligningen

$$4x - 5y + 25 = 0$$

som tangent.

Bestem k og en ligning for C_1.

2. Parablen P er graf for funktionen f bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 5.$$

Bestem en ligning for tangenten t til P i punktet $A(1, -\tfrac{3}{2})$.

Det punkt på t, der har førstekoordinaten 3, kaldes B. Bestem en ligning for den anden tangent til P gennem B.

3. Idet a og b betegner reelle tal, er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} \quad , \quad x \in \mathsf{R},$$

hvor R betegner mængden af reelle tal.

Bestem a og b, således at $f(-2) = -\tfrac{1}{3}$, og f har lokalt minimum i tallet -2.

VEND!

4. Bestem de reelle tal x, for hvilke det gælder, at

$$\int_{\ln 2}^{x} (e^{2t} - 2e^{t} - e^{-t})dt = 0.$$

5a. I planen er valgt et koordinatsystem. En punktmængde M har ligningen

$$(a^2 + a)x^2 + (a + 1)y^2 = 1,$$

hvor a betegner et reelt tal.

Bestem de tal a, for hvilke M er

1) en cirkel.
2) en ellipse.
3) en hyperbel.
4) hverken en cirkel, en ellipse eller en hyperbel. Beskriv for ethvert sådant a punktmængden M.

Bestem de tal a, for hvilke M indeholder punktet $A(5,7)$. Bestem for det mindste af de således fundne tal en ligning for punktmængdens tangent i A.

5b. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En vektor $\boldsymbol{v}$ har koordinatsættet $(-1,-3)$.

Punkterne A, B og C er bestemt ved

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{v}, \quad \overrightarrow{OB} = -2\hat{\boldsymbol{v}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OC} = -\boldsymbol{v} + t\hat{\boldsymbol{v}},$$

hvor t tilhører mængden af reelle tal.

Bestem koordinatsættene til punkterne A, B og C.
Bestem tallet t, så punkterne A, B og C tilhører samme linje.
Bestem de tal t, for hvilke arealet af trekant ABC er 10.
Bestem de tal t, for hvilke punkterne A, B og C er vinkelspidser i en ligebenet trekant.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1972

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 2—4 .... ca. 20 points
opgave 5 .... ca. 30 points

---

1. Andengradsligningen

$$z^2 + az + b = 0$$

har inden for mængden af komplekse tal rødderne z_1 og z_1^{-1}, hvor $z_1 = 1 + 2i$.

Bestem a og b.

2. Bestem de reelle tal x, for hvilke det gælder, at

$$\frac{3 - 3x^2}{4 + x} > x.$$

Bestem de reelle tal x, for hvilke det gælder, at

$$\frac{3\cos^2 x}{4 + \sin x} > \sin x \quad \wedge \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

3. Løs for ethvert reelt tal a ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a+1)x - y &= -1 \\ x + (a-1)y &= 1 \end{aligned}$$

med hensyn til (x,y).

Løs for ethvert reelt tal a ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a+1)e^x - e^y &= -1 \\ e^x + (a-1)e^y &= 1 \end{aligned}$$

med hensyn til (x,y).

VEND!

4. For reelle tal p og q er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + p & \text{for } x \geqq 1 \\ qx + 2 & \text{for } x < 1. \end{cases}$$

Bestem p og q, således at f er differentiabel.

Beregn

$$\int_0^3 f(x)\,dx.$$

5a. I planen er valgt et koordinatsystem. Med t betegnes et reelt tal, som ikke er 0. Linjen l går gennem punktet $P(2,3)$ og er parallel med vektoren $\boldsymbol{v}(1,t)$. Linjen m går ligeledes gennem P og har normalvektoren $\boldsymbol{v}$. Andenaksen fastlægger sammen med l og m en trekant, hvis areal betegnes $A(t)$.

Bestem t således, at $A(t)$ antager sin mindsteværdi, og angiv denne.
Skitser det grafiske billede af arealet som funktion af t.

5b. To funktioner f og g er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = e^x + 1$$
$$g(x) = \ln|x+1| + 2.$$

Tegn i samme koordinatsystem graferne for f og g (begrundelse kræves ikke).

Bevis, at de to grafer har en fælles tangent, og bestem en ligning for denne.

Punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1 \;\wedge\; g(x) \leqq y \leqq f(x)\}$$

deles af fællestangenten i to punktmængder M_1 og M_2.

Beregn arealet af M_1 og arealet af M_2.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1972

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—2	ca. 15 points
hver af opgaverne 3—4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 30 points

---

1. I en klasse med 20 elever er der 12 piger og 8 drenge, af hvilke 2 er brødre. Af klassens elever skal dannes et udvalg med 3 medlemmer.

Bestem antallet af udvalg, der kan dannes i hvert af følgende tilfælde:

1) Der er kun drenge eller kun piger i udvalget.

2) Der er mindst to drenge i udvalget.

3) De to brødre må ikke samtidig være medlemmer af udvalget.

2. Bestem de reelle tal x, $x \in [0;\pi]$, for hvilke det gælder, at

$$\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\,x + 2 = 0.$$

Bestem de reelle tal x, $x \in [0;\pi]$, for hvilke det gælder, at

$$\mathrm{tg}^2(\sin x) - 3\,\mathrm{tg}(\sin x) + 2 = 0.$$

3. For ethvert reelt tal a fastlægges en funktion f_a ved

$$f_a(x) = ax^3 + 3x^2 + (a+2)x + 2.$$

Gør rede for, at funktionen f_{-4} er aftagende.

Bestem de tal a, for hvilke det gælder, at funktionen f_a er voksende.

VEND!

4. Beregn

$$\int_1^5 \frac{x^2}{\sqrt{4x+5}}\,dx.$$

(Anvend for eksempel substitutionen $\sqrt{4x+5} = t$.)

5a. Ved beskrivelsen af et tilfældigt forsøg benyttes en stokastisk variabel X, der kan antage værdien k, hvor $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sandsynligheden for, at X antager værdien k, betegnes med $P(X=k)$, og det gælder, at

$$P(X=k) = ak(8-k),$$

hvor a er et reelt tal. Bestem tallet a.

Beregn spredningen af den stokastiske variable X.

Forsøget tænkes udført i alt ti gange. Beregn sandsynligheden for, at X netop tre gange antager værdien 4.

5b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{3}{2}|x-4| + \tfrac{1}{2}x,$$

og for ethvert tal t, hvor $t \in]0;9[$, er en funktion g_t bestemt ved

$$g_t(x) = \tfrac{1}{2}x + t.$$

Grafen for f skærer grafen for g_t i punkterne A_t og B_t. Punktet C har koordinatsættet $(2,10)$.

Bestem den største værdi af arealet for trekant A_tB_tC.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1973

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—3	ca. 15 points
opgave 4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 35 points

1. Bestem de tal $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, for hvilke det gælder, at

$$\mathrm{tg}^2 x + 3\cot^2 x = 4.$$

Bestem de tal $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, for hvilke det gælder, at

$$\mathrm{tg}^2 x + 3\cot^2 x \geqq 4.$$

2. Ved udførelsen af et eksperiment E er sandsynligheden for en hændelse H lig med 0,72. Eksperimentet E udføres 9 gange.

Beregn sandsynligheden for, at hændelsen H indtræffer netop 6 gange. Resultatet ønskes angivet som decimalbrøk med 3 decimaler.

3. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Desuden er der givet følgende afbildninger af planen på sig selv:

f er den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og forvandlingstal $\frac{2}{3}$,

g er drejningen om O, som afbilder punktet $E(1,0)$ i punktet $F(0,1)$,

h er parallelforskydningen bestemt ved vektoren $\boldsymbol{v}(4,-2)$.

Cirklen C har ligningen $x^2 + y^2 = 9$.

Bestem en ligning for billedet af C ved den sammensatte afbildning $h \circ g \circ f$.

VEND!

4. I et koordinatsystem er l linjen med ligningen

$$5x - 12y + 36 = 0,$$

og G er grafen for funktionen g bestemt ved

$$g(x) = 2 + \ln(x - 1), \quad x \in]1\,;\infty[.$$

Udtryk ved x afstanden fra linjen l til punktet $P(x,g(x))$.

Vis, at afstanden har en mindsteværdi, og bestem denne.

5a. Løs ligningen

$$\log x \cdot \log(1000x) = 4$$

med hensyn til x.

For ethvert tal n er

$$\log(10^n x) \cdot \log(10^{n+3} x) \leqq 4$$

en ulighed i x.

Bevis, at løsningsmængden M for denne ulighed er

$$[10^{-n-4};\ 10^{-n+1}].$$

Bestem de hele tal n, for hvilke tallet 0,15 tilhører M.

5b. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x}{2(x^2 + 1)}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen.

For ethvert positivt tal t er en punktmængde bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq t \ \wedge\ \tfrac{1}{2}x \leqq y \leqq f(x)\}.$$

Punktmængdens areal betegnes $A(t)$.

Beregn $A(3)$.

Bestem de tal t, for hvilke $A(t) < 4{,}5$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1973

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—3	ca. 10 points
hver af opgaverne 4—6	ca. 15 points
opgave 7	ca. 25 points

---

1. Løs uligheden

$$\frac{2-x}{x-4} \geqq \frac{1}{x-2}.$$

2. Bestem tallet a, således at

$$5\int_1^4 \sqrt{ax}\,dx = 7\int_1^4 x\,dx.$$

3. I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$A(-5,-4) \quad , \quad B(10,4) \quad \text{og} \quad C(6,7)\,.$$

Bestem en ligning for vinkelhalveringslinjen for vinkel ABC.

4. Løs følgende ligningssystem med hensyn til (x,y):

$$x + y + 3\sqrt{x+y} = 18$$
$$x - y - 2\sqrt{x-y} = 15.$$

5. I planen er givet et koordinatsystem. Bestem tallene a, b og c således, at parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c$$

indeholder punkterne $A(3,-\frac{1}{2})$ og $B(4,5)$, og således at parablens tangent i A indeholder punktet $C(1,-8\frac{1}{2})$.

VEND!

6. I et koordinatsystem er for ethvert tal t givet to vektorer

$$\boldsymbol{a}_t\,(2^t, 2^t-1) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}_t(12-2^{t+1}, 2^{t+1}-2)\,.$$

Bestem tallet t, således at $\boldsymbol{a}_t$ og $\boldsymbol{b}_t$ er parallelle.

7a. I mængden $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ er en komposition $*$ fastlagt ved

$a * b$ = den principale rest ved division af ab med 18.

Det oplyses, at afbildningen f bestemt ved

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad , \quad x \in A,$$

er en isomorf afbildning af $(A, *)$ på $(B, \square)$.

Gør rede for, at $57 \in B$, $133 \in B$ og $21 \notin B$.

Bestem $57 \,\square\, 133$.

7b. En krukke indeholder 10 røde og 18 sorte kugler. Et eksperiment består i på tilfældig måde og samtidigt at udtage 2 kugler.

Bestem sandsynligheden for, at

1) der udtages 2 sorte kugler.

2) der udtages 1 sort og 1 rød kugle.

En krukke A indeholder 10 røde og 18 sorte kugler, og en krukke B indeholder 10 røde og 11 sorte kugler. Et andet eksperiment består i fra en tilfældig af disse to krukker på tilfældig måde og samtidigt at udtage 2 kugler.

Bestem sandsynligheden for, at

3) der udtages 2 sorte kugler.

4) de 2 udtagne kugler er fra krukke A, når det vides, at de er sorte.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1973

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—3 .... ca. 15 points
opgave 4 .... ca. 20 points
opgave 5 .... ca. 35 points

1. Løs enhver af ligningerne

1) $2x^2 - 17x = 30.$

2) $2x^2 - 17\,|x| = 30.$

3) $|2x^2 - 17x| = 30.$

2. En differentiabel funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f'(x) = \cos 2x + 2 \quad \text{og} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Beregn tallet $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. En kontinuert funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x - 1 - \sqrt{e^x - 1}, \quad x \in [0\,;\infty[.$$

Bestem funktionens værdimængde (billedmængde).

Løs med hensyn til x ligningen

$$f(x) = 6.$$

VEND!

4. En krukke indeholder 6 røde og 4 blå kugler. Et eksperiment består i på tilfældig måde og samtidigt at udtage 3 kugler fra krukken.

Antallet af røde kugler blandt de 3 udtagne kugler er en stokastisk variabel, der kaldes X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Dernæst betragtes ved eksperimentet hændelsen H: »Der udtages mindst 2 røde kugler«.

Bestem sandsynligheden for, at hændelsen H indtræffer netop 3 gange, når eksperimentet udføres 5 gange.

5a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}.$$

Undersøg f og dens graf F med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold, lokale ekstrema og asymptoter.

Tegn grafen.

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem F og linjen med ligningen

$$y = -2x + 4.$$

Løs uligheden

$$f(x) \leqq -2x + 4.$$

Bestem arealet af den punktmængde, der er fastlagt ved

$$\{(x,y) \mid x > 0 \ \wedge \ f(x) \leqq y \leqq -2x + 4\}.$$

5b. Skitser det grafiske billede F af funktionen f, der er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{for} \quad 1 \leqq x \leqq 5 \\ -x^2 + 14x - 39 & \text{for} \quad 5 < x \leqq 9. \end{cases}$$

Gør rede for, at f er kontinuert og differentiabel i tallet 5.

Bestem en ligning for enhver tangent til F med hældningskoefficient 2.

For ethvert tal t er

$$y = 2x + t$$

en ligning for en linje l_t.

Tegn det grafiske billede af funktionen g, hvor $g(t)$ for ethvert tal t angiver antallet af fællespunkter mellem F og l_t.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1973

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—2	ca. 15 points
hver af opgaverne 3—4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 30 points

---

1. I et koordinatsystem er givet vektorerne $\boldsymbol{a}(2,4)$ og $\boldsymbol{i}(1,0)$. Om en firkant $ABCD$ er givet, at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{BC} = 2\hat{a}, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \boldsymbol{i} = -|\overrightarrow{AD}| \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$

Bestem arealet af firkant $ABCD$.

2. I et koordinatsystem har en linje l ligningen

$$x + 2y = 0,$$

og en punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2\pi \ \wedge \ y = \cos x\}.$$

Bestem det punkt P i punktmængden M, der har den mindste afstand fra l. Beregn denne mindste afstand.

3. En funktion f er fastlagt ved

$$f(x) = \frac{x}{e^{2x}} \quad , \quad -1 \leqq x \leqq 1.$$

Bestem funktionens værdimængde, og tegn funktionens grafiske billede.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

VEND!

4. Bestem

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{2-x}-\frac{6x}{(2-x)(1+x)}\right).$$

Bestem tallene a og b, således at

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{a}{2-x}+\frac{b}{(2-x)(1+x)}\right)=-1\,.$$

5a. Idet a, x og y betegner reelle tal, skal man bestemme de tal a, for hvilke ligningssystemet

$$x^2-a^2y^2-a^2=0$$

$$x^2+y^2-4ay+a^4=0$$

har mindst én løsning med hensyn til (x,y).

For $a = 1$ skal man angive ligningssystemets løsningsmængde.

Tegn for $a=1$ i et koordinatsystem de ved ligningerne fremstillede kurver, og bestem hældningskoefficienterne for tangenterne til hver af de to kurver i fællespunkterne.

5b. Bevis, at hvis en funktion f er differentiabel i tallet a, da gælder, at

$$\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)\,.$$

Bestem ved hjælp heraf

1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{ax^3-xa^3}{x-a}.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}\sin x-x}{x-\frac{\pi}{2}}.$

3) $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{e\ln x-x}{x-e}.$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2x}{x-1}.$

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1973

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2—4	ca. 20 points
opgave 5	ca. 30 points

1. Løs uligheden

$$|x^2 - 1| < \frac{3x^2 - 1}{3}.$$

2. En funktion f er for reelle tal x bestemt ved

$$f(x) = 2 + \sin x.$$

Løs med hensyn til x enhver af ligningerne

1) $\ln f(x) = 1.$

2) $f(\ln x) = 1.$

3. I et koordinatsystem har en punktmængde M_a ligningen

$$(a - \sqrt{2a})x + (a - 2)y = 4 \quad ,$$

hvor a betegner et reelt tal.

1) Bestem a, således at M_a er en linje parallel med førsteaksen.

2) Bestem a, således at M_a er en linje gennem punktet P (1,1).

3) Bestem a, således at M_a er en linje parallel med linjen med ligningen $x + 3y = 0$.

VEND!

4. Ved produktion af en bestemt vare er 4 % af de producerede enheder defekte.

Ved kontrolundersøgelse udtages stikprøver hver på 20 enheder.

Bestem sandsynligheden for, at en sådan stikprøve indeholder netop to defekte enheder.

Med X betegnes antallet af defekte enheder i en stikprøve på 20 enheder. Bestem middelværdi og spredning for den stokastiske variable X.

5a. Om to funktioner f og g, der begge er differentiable, er givet, at

$$f(2) = g(2) \quad \text{og} \quad f'(x) < g'(x) \quad \text{for} \quad x > 2.$$

Bevis, at $f(x) < g(x)$ for $x > 2$.

Bevis herefter, at det for $x > 2$ gælder, at

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{x+1} < \int_2^x \frac{1}{t^2+1}\,dt < \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

5b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2\cos x + \sin 2x, \quad x \in [0\,;2\pi]\,.$$

Undersøg f med henblik på nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og ekstrema, og tegn grafen for f.

Find arealet af punktmængden M bestemt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 0\}.$$

En linje med ligningen $x = a$, hvor a betegner et reelt tal, deler M i to punktmængder, som har lige store arealer. Bestem tallet a.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1973

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1—5 .... ca. 15 points
opgave 6 .... ca. 25 points

1. Tegn graferne for funktionerne f og g, hvor

$$f\colon x \curvearrowright |2x - 8| + 5$$
$$g\colon x \curvearrowright 10 - |x - 5|\,.$$

Løs uligheden

$$|2x - 8| + 5 \leqq 10 - |x - 5|\,.$$

2. Blandt fem personer A, B, C, D og E skal ved lodtrækning nedsættes et udvalg på 3 personer.

Find sandsynligheden for, at

1) A kommer i udvalget.
2) både A og B kommer i udvalget.
3) A kommer i udvalget, under forudsætning af at B kommer i udvalget.

3. For ethvert reelt tal k er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = e^{kx^2},$$

hvor x betegner et reelt tal.

Bestem tallet k, således at det for alle reelle tal x gælder, at

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0.$$

VEND!

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \cos^2 x - \sin x + 1 \quad , \quad x \in [0\,;2\pi].$$

Undersøg f med henblik på nulpunkter, fortegn, monotoniforhold, og tegn grafen for f.

5. Bestem hvert af følgende tal

$$1) \int_0^1 \frac{1}{2x-3}\,dx\,.$$

$$2) \int_0^1 \frac{x}{2x^2-3}\,dx\,.$$

$$3) \int_0^1 \frac{x}{2x-3}\,dx\,.$$

6a. Bestem tallet a, således at ligningssystemet

$$y = x^2 + 2ax + a^2 - 2$$

$$y = (a+1)x + a^2 + 2a$$

har løsningen $(x,y) = (1,-1)$, og bestem derefter for dette tal a samtlige løsninger.

Bestem dernæst tallet a, således at ligningssystemet har netop én løsning. Angiv denne løsning.

6b. Linjestykket AB med længden 10 er diameter i en halvcirkel. Punktet C ligger på halvcirklen, og punktet D er den retvinklede projektion af C på AB.

Bestem beliggenheden af C på halvcirklen, således at $|AC| + |CD|$ er størst mulig.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1974

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. Løs ulighedssystemet

$$|x - 1| - 2 < |2x - 12| < \tfrac{1}{2}x + 2 .$$

2. Bestem tallet

$$\int_{-1}^{1} (x + 1) \sqrt{2x^2 + 4x + 3}\, dx .$$

3. Tegn i et koordinatsystem punktmængden bestemt ved

$$M = \{ (x,y) \mid 5x + 9y + 15 \geqq 0 \quad \wedge \quad 2x - 3y + 6 \geqq 0 \quad \wedge \quad -3x - y + 13 \geqq 0 \} .$$

En lineær funktion f af to variable er bestemt ved

$$f(x,y) = 12x + 5y .$$

Bestem for $(x,y) \in M$ den største funktionsværdi af f.

4. I et koordinatsystem er givet en parabel P med ligningen

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

En ret affinitet har linjen med ligningen $y = -1$ som affinitetsakse og har forvandlingstallet $\frac{1}{2}$. Den rette affinitet afbilder P på en parabel P_1.

Bestem en ligning for den tangent til P_1, som har hældningskoefficienten 1.

VEND!

5. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(6,0)$, $B(18,4)$ og $C(3,9)$.
Vis, at trekant ABC er retvinklet, og beregn gradtallene for trekantens vinkler.

Ved en drejning om A med drejningsvinkel $v°$, $0 < v < 90$, afbildes C i et punkt på andenaksen.
Beregn v.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4} .$$

Undersøg f og dens graf F med henblik på monotoniforhold og asymptoter. Tegn F.

Vis, at der for positive tal x gælder

$$f(x) < \frac{8}{x} .$$

For ethvert tal t, $0 < t < 2$, er en linje l bestemt ved ligningen $y = t$. Linjen skærer andenaksen i et punkt P og skærer grafen F i punkterne Q og R. Betegnelserne er valgt således, at førstekoordinaten til Q er mindre end førstekoordinaten til R. Linjen l skærer hyperblen med ligningen $y = \frac{8}{x}$ i et punkt S.

Bevis, at $|PQ|$ og $|RS|$ er lige store.

6b. I planen er givet et koordinatsystem. En kurve K har heri parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 2 + \cos 2t \\ y &= 2 \sin t \end{aligned} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} .$$

Vis, at K er en delmængde af en parabel, og tegn K.

To punkter A og B på K har parameterværdierne t og $-t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Punkterne A og B bestemmer sammen med punktet $C(1,0)$ en trekant.

Bestem t, således at arealet af trekant ABC er størst muligt, og beregn det største areal.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1974

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

---

1. I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\boldsymbol{a}\,(\cos t,\ \sin t) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}(\sin t,\ \cos t - 2\sin t),$$

hvor $t \in [0;2\pi[$.

Bestem t, således at $\boldsymbol{a}$ er vinkelret (ortogonal) på $\boldsymbol{b}$.

2. Løs uligheden

$$\log(2x^2 + 3x + 1) < 1 .$$

3. Løs enhver af følgende differentialligninger:

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = 2x + 3\sin^2 x .$$

$$2)\quad \frac{dy}{dx} = -y^4 .$$

4. Vis, at funktionen f fastlagt ved

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 , \quad x \in \,]-1;1[\ ,$$

har en mindsteværdi, og bestem mindsteværdien.

5. Løs med hensyn til (x,y) ligningssystemet

$$2\sqrt{x+2} - y - 1 = 0$$

$$x - 2y + 3 = 0 .$$

VEND!

6a. I et koordinatsystem er en parabel bestemt ved ligningen

$$y^2 = 9x\,.$$

To forskellige punkter P og Q på parablen har andenkoordinaterne henholdsvis a og $\frac{9}{a}$.

Bestem ligninger for parablens tangenter i P og Q.

Skæringspunktet mellem de to tangenter kaldes S. Vis, at førstekoordinaten til S ikke afhænger af tallet a.

Bestem de tal a, for hvilke andenkoordinaten til S er $\frac{25}{8}$.

6b. En fabrik, der producerer tøjklemmer, har to maskiner M_1 og M_2, som fremstiller henholdsvis 60% og 40% af den samlede produktion. Af de på maskinerne M_1 og M_2 fremstillede klemmer er henholdsvis 5% og 8% defekte.

Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udtaget tøjklemme er defekt.

En tilfældigt udtaget tøjklemme viser sig at være defekt. Bestem sandsynligheden for, at denne er produceret på maskine M_1.

En stikprøve på 100 tøjklemmer tænkes udtaget af produktionen. X er den stokastiske variabel, som angiver antallet af defekte klemmer i stikprøven.

Bestem middelværdien og spredningen for X.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1974

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne *7a* og *7b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—4* .... ca. 10 points
hver af opgaverne *5—6* .... ca. 15 points
opgave *7* .... ca. 30 points

---

1. Tegn i et koordinatsystem grafen for funktionen f bestemt ved

$$f(x) = |x - 2| - 3 \ .$$

Løs ligningen

$$|f(x)| = 1 \ .$$

2. En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 0 og spredning 1.

Beregn sandsynligheden for, at $X \in [-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$.

Beregn sandsynligheden for, at $X \in [-1;3]$.

Bestem mængden af tal a, $a > 0$, således at sandsynligheden for at $X \in [-a;a]$ er større end 0,90.

3. Løs for $x \in [0;2\pi]$ uligheden

$$\cos x \leqq \sin 2x \ .$$

4. I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\boldsymbol{a}(9,12) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}(2,-4) \ .$$

Bestem koordinatsættene til projektionerne af $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{b}$ og af $\boldsymbol{a}$ på $\hat{\boldsymbol{b}}$.

VEND!

5. Bestem ethvert af tallene

$$\int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx \qquad \text{og} \qquad \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx\,.$$

6. En funktion f er fastlagt ved

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x\,, \quad x \in [-1\,;2]\,.$$

Bestem værdimængden for f.

For ethvert tal a er en funktion f_a fastlagt ved

$$f_a(x) = 4x^3 - 3x^2 + ax\,, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Bestem mængden af tal a, for hvilke f_a er en voksende funktion.

7a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}\,.$$

Undersøg f og dens graf F med hensyn til definitionsmængde, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn F.

Bestem en ligning for enhver af de tangenter til F, hvis røringspunkt ligger på førsteaksen eller på andenaksen.

Disse tangenter bestemmer sammen med førsteaksen en firkant.
Beregn denne firkants areal.

7b. Om en mønt gælder, at sandsynligheden for udfaldene krone og plat er henholdsvis $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{4}$. Denne mønt tænkes kastet tre gange.

Lad X være den stokastiske variabel, der antager

værdien 3, hvis mønten viser krone i alle tre kast.
værdien 2, hvis mønten viser krone netop to gange og umiddelbart efter hinanden.
værdien 1, hvis mønten viser krone mindst én gang, men ikke viser krone i to på hinanden følgende kast.
værdien 0, hvis mønten ikke viser krone.

Beregn middelværdi og spredning af X.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1974

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *5a* og *5b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 15 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 20 points
opgave *5*	ca. 30 points

---

1. Løs ulighedssystemet

$$\frac{9}{x-2} < 3 < \frac{x^2+2}{6}.$$

2. Der er givet et koordinatsystem. Bestem de tal t, for hvilke

$$\boldsymbol{a}(2t+5, -t) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}(t^2+2t+1,\ 4t+4)$$

er egentlige vektorer, der er parallelle.

3. I et koordinatsystem har linjerne l og m ligningerne henholdsvis

$$3x+5y=1 \quad \text{og} \quad 8x+3y=13\ .$$

Om to punkter P og Q oplyses, at

$$\{\ P, Q\ \} \subseteq l \cup m \quad \text{og} \quad \overrightarrow{PQ} \text{ har koordinatsættet } (2{,}5).$$

Bestem koordinatsættene til P og Q.

4. Løs med hensyn til x ligningen

$$|\ e^x - e^{-x}\ | = 3 - e^x.$$

VEND!

5a. Om en mønt gælder, at sandsynligheden for, at mønten viser krone ved et enkelt kast, er $\frac{2}{5}$.

Et spil består i, at mønten kastes i en serie af uafhængige kast. Spillet er afsluttet, når mønten første gang viser krone, eller når mønten 5 gange i træk har vist plat.

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver antallet af kast, indtil spillet er afsluttet.

Beregn middelværdi og spredning for X.

5b. En differentiabel funktion f er fastlagt ved

$$f'(x) = f(x) + 3 \quad \text{og} \quad f(0) = 0 .$$

Bestem $f(x)$.

Tegn i et koordinatsystem grafen F for funktionen f, og vis, at F har en asymptote.

Tangenten til F i $O(0,0)$, linjen med ligningen $x = 1$ og F begrænser en punktmængde, som har et areal. Beregn dette areal.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1974

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

---

1. I trekant ABC er vinklerne A og B henholdsvis 27,4° og 38,3° og $|AB| = 5{,}28$. Fodpunktet af højden fra B er D.

Beregn $|BD|$ og $|AC|$.

2. Løs med hensyn til (x,y) ligningssystemet

$$\log\frac{x}{y} = 2$$

$$\log(xy) = 1 + \log 5\,.$$

3. Vis, at der for ethvert reelt tal x gælder

$$8\int_0^x \cos^3 t\,\sin^5 t\,dt = \cos^2 x\,\sin^6 x + 2\int_0^x \cos t\,\sin^5 t\,dt\,.$$

4. En mængde A består af 4 elementer, og en mængde B består af 5 elementer.

Af foreningsmængden $A \cup B$ skal vælges en delmængde bestående af 4 elementer.

1) Bestem antallet af valgmuligheder, når $A \cap B = \emptyset$, og det kræves, at netop to elementer tilhører A.

2) Bestem antallet af valgmuligheder, når $A \cap B$ indeholder netop ét element, og det kræves, at mindst to elementer tilhører A, og mindst to tilhører B.

VEND!

5. Med M_1 og M_2 betegnes følgende mængder af talpar:

$$M_1 = \{ (x,y) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} \mid x + |x| - y - |y| - 2 = 0 \}$$
$$M_2 = \{ (x,y) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} \mid x^2 + y^2 = 5 \}.$$

Tegn i et koordinatsystem de to punktmængder, der er bestemt ved henholdsvis M_1 og M_2, og bestem mængden $M_1 \cap M_2$.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 , \quad x \in \mathsf{R} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter. Tegn grafen.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{ (x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 0 \}.$$

Bestem mængden af tal t, for hvilke netop to tal x tilfredsstiller ligningen

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x = t .$$

6b. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O har linjen l ligningen $3x - 4y = 0$.

Ved en ret affinitet med l som affinitetsakse og forvandlingstal $\frac{1}{2}$ afbildes cirklen med centrum O og radius 5 på en punktmængde M.

Bestem en ligning for M i et retvinklet koordinatsystem, der har O som begyndelsespunkt og førsteakse på l.

Bestem en ligning for M i det oprindelige koordinatsystem.

74-8-9

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1974

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Af opgaverne *5a* og *5b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—4*	ca. 20 points
opgave *5*	ca. 30 points

---

1. Ved hjælp af tallene

$$1,2,3,4,5,6,7$$

tænkes på tilfældig måde nedskrevet et syvcifret tal, hvori alle cifrene er forskellige.

Bestem sandsynligheden for, at tallene 1,2,3 i en eller anden rækkefølge står ved siden af hinanden.

2. I et koordinatsystem er en punktmængde M bestemt ved

$$\left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \;\wedge\; 0 \leqq y \leqq \sin 2x \right\}.$$

Punktmængden M deles af kurven med ligningen

$$y = \sin x$$

i to punktmængder M_1 og M_2.

Beregn arealet af M_1 og arealet af M_2.

VEND!

3. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder følgende:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= 13\,, \\ \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) &= -1\,, \\ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} &= 20\,. \end{aligned}$$

Bestem længderne af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ samt en af vinklerne mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

4. Løs med hensyn til x enhver af følgende ligninger:

$$1)\ \log x - \log\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

$$2)\ \log \sin x - \log \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1\,.$$

5a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + \frac{4}{e^x}\,.$$

Bestem værdimængden for f.

Løs med hensyn til x uligheden

$$f(x) \leqq 8\tfrac{1}{2}\,.$$

Bestem arealet af den punktmængde, der i et koordinatsystem er fastlagt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 8\tfrac{1}{2}\}\,.$$

5b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2\,.$$

Funktionens graf betegnes F.

Bestem ligninger for de tangenter til F, der indeholder koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Punktet P ligger på grafen i første kvadrant, punktet Q er projektionen af P på førsteaksen, og punktet R har koordinatsættet $(6,0)$.

Bestem koordinatsættet til P, således at arealet af trekant PQR er størst muligt.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1975
MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
opgave *3*	ca. 15 points
hver af opgaverne *4—5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-9} \geqq 2.$$

2. Løs differentialligningen

$$f''(x) = 9f(x).$$

Bestem den løsning f, der opfylder betingelserne $f(0) = 1$ og $f'(0) = 9$.

3. Skitsér grafen for funktionen f, der er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\ , \quad x > -1.$$

Beregn arealet af den punktmængde M, der begrænses af koordinatakserne, grafen for f samt linjen med ligningen $x = 1$.

Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres om førsteaksen.

VEND!

4. En vektor $\boldsymbol{a}$ har længden 2, en vektor $\boldsymbol{b}$ har længden 1, og en vektor $\boldsymbol{c}$ har længden $2\sqrt{5}$. Der findes to tal t, således at

$$\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}\,.$$

Det ene af disse tal er 3. Bestem det andet tal.

Bestem gradtallet for vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

5. I mængden R er en komposition $*$ fastlagt ved

$$x * y = 3xy + 4(x + y) + 4.$$

Bevis, at funktionen f, der er fastlagt ved

$$f(x) = 3x + 4\,, \quad x \in \mathsf{R}\,,$$

er en isomorf afbildning af $(\mathsf{R},*)$ på $(\mathsf{R},\cdot)$.

Bestem herefter det neutrale element i $(\mathsf{R},*)$.

Gør rede for, at $(\mathsf{R},*)$ ikke er en gruppe.

6a. I planen er givet et koordinatsystem. En kurve har i dette parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ y &= \sin 2t \end{aligned}\,, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[\,.$$

Tegn kurven.

Gør rede for, at kurven i koordinatsystemets begyndelsespunkt har to forskellige tangenter, og bestem gradtallet for en af vinklerne mellem disse.

I halvplanen bestemt ved

$$\{(x,y) \mid x \geqq 0\}$$

begrænser kurven en punktmængde, som har et areal. Beregn dette areal.

6b. En person A skyder 3 skud mod et mål. Skuddene antages at være uafhængige, og ved det enkelte skud er sandsynligheden for at træffe målet lig med $\frac{1}{2}$. En anden person B skyder 2 skud mod det samme mål. Også disse skud antages uafhængige, og ved det enkelte skud er sandsynligheden for at træffe målet lig med $\frac{1}{3}$.

Idet den stokastiske variabel X angiver antallet af træffere fra A og den stokastiske variabel Y antallet af træffere fra B, skal man bestemme sandsynligheden for, at X er større end Y.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1975

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. I planen foreligger et koordinatsystem. Om en parabel med ligningen

$$y = x^2 + bx + c$$

gælder, at punktet $P(3,4)$ ligger på parablen, og at parablens tangent i punktet P indeholder punktet $Q(-1,-4)$.

Bestem tallene b og c.

2. Bestem tallene

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1+\sin x}\,dx$$

med 3 decimaler.

3. Inden for en bestyrelse, som har 12 medlemmer, skal der vælges to udvalg bestående af henholdsvis 3 og 4 medlemmer. Bestem antallet af valgmuligheder, når

1) udvalgene ikke må have noget medlem fælles.

2) udvalgene skal have netop ét medlem fælles, og bestyrelsens formand skal være medlem af det største udvalg.

4. I en cirkel med radius 5 er givet en korde AB med længden 6. Bestem gradtallet for den mindste bue AB.

Korden AB deles i tre lige store dele, og gennem delepunkterne trækkes radierne. Bestem gradtallet for hver af de tre buer, hvori disse radier deler buen AB.

VEND!

5. For ethvert tal t er

$$(\ln x)^2 - 2t \ln x - 3t^2 + 8t - 4 = 0$$

en ligning i x.

Løs ligningen for $t = 2$.

Bestem mængden af tal t, for hvilke mindst én af ligningens løsninger tilhører intervallet $[1;e]$.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Gør rede for, at grafen for funktionen g, hvor

$$g(x) = x + 2,$$

er asymptote til grafen for f.

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Bestem størsteværdien af funktionen h, hvor

$$h(x) = |g(x) - f(x)|.$$

6b. I planen er givet et koordinatsystem. En ret affinitet f har forvandlingstallet $-\frac{2}{3}$ og linjen med ligningen $x = 3$ som affinitetsakse. En spejling g har linjen med ligningen $y = -2$ som spejlingsakse.

Et punkt P_1 har koordinatsættet $(9,0)$.

Bestem koordinatsættet til et punkt P, således at

$$g(f(P)) = P_1.$$

En linje l_1 har ligningen $x - 3y - 9 = 0$.

Bestem en ligning for en linje l, således at

$$g(f(l)) = l_1.$$

En ellipse E er givet ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = (-3 + 3\cos t,\ 3 + 2\sin t), \quad t \in [0;2\pi[.$$

Bestem en ligning for punktmængden $g(f(E))$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1975

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

---

1. En funktion f er fastlagt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1\ , \quad x \in \,]-1\,;1[.$$

Bestem funktionens værdimængde.

2. Bestem de tal x i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, for hvilke det gælder, at

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = 1.$$

3. Løs med hensyn til x uligheden

$$\frac{2\ln x}{1+\ln x} \leqq \ln x\,.$$

4. For ethvert tal a er

$$x^2 - (3a+2)x - 4a^2 = 0$$

en andengradsligning i x.

Bevis, at enhver sådan ligning har to løsninger.

Ligningens løsninger betegnes α og β.

Bestem a, således at $|\alpha - \beta|$ er så lille som muligt. Beregn denne mindste værdi.

VEND!

5. Ved beskrivelsen af et forsøg benyttes en stokastisk variabel X, der har værdimængden $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. For ethvert k, hvor $k \in M$, er sandsynligheden for, at X antager en værdi, der er mindre end eller lig med k, fastlagt ved

$$p(X \leqq k) = \frac{1}{1092}\, k(k+1)\,(19-k).$$

Bestem enhver af sandsynlighederne

$$p(X > 4), \quad p(6 < X \leqq 9) \quad \text{og} \quad p(X = 7).$$

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+5}, \qquad x \in \mathrm{R} \setminus \{1,\ 5\}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen.

En linje l har ligningen

$$x - 5y = 3.$$

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem grafen for f og linjen l.

For ethvert tal t, hvor $t > 6$, er en punktmængde fastlagt ved

$$\{(x,y) \mid 6 \leqq x \leqq t \ \wedge\ 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

Bestem punktmængdens areal $A(t)$.

Bestem t, således at $A(t) = \ln 3$.

6b. En fabrik fremstiller et stort antal elektriske pærer. Produktionen er sammensat således:

20 % af produktionen er 40 W-pærer,

50 % af produktionen er 60 W-pærer,

30 % af produktionen er 75 W-pærer.

Erfaringen viser, at

4 % af 40 W-pærerne er defekte,

6 % af 60 W-pærerne er defekte,

8 % af 75 W-pærerne er defekte.

Af 75 W-pærerne udtages en stikprøve på 10 pærer. Beregn sandsynligheden for, at

1) ingen af pærerne i stikprøven er defekt.

2) netop én af pærerne i stikprøven er defekt.

3) højst to af pærerne i stikprøven er defekte.

Bestem middelværdi og spredning for antallet af defekte pærer i stikprøven.

Af den samlede produktion af pærer udtages på tilfældig måde én pære. Beregn sandsynligheden for at pæren er defekt.

Det viser sig, at den udtagne pære er defekt. Beregn sandsynligheden for, at det er en 60 W-pære.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1975

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 25 points

1. Løs med hensyn til x ligningen

$$\int_0^x \frac{4}{5+2t}\,dt = \ln 4.$$

2. Et eksperiment består i på tilfældig måde at vælge et tal blandt følgende tolv tal:

$$5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ \alpha\ ,$$

hvor tallet α ikke er kendt.

Eksperimentets udfald er en stokastisk variabel, der kaldes X.

1) Det oplyses, at middelværdien af den stokastiske variabel X er lig med 23. Bestem tallet α.

2) Udregn for det fundne tal α spredningen for den stokastiske variabel X.

3. For ethvert tal k er

$$x^3 + 2x^2 - 7x + k = 0$$

en ligning i x.

Bestem mængden af tal k, for hvilke ligningen har tre forskellige løsninger.

VEND!

4. I et koordinatsystem er for ethvert tal a linjen l_a bestemt ved ligningen

$$(a+1)x - 3y = 5,$$

og linjen m_a bestemt ved ligningen

$$(a-1)x + 2ay = 4.$$

Bestem de tal a, for hvilke

1) l_a er parallel med m_a.

2) l_a er vinkelret på m_a.

5. I et åbent interval I er f en to gange differentiabel funktion, der har grafen F. Ved *krumningen* $k(x)$ af F i punktet $P(x, f(x))$, hvor $x \in I$, forstås tallet

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{(1+(f'(x))^2)^3}}.$$

Bestem koordinatsættet til det punkt på grafen for den naturlige logaritmefunktion, hvori krumningen er størst.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x - 4 + 6\sqrt{4-x}, \quad x \leqq 4.$$

Gør rede for, at $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$, og bestem funktionens værdimængde.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) | \ 8 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

6b. I planen er givet et koordinatsystem. Vektoren $\boldsymbol{a}$ har koordinatsættet (5,0). En firkant $ABCD$ er bestemt ved

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{BC} = 2\hat{\boldsymbol{a}}, \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} < 0 \quad \text{og} \quad |\overrightarrow{AD}| = 4\sqrt{5}.$$

Beregn arealet af firkant $ABCD$.

Beregn gradtallet af den spidse vinkel mellem firkantens diagonaler.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1975

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—5* .... ca. 15 points
opgave *6* .... ca. 25 points

1. Beregn

$$\int_{-3}^{3} (|x-2| + |x| + |x+2|)\, dx.$$

2. I mængden R er en komposition $*$ fastlagt ved

$$x * y = 2x + 2y + 4xy + \tfrac{1}{2}.$$

Vis, at tallet $-\frac{1}{4}$ er neutralt element for (R, $*$).

Vis, at tallet 2 har et inverst element, og angiv dette.

3. Løs for $x \in [0; 2\pi]$ uligheden

$$6 \sin^2 x - 2 \sin x > 2 \cos^2 x - 1.$$

4. Bestem de tal x, for hvilke

$$\log x + \log(1-x) + \log(2-x) = \log 3 - 3 \log 2.$$

VEND!

5. I et koordinatsystem er givet parablen med ligningen $y = \frac{1}{4}x^2$.

For ethvert tal a er en linje l fastlagt ved at have hældningskoefficient a og at indeholde punktet $A(0,1)$.

Bestem, udtrykt ved a, koordinatsættene til skæringspunkterne P og Q mellem parablen og l.

Bevis, at parabeltangenterne i P og Q står vinkelret på hinanden.

6a. Et marked forsynes med kuglepenne af tre fabrikater A, B og C. A dækker 50%, B 30% og C 20% af markedet. Fra A er 8%, fra B 4% og fra C 15% af kuglepennene behæftet med visse fejl.

Bestem sandsynligheden for at få en fejlfri kuglepen, når man køber på tilfældig måde uden kendskab til fabrikaterne.

Bestem sandsynligheden for, at en kuglepen, der købes på tilfældig måde, og som derefter viser sig at være behæftet med fejl, er af fabrikat A.

En kunde køber to kuglepenne af det samme, men tilfældig valgte fabrikat. Bestem sandsynligheden for, at begge er fejlfri.

6b. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O har en ellipse E_1 ligningen

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

og en ellipse E_2 ligningen

$$4x^2 + 24x + y^2 + 32 = 0.$$

Tegn E_1 og E_2.

Ved en ret affinitet med positivt forvandlingstal afbildes E_1 på E_2. Bestem en ligning for affinitetsaksen, og bestem forvandlingstallet.

Ved en drejning på 90° omkring O efterfulgt af en multiplikation med positiv multiplikationsfaktor ud fra et punkt P afbildes E_1 på E_2. Bestem multiplikationsfaktoren og koordinatsættet til P.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1975

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

---

1. Løs uligheden

$$||x-2|-3|<2.$$

2. En krukke indeholder 5 røde og 4 blå kugler, og en anden krukke indeholder 6 røde og 3 blå kugler.

Et eksperiment består i fra en tilfældig valgt af disse to krukker på tilfældig måde og samtidigt at udtage 3 kugler.

Bestem sandsynligheden for, at 2 af kuglerne er røde, og 1 kugle er blå.

3. Bestem ethvert af tallene

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x+1}\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 2x+1}\,dx\,.$$

VEND!

4. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,1)$ og $B(5,2)$. Et punkt C har koordinatsættet (t,t), $t \neq 1$.

Bestem de tal t, for hvilke trekant ABC er retvinklet, og beregn for hvert af de fundne tal t trekantens spidse vinkler.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x + 6\ln(x^2+5), \quad x \in [-7;1].$$

Bestem funktionens værdimængde.

6a. En vare sælges i pakninger med vægtbetegnelsen 300 gram. Pakningernes vægt målt i gram varierer og antages at være normalfordelt med middelværdi 300 og spredning 10.

Bestem under denne antagelse sandsynligheden for, at en tilfældig valgt pakning

1) vejer mindre end 285 gram.

2) vejer mere end 315 gram.

Varen sælges også i pakninger med vægtbetegnelsen 500 gram. Også disse pakningers vægt målt i gram varierer og antages at være normalfordelt med middelværdi 500.

Bestem spredningen, når det vides, at sandsynligheden for at en tilfældig valgt pakning vejer mindre end 475 gram, er 0,05.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x + e^{-x}, \quad x \geqq -2.$$

Undersøg f med henblik på monotoniforhold. Bestem funktionens værdimængde. Vis, at funktionens graf F har en skrå asymptote. Tegn grafen.

Bestem en ligning for tangenten til F i punktet $A(0,1)$.

Med k betegnes et tal, der er større end 1. Tangenten i A, grafen F og linjerne med ligningerne henholdsvis $y = 2x$ og $x = k$ afgrænser en punktmængde, som har et areal.

Bestem dette areal $A(k)$.

Bestem k, således at $A(k) > \frac{1}{4}$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1976

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. En funktion f er differentiabel i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Endvidere gælder, at

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \cdot \cos x \qquad \text{og} \qquad f(0) = 1.$$

Bestem $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Der er givet et koordinatsystem. En cirkel med centrum i fjerde kvadrant har radius 5, har førsteaksen som tangent og går gennem punktet $P(1,-2)$.

Bestem koordinatsættet til cirklens centrum.

Bestem en ligning for cirkeltangenten i P.

3. Beregn enhver af grænseværdierne

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}\,.$$

VEND!

4. En krukke indeholder 4 røde, 5 blå og 6 grønne kugler.

Et eksperiment består i på tilfældig måde og samtidigt at udtage 3 kugler fra krukken.

Ved eksperimentet betragtes de to hændelser

A: de udtagne kugler har samme farve,

B: ingen af de udtagne kugler er røde.

Bestem enhver af sandsynlighederne $P(A)$, $P(B)$ og $P(A|B)$.

5. Løs med hensyn til (x,y) ligningssystemet

$$y^2 = 6 - 2x$$
$$2y = 3 - x \ .$$

Løs med hensyn til (x,y) ligningssystemet

$$2 \log y = \log 2 + \log(3-x)$$
$$\log(x + 2y - 2) = 0 \ .$$

6a. I et koordinatsystem har en kurve K parameterfremstillingen

$$x(t) = 2 \sin t \qquad , \qquad 0 < t \leqq \pi \ .$$
$$y(t) = \cot \frac{t}{2}$$

Vis, at K har en tangent, der er parallel med andenaksen, og vis, at K har en asymptote. Tegn K.

Der findes to punkter på K, hvis førstekoordinat er $\sqrt{3}$. Beregn en af vinklerne mellem tangenterne til K i disse punkter.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12\,x - 5 \quad , \quad x \in \mathrm{R} \ .$$

Punktet $P(0,-5)$ ligger på to tangenter til grafen for f.

Bestem en ligning for enhver af disse tangenter.

Gør rede for, at f har en omvendt funktion φ, og undersøg, om φ er differentiabel.

Bestem tallene $\varphi\,(11)$ og $\varphi'\,(11)$.

Beregn arealet af den punktmængde, der er fastlagt ved

$$\{(x,y) \mid x \geqq 0 \ \wedge \ f(x) \leqq y \leqq 11\} \ .$$

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1976

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
opgave *3*	ca. 15 points
hver af opgaverne *4—5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 25 points

1. En funktion f er fastlagt ved

$$f(x) = 4e^x - e^{2x}, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Bestem værdimængden for f.

2. Bestem mængden af tal a, for hvilke uligheden

$$\frac{x^2 + 6x + a}{-x^2 + x - 2} < 2$$

er opfyldt for alle tal x.

3. I en orienteret plan er givet en egentlig vektor $\boldsymbol{a}$. Om en firkant $ABCD$ oplyses det, at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{a}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{CD} = -2\boldsymbol{a} + 2\hat{\boldsymbol{a}}.$$

Bestem gradtallet for en af vinklerne mellem firkantens diagonaler.

4. Beregn hvert af tallene

$$\int_3^4 \sqrt{2x - 5}\, dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 2x\, e^{2x}\, dx.$$

VEND!

5. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1 + x^2}.$$

Tegn den integralkurve, der indeholder punktet $A(1,1)$.

Tegn den integralkurve, der indeholder punktet $B(2,0)$.

(Ved en integralkurve forstås grafen for en løsning til differentialligningen.)

6a. I planen er valgt et koordinatsystem. Den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og forvandlingstallet $-\frac{2}{3}$ betegnes f. Drejningen på 90° i positiv omløbsretning om begyndelsespunktet betegnes g.

En punktmængde M består af de punkter, hvis koordinatsæt tilfredsstiller ulighedssystemet

$$x \geqq 2 \quad \wedge \quad y \leqq -3 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 \leqq 0.$$

Tegn M, $f(M)$ og $g(f(M))$.

Angiv et ulighedssystem, hvis løsningsmængde er mængden af koordinatsæt for punkterne i $g(f(M))$.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \quad , \quad x \neq 0\,.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoni og ekstrema. Tegn grafen.

Bestem mængden L af tal a, for hvilke linjen med ligningen $y = a$ har to punkter fælles med grafen for f.

For ethvert $a \in L$ fastlægger de to fællespunkter et linjestykke, hvis midtpunkt betegnes M_a. Gør rede for, at mængden af punkter M_a er en delmængde af en linje, og bestem en ligning for denne linje.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1976

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. Et eksperiment beskrives ved et sandsynlighedsfelt med sandsynlighedsfunktionen P. Om hændelserne A og B oplyses, at

$$P(A) = 0{,}4\ ,\quad P(B) = 0{,}5 \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 0{,}75.$$

Bestem $P(A \mid B)$.

Om hændelserne C og D oplyses, at

$$P(C) = 0{,}4\ ,\quad P(D) = 0{,}5 \quad \text{og} \quad P(C \mid D) = 0{,}4.$$

Bestem $P(C \cup D)$.

2. I et koordinatsystem er givet vektorerne $\boldsymbol{a}(3,5)$ og $\boldsymbol{b}(6,-7)$. Beregn koordinatsættet til projektionen af vektoren $\boldsymbol{a}$ på vektoren $\boldsymbol{b}$.

3. I trekant ABC er vinkel A spids, og højden fra B skærer AC i punktet D. Det oplyses, at

$|BC| = 7{,}48$, vinkel $C = 26{,}9°$ og $|AD| = 2{,}32$.

Beregn vinkel A.

VEND!

4. Beregn tallet

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx \,.$$

5. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er givet en parabel med ligningen

$$y = -x^2 + 4x$$

og en linje med ligningen

$$y = ax \,, \quad \text{hvor } a \in \,]0\,;4[\,.$$

Linjen skærer parablen i O og i et punkt P_a, hvis projektion på førsteaksen kaldes Q_a.

Bestem det tal a, for hvilket arealet af trekant OP_aQ_a er størst.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-1}\,, \qquad x \neq 1\,.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen for f.

Grafen for f samt linjerne med ligningerne $y = 0$ og $y = 3$ begrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

6b. Et eksperiment E_1 består i, at tre symmetriske terninger kastes samtidigt. Antallet af seksere ved eksperimentet E_1 er en stokastisk variabel X.

Beregn middelværdi og spredning af X.

Om en usymmetrisk terning gælder, at sandsynligheden for, at den ved ét kast viser seks øjne, er $\frac{1}{3}$. Et eksperiment E_2 består i, at denne terning og to symmetriske terninger kastes samtidigt. Antallet af seksere ved eksperimentet E_2 er en stokastisk variabel Y.

Beregn middelværdi og spredning af Y.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1976

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. En krukke indeholder 5 gule og 7 sorte kugler. Et eksperiment består i på tilfældig måde og samtidigt at udtage 4 kugler af krukken.

Bestem sandsynligheden for, at der ved eksperimentet udtages én gul kugle og tre sorte kugler.

2. Beregn med tre decimaler tallet

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{3+x}\,dx .$$

3. I et koordinatsystem er givet parablen med ligningen $y = x^2$. Opløs vektoren $\boldsymbol{a}(4,3)$ i en sum af to på hinanden vinkelrette vektorer, hvoraf den ene er parallel med tangenten til parablen i punktet $P(1,1)$.

4. Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2 - 8x + 6} .$$

Bestem definitionsmængden for f, og bevis, at grafen for f har netop to asymptoter.

Angiv en ligning for hver af de to asymptoter.

VEND!

5. Der er givet et koordinatsystem. Med f betegnes den rette affinitet, der har linjen med ligningen $y = -2$ som affinitetsakse og forvandlingstallet $\frac{1}{2}$. Med g betegnes spejlingen i linjen med ligningen $y = x$.

1) Bestem billedet af punktet $A(3,4)$ ved den af f og g sammensatte afbildning $g \circ f$.

2) Bestem koordinatsættet til det punkt B, som ved afbildningen $g \circ f$ afbildes i punktet A.

6a. En mængde M af talpar er bestemt ved

$$M = \{(x,y) \mid 4x + y \leqq 36 \ \wedge \ x + y \leqq 12 \ \wedge \ x + 3y \leqq 24 \ \wedge \ x \geqq 0 \ \wedge \ y \geqq 0\}.$$

Tegn i et koordinatsystem den punktmængde, der er fastlagt ved M.

Funktionerne f, g og h er for $(x,y) \in M$ bestemt ved

$$f(x,y) = 2x - y + 5,$$

$$g(x,y) = x + y - 14,$$

$$h(x,y) = x^2 - 2x + y^2.$$

Bestem størsteværdien for enhver af funktionerne f, g og h.

6b. Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad , \quad x \geqq 0.$$

Arealet af den punktmængde, der begrænses af grafen for f, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 0$ og $x = t$, $t > 0$, kaldes $A(t)$.

Bestem $A(t)$.

Den ovenfor beskrevne punktmængde drejes 360° om førsteaksen. Rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme kaldes $V(t)$.

Bestem $V(t)$.

Funktionen H er fastlagt ved

$$H(t) = \frac{V(t)}{A(t) + 2} \quad , \quad t > 0.$$

Bevis, at H har en størsteværdi, og bestem denne.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1976

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
opgave *3*	ca. 15 points
hver af opgaverne *4—5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 25 points

1. I en ligebenet trekant ABC med toppunkt B er længden af grundlinjen 14,82, og højden fra B har længden 11,85.

Beregn trekantens vinkler og længden af benene. Beregningen ønskes udført ved brug af tabel og med det antal decimaler, som tabellen kan give.

2. Ved beskrivelsen af et forsøg benyttes en stokastisk variabel X med værdimængden

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

For ethvert n, $n \in M$, er sandsynligheden $P(X=n)$ lig med $\frac{1}{10}$.

Beregn middelværdien μ af den stokastiske variabel X.

Beregn $P(|X-\mu| > 4)$.

3. I et koordinatsystem er givet en parabel med ligningen

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x + \tfrac{7}{2}$$

og en linje med ligningen

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

Bestem afstanden fra punktet $P(5,1)$ til linjen.

Bestem koordinatsættet til det punkt på parablen, der har den mindste afstand til linjen.

VEND!

4. Om en funktion f oplyses det, at

1) f er differentiabel, og f' er kontinuert for alle tal.

2) f tilfredsstiller differentialligningen

$$f''(x) - 4f(x) = 0 \quad \text{for} \quad x > 0.$$

3) f tilfredsstiller differentialligningen

$$f''(x) + 4f(x) = 0 \quad \text{for} \quad x < 0.$$

4) $f(0) = 2$ og $f'(0) = 4$.

Bestem $f(x)$.

5. Bestem de tal x i intervallet $[0;2\pi[$, for hvilke det gælder, at

$$\operatorname{tg} x < 2\cos x - \frac{2}{\cos x}.$$

6a. En funktion F er bestemt ved

$$F(x) = \int_{-1}^{x} -4t\, e^{-t^2}\, dt, \qquad x \in \mathrm{R}.$$

Beregn $F(2)$.

Vis, at $F(x)$ har en grænseværdi a for x gående mod uendelig, og bestem a.

Løs uligheden

$$|F(x) - a| < \tfrac{1}{100}.$$

6b. Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x, \qquad x \in \,]0;3].$$

Undersøg f og dens graf med henblik på monotoniforhold, asymptoter og værdimængde, og tegn grafen.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 3 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

Beregn med to decimaler arealet af M.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1976

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Af opgaverne *5a* og *5b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—4*	ca. 20 points
opgave *5*	ca. 30 points

1. Løs med hensyn til x ligningen

$$3e^{2x} - 7e^{x} + 2 = 0\,.$$

2. Vis, at ligningen

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$

har tallet 1 som løsning, og løs ligningen.

Løs uligheden

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 < 0\,.$$

3. I et koordinatsystem er to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ givet ved

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a}(t-1,\, t+1) \\ \boldsymbol{b}(\;3\;\;,\, t+2) \end{array}\quad , \qquad t \in \mathrm{R}\,.$$

Bestem de tal t, for hvilke $\boldsymbol{a}$ er parallel med $\boldsymbol{b}$.

Bestem for $t = 2$ vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

VEND!

4. Figuren viser grafen for funktionen f, der er fastlagt ved

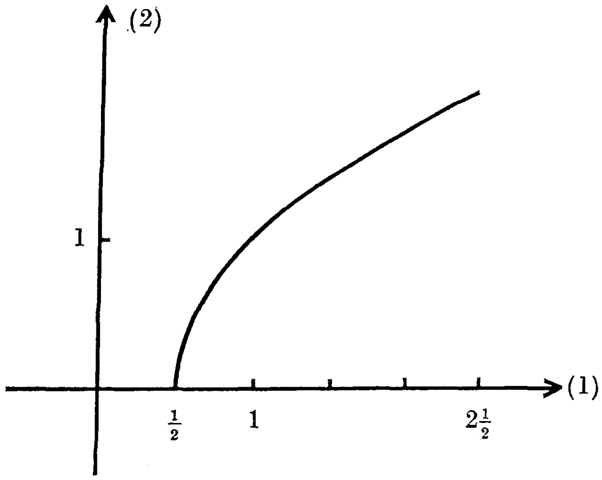
$$f(x) = \sqrt{2x-1}\,, \qquad x \in [\tfrac{1}{2}\,;\,2\tfrac{1}{2}]\,.$$

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2\tfrac{1}{2} \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\}\,.$$

Beregn arealet af M.

Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres om førsteaksen.



5a. Ved et kast med en bestemt falsk mønt er sandsynligheden for udfaldet plat lig med 0,4. Det eksperiment, der består i tre kast med den falske mønt, beskrives ved et sandsynlighedsfelt med sandsynlighedsfunktionen P.

Antallet af udfald plat ved eksperimentet er en stokastisk variabel X. Angiv de mulige værdier for X og de tilhørende sandsynligheder.
Beregn middelværdi og spredning for X.

Med A og B betegnes hændelserne

$$\begin{aligned} A &: \ X \geqq 2 \\ B &: \ X \text{ er ulige.} \end{aligned}$$

Beregn enhver af sandsynlighederne $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ og $P(B|A)$.

Ved kast med en anden mønt er sandsynligheden for udfaldet plat lig med s. Et eksperiment består i n kast med denne mønt. Antallet af udfald plat ved dette eksperiment er en stokastisk variabel med middelværdi $\frac{3}{2}$ og spredning $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Beregn n og s.

5b. Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = 2 + \tfrac{1}{2}x + \sin x \quad , \quad x \in [-\pi;\pi]\,.$$

Bestem funktionens monotoniforhold, og vis, at $f(x)$ er positiv for ethvert x i intervallet $[-\pi;\pi]$.

Tegn grafen for f.

Grafen har to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Bestem en ligning for hver af disse tangenter.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1977

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 25 points

1. Løs hver af følgende to uligheder:

1) $|2x - 1| < 3 .$

2) $\dfrac{1}{2x - 1} < 3 .$

2. Der er givet et koordinatsystem. Bestem tallene a, b og c, således at punkterne $P(4,3)$ og $Q(1,0)$ ligger på parablen med ligningen $y = ax^2 + bx + c$, og således at parabeltangenten i Q har ligningen $4x - y - 4 = 0$.

Tegn parablen.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} , \qquad x \in [4\,;16] .$$

Bestem værdimængden for f.

Beregn

$$\int_4^{16} f(x)\, dx .$$

VEND!

4. I en orienteret plan er givet en egentlig vektor $\boldsymbol{v}$.

Vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er bestemt ved

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{v} - 3\hat{\boldsymbol{v}} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} + 2\hat{\boldsymbol{v}}\ .$$

Bestem tallet t, således at længden af vektoren $\boldsymbol{a} + t\hat{\boldsymbol{b}}$ er mindst.

5. I et koordinatsystem har en firkant $ABCD$ vinkelspidserne $A(2,5)$, $B(4,9)$, $C(10,-3)$ og $D(6,-7)$.

Midtpunkterne af firkantens sider er vinkelspidser i en ny firkant.

Bevis, at denne firkant er et parallelogram.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem parallelogrammets diagonaler, og beregn gradtallet (1 decimal) for den spidse vinkel mellem disse diagonaler.

Bestem parallelogrammets areal.

6a. I et spil er der en sandsynlighed p $(0 < p < 1)$ for at en spiller A får gevinst. Gevinsten er 10 kr.

Bestem, udtrykt ved p, sandsynligheden for, at A's samlede gevinst ved 5 uafhængige spil er 30 kr. eller 40 kr.

Bestem herefter den værdi af p, for hvilken den fundne sandsynlighed er størst.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 + 2x - 2)e^x\ , \qquad x \leqq 1\ .$$

Undersøg f med hensyn til fortegn og monotoniforhold.

Vis, at funktionen har såvel en største- som en mindsteværdi, og angiv disse værdier.

Beregn

$$\int_{-4}^{0} f(x)\, dx\ .$$

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1977

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne 8*a* og 8*b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—6*	ca. 10 points
opgave *7*	ca. 15 points
opgave *8*	ca. 25 points

---

1. I et koordinatsystem har en kurve ligningen

$$4x^2 - 16x + 3y^2 + 18y + 31 = 0 .$$

Tegn kurven.

2. Af en forsamling bestående af 8 kvinder og 4 mænd skal udtages en arbejdsgruppe på 5 personer.

Gør rede for, at gruppen kan udvælges på 448 forskellige måder, når det forlanges, at den skal bestå af højst 3 kvinder og højst 3 mænd.

Beregn antallet af måder, hvorpå gruppen kan udvælges, når det forlanges, at de 5 personer ikke alle må være af samme køn.

3. Der er givet et koordinatsystem. Ved en ret affinitet er linjen med ligningen $x - 2y + 2 = 0$ affinitetsakse, og billedet af førsteaksen er en linje parallel med andenaksen.
Bestem forvandlingstallet.

4. Bestem de tal x i intervallet $[0; 2\pi]$, for hvilke der gælder

$$4 \sin^3 x - \sin x > 0 .$$

5. Et eksperiment består i 8 gange at kaste to symmetriske terninger. Bestem sandsynligheden for, at terningerne netop 2 gange viser øjental, hvis sum er mindre end eller lig med 4.

VEND!

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \qquad x \neq 0 .$$

Angiv enhver af grænseværdierne (begrundelse kræves ikke):

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) .$$

7. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \qquad x \in \mathsf{R}_+ ,$$

og en funktion g er bestemt ved

$$g(x) = \ln(e^x - 1) - x, \qquad x \in \mathsf{R}_+ .$$

Vis, at g er en stamfunktion til f.

Angiv som decimalbrøk med 2 decimaler

$$\int_1^2 f(x)\, dx .$$

8a. På en fabrik fremstilles tre produkter A, B og C. Fabrikken har to afdelinger. Det antal kg, der pr. time produceres, fremgår af nedenstående skema.

	A	B	C
Afdeling I	50	100	600
Afdeling II	200	150	400

Bestem for hver af de to afdelinger et antal timer, som den skal være i drift, for at afdelingerne tilsammen billigst muligt kan producere mindst 20 000 kg A, mindst 30 000 kg B og mindst 120 000 kg C, hvis

1) udgifterne i afdeling I er 300 kr. pr. time, og udgifterne i afdeling II er 600 kr. pr. time.

2) udgifterne i afdeling I er 400 kr. pr. time, og udgifterne i afdeling II er 600 kr. pr. time.

8b. Bestem de tre løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 ,$$

hvis grafer indeholder henholdsvis

1) punktet A (1,0) .

2) punktet B (1,1) .

3) punktet C (1,—1) .

De tre grafer ønskes skitseret, og eventuelle asymptoter skal fremgå af tegningen.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1977

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Af opgaverne *7a* og *7b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 6 .... *ca. 15 points*
hver af opgaverne *3—5* .... ca. 10 points
opgave *7* .... ca. 25 points

1. Funktionerne f og g er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + 3\,, \qquad x \in \mathsf{R}$$
$$g(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + x - 3\,, \qquad x \in \mathsf{R}\,.$$

Tegn i samme koordinatsystem graferne for funktionerne f og g.

Løs, gerne ved hjælp af graferne, hver af ulighederne

1) $f(x) < g(x)$.

2) $f(x) < |g(x)|$.

2. I en orienteret plan er givet en egentlig vektor a. Om firkant $ABCD$ gælder, at

$$\overrightarrow{AB} = 2a\,, \qquad \overrightarrow{BC} = \hat{a}\,, \qquad \overrightarrow{CD} = \hat{a} - a\,.$$

Beregn vinklerne i firkanten.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}\,.$$

Bestem $f'(2)$.

Bestem en ligning for den tangent til grafen for f, hvis røringspunkt har førstekoordinaten 2.

VEND!

4. En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 122 og spredning 10.

Bestem sandsynligheden for, at X tilhører intervallet $[120\,;130]$.

5. Beregn integralet

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx \,.$$

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16.$$

Løs ligningen

$$f(x) = f(2).$$

Løs ligningen

$$f(x) = f(2x).$$

7a. I et selskab deltager 6 kvinder, 4 mænd og 5 børn. Ved lodtrækning skal udtages et hold bestående af 3 deltagere.

Bestem sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

A: Holdet kommer til at bestå af 3 kvinder.

B: Holdet kommer til at bestå af én mand, én kvinde og ét barn.

C: Ingen børn kommer med på holdet.

D: Der kommer mindst én mand med på holdet.

Bestem sandsynligheden for hændelsen C under forudsætning af hændelsen D.

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen for f.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1977

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—5* .... ca. 15 points
opgave *6* .... ca. 25 points

1. I et koordinatsystem er en linje givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 7 + 3t \\ y &= -6 + 4t \end{aligned} \quad , \qquad t \in \mathrm{R}\,.$$

Beregn afstanden fra punktet $P(2,4)$ til linjen.

2. Af et sædvanligt spil kort tænkes på tilfældig måde udtrukket fire kort. Beregn sandsynligheden for, at der blandt de udtrukne kort vil være flere røde end sorte.

Resultatet ønskes angivet med 3 decimaler.

3. I et koordinatsystem har en trekant T vinkelspidserne $A(3,3)$, $B(9,1)$ og $C(x,y)$.

Tegn punktmængden bestemt ved

$$\{\,(x,y) \mid T \text{ har arealet } 10\,\}.$$

4. Løs for $0° < v < 180°$ uligheden

$$2 \operatorname{tg} v - 1 > \cot v\,.$$

VEND!

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2+3}} , \qquad x \in \mathrm{R} .$$

Bestem en ligning for den tangent til grafen for f, hvis røringspunkt har førstekoordinaten 1.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & , \quad |x| \geqq 1 \\ 2(|x|-1) & , \quad |x| < 1 . \end{cases}$$

Undersøg, om f er differentiabel i tallet 1.

Skitsér i et koordinatsystem grafen for f.

Beregn arealet af punktmængden fastlagt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 4\} .$$

6b. I et koordinatsystem er der givet punkterne $A(0,1)$ og $B(0,4)$.

For ethvert positivt tal t betegner P_t punktet med koordinatsættet $(t,0)$.

Bestem t, således at vinkel AP_tB er størst mulig.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1977

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Af opgaverne *5a* og *5b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 15 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 20 points
opgave *5*	ca. 30 points

---

1. I et koordinatsystem er givet en linje med ligningen

$$3x - 4y - 4 = 0 .$$

Linjen er affinitetsakse for en ret affinitet f med forvandlingstal k. Punktet $P(1,6)$ afbildes ved f i et punkt Q.

Bestem tallet k, således at Q ligger på koordinatsystemets andenakse.

2. I et koordinatsystem er givet parablen med ligningen $y = x^2$. Med P betegnes et punkt på parablen i første kvadrant. Parabeltangenten i P, parablen og førsteaksen begrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn koordinatsættet til P, når dette areal er lig med 18.

3. I et sandsynlighedsfelt (U,P) er givet to hændelser A og B, for hvilke der gælder

$$P(A) = 0{,}05\,, \quad P(B) = 0{,}06 \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 0{,}08.$$

Beregn $P(A \cap B)$, $P(\complement A \cap B)$, $P(A \cap \complement B)$ og $P(\complement A \cap \complement B)$.

VEND!

4. En funktion f er for naturlige tal n fastlagt ved

$$f(1) = 3 \qquad \text{og}$$

$$f(n+1) = 4 - \frac{4}{f(n)}.$$

Bestem $f(2)$, $f(3)$ og $f(4)$.

Vis, at det for ethvert naturligt tal n gælder, at

$$f(n) = \frac{2n+4}{n+1}.$$

5a. Hvert efterår gennemføres i Danmark en større undersøgelse af bilernes lygter. Det skønnedes i efteråret 1976, at 70% af alle biler havde lygtefejl.

I det følgende antages derfor, at sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt bil har lygtefejl, er 0,7.

Hver dag i undersøgelsesperioden skal en mekaniker undersøge 50 biler for lygtefejl. Beregn middelværdi og spredning for den stokastiske variabel, der angiver antallet pr. dag af biler med lygtefejl.

Beregn for en bestemt dag sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

A: Antallet af biler med lygtefejl er højst 35.

B: Antallet af biler med lygtefejl er netop 35.

C: Antallet af biler med lygtefejl er mindst 32.

D: Antallet af biler med lygtefejl er mindst 32 og højst 38.

Bestem sandsynligheden for hændelsen A under forudsætning af hændelsen D.

5b. En funktion f er den løsning til differentialligningen

$$f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x},$$

hvis graf indeholder punktet $P(1,2)$.

Angiv en ligning for grafens tangent i P.

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \qquad x > 0.$$

Vis, at

$$g'(x) = \frac{1}{x},$$

og benyt dette resultat til at bestemme $f(x)$.

STUDENTEREKSAMEN SEPTEMBER 1977

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. Blandt de 13 sparkort af et sædvanligt spil kort skal udtages 4 kort.

Beregn antallet af måder, hvorpå dette kan gøres, når kongen skal udtages, men damen ikke må udtages.

2. Løs ligningen

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x .$$

3. I et koordinatsystem er der for ethvert tal t givet tre punkter $A_t\,(-1,t-1)$, $B_t\,(t,t-3)$ og $C_t\,(t-6,3)$.

Bestem de tal t, for hvilke de tre punkter A_t, B_t og C_t er vinkelspidser i en trekant med arealet 1.

4. Beregn integralet

$$\int_1^2 2x \ln(x^2)\,dx .$$

VEND!

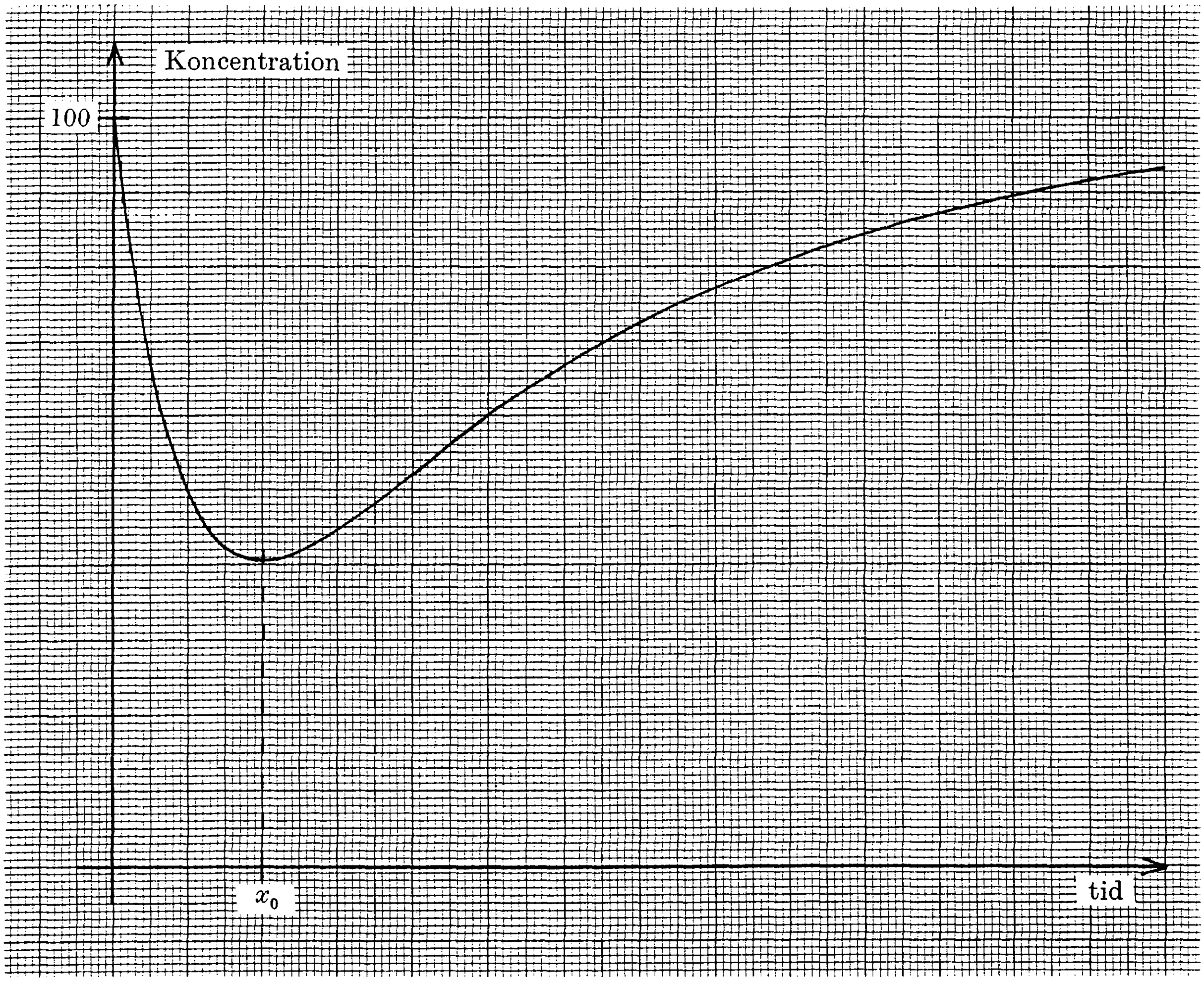
5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x + 4, \qquad x \in \mathrm{R}.$$

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf har linjen med ligningen $y = 3$ som tangent.

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf har linjen med ligningen $y = x + 3$ som tangent.

6a. Hos raske mennesker er koncentrationen af blodsukker ca. 100 mg pr. 100 ml blod. Ved indsprøjtning af en bestemt dosis af stoffet insulin ændres koncentrationen af blodsukker. Variationen af koncentrationen fremgår af nedenstående figur.



Koncentrationen målt i mg pr. 100 ml er en funktion af den tid, målt i timer, der er forløbet efter indsprøjtningen. Denne funktion betegnes i det følgende f. Det antages, at

$$f(x) = 100 + 111(e^{-4x} - e^{-0,8x}).$$

Beregn det tidspunkt x_0 (2 decimaler), til hvilket blodsukkerkoncentrationen er mindst.

Beregn $f(x_0)$.

I tiden efter x_0 vokser blodsukkerkoncentrationen. Den fart, hvormed blodsukkerkoncentrationen vokser til tidspunktet x, er $f'(x)$.

Bestem det tidspunkt x_1, til hvilket blodsukkerkoncentrationen vokser hurtigst.

6b. En æske indeholder 6 sedler.

1 seddel er mærket med tallet 10,

2 sedler er mærket med tallet 5, og

3 sedler er mærket med tallet 4.

Et eksperiment består i på tilfældig måde og samtidigt at trække 2 sedler fra æsken. Idet X er den stokastiske variabel, der angiver summen af de to tal, hvormed de udtrukne sedler er mærket, skal man angive middelværdi og spredning af X.

Sedlerne tænkes nu fordelt på 2 æsker, således at den ene æske indeholder

1 seddel mærket med tallet 10,

1 seddel mærket med tallet 5 og

1 seddel mærket med tallet 4,

medens den anden æske indeholder

1 seddel mærket med tallet 5 og

2 sedler mærket med tallet 4.

Et eksperiment består i på tilfældig måde at vælge en af de to æsker og fra denne på tilfældig måde og samtidigt at trække 2 sedler. Idet Y er den stokastiske variabel, der angiver summen af de to tal, hvormed de udtrukne sedler er mærket, skal man angive middelværdien af Y.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1978

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 9. maj 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{3x - 2}\ , \quad x \geqq \frac{2}{3}\ .$$

En ret linje l er givet ved ligningen

$$3x - 4y + 2 = 0\ .$$

Gør rede for, at grafen for f i punktet med førstekoordinaten 2 har linjen l som tangent.

2. Løs med hensyn til x ligningen

$$\frac{5\,e^x + 8}{3\,e^x} = 5\,e^x - 3\ .$$

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 + x + 3\ .$$

Gør rede for, at funktionen f har en omvendt (invers) funktion f^{-1}.

Bestem tallene $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(0)$ og $(f^{-1})'(0)$.

VEND!

4. I et koordinatsystem er en parabel givet ved ligningen

$$y = a(x^2 - 1),$$

hvor a er et positivt tal.

Parablen og førsteaksen afgrænser en punktmængde M, der har et areal. Når M roteres om førsteaksen, fremkommer et omdrejningslegeme med volumen 3π.

Bestem tallet a.

5. Løs differentialligningen

$$y' = -\sqrt{y}, \qquad y > 0.$$

Tegn den integralkurve, der går gennem punktet med koordinatsættet (0,9).

6a. På en virksomhed kontrolleres hver enkelt dags produktion ved udtagelse af en stikprøve på 10 enheder. Når der i en sådan stikprøve er flere end tre defekte enheder, kontrolleres samtlige enheder i dagens produktion, ellers ikke.

Med p betegnes den ubekendte sandsynlighed for, at en tilfældigt valgt enhed i en dags produktion er defekt. Funktionen g er fastlagt ved, at $g(p)$ er sandsynligheden for, at samtlige enheder i den pågældende dags produktion kontrolleres.

Bestem $g(0{,}05)$ og $g(0{,}10)$.

Tegn på grundlag af et passende antal støttepunkter grafen for funktionen g.

Bestem ved hjælp af grafen for g de værdier af p, for hvilke det gælder, at sandsynligheden for, at samtlige enheder i dagens produktion kontrolleres, er mindre end 0,1.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3-x}.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Grafen for f, andenaksen og linjen med ligningen $y = -\frac{4}{5}$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Bestem dette areal.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1978

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 10. maj 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. Beregn

$$\int_{-1}^{2} \frac{3x+3}{x^2+2x+2}\,dx\,.$$

2. For ethvert tal t er der i et koordinatsystem givet to vektorer

$$\boldsymbol{a}\ (3,2) \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{b}\ (-1,t)\,.$$

Bestem de tal t, for hvilke

$$|\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}|\,.$$

3. I et koordinatsystem er en cirkel C givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0\,.$$

Desuden er der givet tre afbildninger d, s og f af planen på sig selv:

d er drejningen på $90°$ i positiv omløbsretning om koordinatsystemets begyndelsespunkt,

s er spejlingen i linjen med ligningen $y = x$,

f er den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og forvandlingstallet 2.

Angiv art og beliggenhed af punktmængden $(f \circ s \circ d)\,(C)$, og bestem en ligning for denne punktmængde.

VEND!

4. For ethvert positivt tal a er

$$\text{tg}\, x - \sin x = a$$

en ligning i x.

Vis, at enhver sådan ligning har netop én løsning, der tilhører intervallet $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

5. Når en tennisspiller server, det vil sige sætter en bold i spil, har denne spiller to bolde, én til førsteserven og én til andenserven. Andenserven kommer kun i brug, hvis førsteserven er fejl. Når begge server er fejl, kaldes det en *dobbeltfejl* i servesituationen.

Om en spiller A antager man, at 50 % af førsteserverne er fejl, medens kun 10 % af andenserverne er fejl.

1) Bestem sandsynligheden for, at spilleren A i en servesituation vil lave dobbeltfejl.

2) Bestem sandsynligheden for, at spilleren A vil lave mindst 5 dobbeltfejl i 50 servesituationer.

3) Bestem sandsynligheden for, at spilleren A vil lave netop én dobbeltfejl i 50 servesituationer.

6a. For ethvert tal a er en funktion f_a givet ved

$$f_a(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{2x - 1} \quad , \quad x \neq \tfrac{1}{2} .$$

1) Bestem den skrå asymptote til grafen for f_8 ,og bestem denne funktions lokale ekstrema.

2) Bestem a således, at linjen med ligningen

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

bliver skrå asymptote til grafen for f_a.

3) Bestem a således, at f_a får lokalt minimum i tallet 1.

6b. En funktion f: R $\curvearrowright$ R er bestemt ved $f(x) = x + 1$.

I mængden af reelle tal er en komposition $*$ fastlagt ved, at funktionen f er en isomorfi af (R, $\cdot$) på (R, $*$).

1) Bestem det neutrale element i (R, $*$).

2) Bestem de tre tal $0 * 0$, $0 * 2$ og $0 * 3$.

3) Vis, at for ethvert $a \in$ R gælder $a * 1 = 1$.

4) Løs ligningen $a * 6 = 2$.

5) Løs ligningen $a * (2a) = a + 2$.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1978

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 9. maj 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne 6*a* og 6*b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 5\ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet med koordinatsættet (2,1).

2. I et sandsynlighedsfelt med sandsynlighedsfunktion P er givet to uafhængige hændelser A og B. Der gælder, at

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{3}\ .$$

Bestem $P(B)$.

3. I en firkant $ABCD$ er siden BC parallel med siden AD, og $|AB| = |BC| = |CD| = 4{,}1$. Firkantens omkreds er 21,4.

Bestem gradtallet for hver af firkantens vinkler.

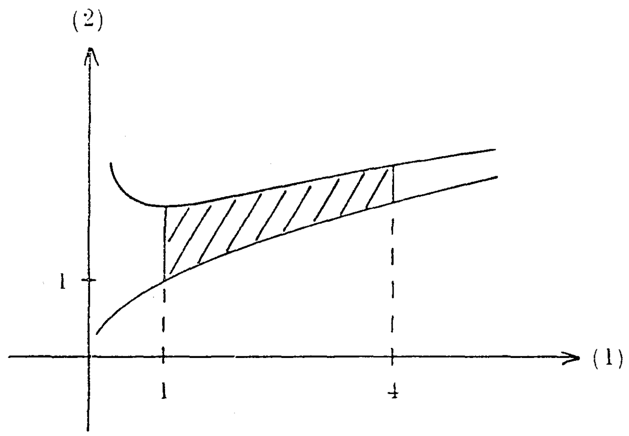
4. Løs uligheden

$$\sqrt{2 - x} + x > 0\ .$$

VEND!

5. På nedenstående figur er skraveret en punktmængde M, der begrænses af linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = 4$ samt graferne for funktionerne f og g, der er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x} .$$



Beregn arealet af M.

Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres om førsteaksen.

6a. Om en bestemt type elektriske pærer oplyses det fra producenten, at pærernes brændetid er normalfordelt med middelværdien 110 timer og med spredningen 10 timer.

Hvor mange procent af produktionen kan efter denne oplysning påregnes at have en brændetid mellem 100 og 120 timer?

Ved et stort forbrug af disse pærer viser det sig imidlertid, at 90% af pærerne har en brændetid mellem 100 og 120 timer.

Bestem på denne baggrund, idet det stadig antages, at brændetiden er normalfordelt med middelværdien 110 timer, en revideret værdi af spredningen. (Helt antal timer.)

Hvor mange procent af pærerne kan med denne værdi af spredningen påregnes at have en brændetid over 105 timer?

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x} , \quad x \in \mathrm{R} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen for f.

Grafen for f afgrænser i fjerde kvadrant sammen med koordinatakserne en punktmængde, som har et areal.

Beregn dette areal.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST 1978

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Tirsdag den 22. august 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 10 points
hver af opgaverne *2—5*	ca. 15 points
opgave *6*	ca. 30 points

1. Nogle elever skal i løbet af en periode i et bestemt fag læse tre hovedværker. De tre værker skal vælges blandt 10 mulige.

Bestem antallet af muligheder, som en person har for at vælge de tre hovedværker.

To elever vælger uafhængigt af hinanden de tre hovedværker. Bestem antallet af mulige valg, hvorved de ikke vælger noget hovedværk fælles.

2. Bestem et andengradspolynomium, som er løsning til differentialligningen

$$(y')^2 + xy' - y = 0 .$$

3. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{for} \quad -1 < x \leqq 1 \\ e - 1 & \text{for} \quad 1 < x < 2 . \end{cases}$$

Bestem til funktionen f den stamfunktion F, for hvilken $F(0) = 0$.

4. Ved en multiplikation om et punkt med positiv multiplikationsfaktor k efterfulgt af en multiplikation om samme punkt med multiplikationsfaktor $2k - 1$ afbildes en punktmængde med areal 1 på en punktmængde med areal 9.

Bestem k.

VEND!

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x \in \left]-\tfrac{1}{2}\,;1\right[.$$

Gør rede for, at f har en omvendt (invers) funktion, og angiv definitionsmængden for denne.

6a. En lastbil skal køre 300 km på en motorvej med konstant fart x km/time. Dieselolie til bilen koster 1,50 kr. pr. liter, og bilen bruger $(2 + \frac{x^2}{300})$ liter pr. time. Chaufførens timeløn er 40 kr.

Bestem på grundlag af disse oplysninger den mest økonomiske fart.

Bestem ved denne fart de samlede omkostninger (minimalomkostningerne).

Chaufførens timeløn tænkes hævet med 25 %.

Bestem under denne antagelse den mest økonomiske fart, og angiv stigningen af minimalomkostningerne udtrykt i procent.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{(x+1)^2\,(x-2)}{x^2} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold. Tegn grafen for f.

Beregn arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen for f, førsteaksen og linjen med ligningen $x = 4$.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST 1978

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Onsdag den 23. august 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne *5a* og *5b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave *1*	ca. 15 points
hver af opgaverne *2—4*	ca. 20 points
opgave *5*	ca. 25 points

---

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x - 4} + \frac{1}{3^x + 1}.$$

Bestem $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2. Løs med hensyn til x ligningen

$$\log 5x + \log(-x^2 + 2x + 1) = 1 .$$

3. I et koordinatsystem er givet linjerne l og m med ligningerne henholdsvis $y = 2x$ og $y = \frac{1}{2}x$. Bestem en ligning for én af de fire cirkler, der har radius $\sqrt{5}$ og har begge linjerne l og m som tangenter.

VEND!

4. En gymnasiast på den samfunds-matematiske gren skal til den mundtlige del af studentereksamen det pågældende år eksamineres i fire af de otte fag DANSK, FRANSK, HISTORIE, BIOLOGI, SAMFUNDSFAG, GEOGRAFI, MATEMATIK og FYSIK.

De fire eksamensfag tænkes udvalgt på tilfældig måde.

Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser

A: matematik er blandt de fire eksamensfag.

B: både matematik og samfundsfag er blandt de fire eksamensfag.

C: hverken dansk eller fransk er blandt de fire eksamensfag.

Beregn den betingede sandsynlighed for hændelsen B under forudsætning af hændelsen C.

5a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{2x} \,, \quad x \in \mathrm{R} \,.$$

For ethvert tal t betegner P_t punktet med koordinatsættet $(t, f(t))$. Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet P_t.

For ethvert negativt tal t begrænser linjen med ligningen $x = t$, tangenten i punktet P_t og koordinatakserne en firkant.

Bestem det negative tal t_0, for hvilket arealet af denne firkant er størst.

Bestem arealet af den punktmængde, der i anden kvadrant begrænses af grafen for f, tangenten i P_{t_0} og andenaksen.

5b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = |x - 1|\,(x - 3)^2 \,, \quad x \in [0\,;\,4] \,.$$

Gør rede for funktionens monotoniforhold.

Tegn funktionens graf.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{\, (x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x) \,\} \,.$$

STUDENTEREKSAMEN AUGUST 1978

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 22. august 1978 kl. 9.00 - 13.00

Af opgaverne *6a* og *6b* må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne *1—2*	ca. 10 points
hver af opgaverne *3—4*	ca. 15 points
opgave *5*	ca. 20 points
opgave *6*	ca. 30 points

---

1. Løs for $x \in [0\,;\,\pi]$ ligningen

$$\cos 2x = 0{,}4\,.$$

2. Beregn

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx\,.$$

3. Af et sædvanligt spil kort tænkes på tilfældig måde og samtidigt udtrukket fire kort.

Beregn sandsynligheden for, at netop to af de udtrukne kort er røde.

4. Om en eksponentialfunktion $f(x) = a^x$ oplyses, at

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\,.$$

Bestem grundtallet a.

Bestem en ligning for tangenten til funktionens graf i punktet med koordinatsættet $(2, f(2))$.

VEND!

5. En stokastisk variabel X er knyttet til et sandsynlighedsfelt med sandsynlighedsfunktion P. Sandsynlighedsfordelingen for X er givet ved følgende tabel:

t	-2	-1	1	4	5
$P(X = t)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Bestem middelværdien og spredningen for X.

En funktion F er givet ved

$$F(t) = P(X \leqq t), \qquad t \in \mathsf{R}.$$

Tegn grafen for F.

6a. For ethvert tal a er givet ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + ay &= 3 \\ ax + 4y &= 6. \end{aligned}$$

Løs ligningssystemet for $a = -1$.

Løs ligningssystemet for $a = 3$.

Bestem de tal a, for hvilke ligningssystemet har mindst én løsning (x,y), hvor $x > 2$ og $y > 0$.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}, \qquad x \in \mathsf{R}.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{ (x,y) \mid x \geqq 0 \ \wedge \ f(x) \leqq y \leqq 0 \}.$$

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1979

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 15. maj 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2-5	ca. 15 points
opgave 6	ca. 30 points

1. Løs for $x \in [0; 2\pi]$ uligheden

$$|\sin x - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{2}{3} .$$

2. Bestem tallet

$$\int_1^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx .$$

3. En bestemt sygdom antages at forekomme hos 1% af befolkningen. Til diagnose af denne sygdom har man en prøve, som giver positiv reaktion i 90% af de tilfælde, hvor patienten lider af sygdommen, men desværre også positiv reaktion i 5% af de tilfælde, hvor patienten ikke lider af sygdommen.

   En patient underkastes den nævnte prøve, og den giver ikke positiv reaktion.

   Hvor stor er herefter sandsynligheden for, at patienten lider af sygdommen?

4. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

den løsning $y = f(x)$, for hvilken $f(1) = 4$.

VEND!

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(e^{2x} + e^x), \qquad x \in R .$$

Bevis, at linjerne med ligningerne henholdsvis $y = x$ og $y = 2x$ er asymptoter til grafen for f.

6a. For ethvert reelt tal a fremstiller ligningen

$$(1 - a^2)x + 2ay = 1 + a^2$$

en ret linje l_a.

Bestem de tal a, for hvilke punktet med koordinatsættet $(1, 1)$ ligger på l_a.

Vis, at punktet med koordinatsættet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ikke ligger på nogen linje l_a.

Om et punkt med koordinatsættet $(p, q) \neq (-1, 0)$ oplyses, at det ikke ligger på nogen linje l_a. Gør rede for, at $p^2 + q^2 < 1$, og giv en geometrisk fortolkning af dette.

6b. Til financiering af et byggeri skal der lånes et beløb på 200000 kr. Beløbet kan tilvejebringes ved at optage lån af en eller flere af følgende tre typer:

A: den årlige ydelse er 16% af lånet; i det første år er 12% rente og 4% afdrag,

B: den årlige ydelse er 15% af lånet; i det første år er 10% rente og 5% afdrag,

C: den årlige ydelse er 17% af lånet; i det første år er 15% rente og 2% afdrag.

Der kan højst lånes 125000 kr. af type B. Det første år kan låntageren i samlede ydelser maksimalt betale 31000 kr.

Hvorledes skal lånet sammensættes, når den del af det første års ydelser, der er afdrag, skal være så lille som mulig?

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1979

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 16. maj 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2-4	ca. 15 points
opgave 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. I et koordinatsystem har en trekant vinkelspidserne $A(-11,0)$, $B(11,0)$ og $C(0,19)$. Ved en ret affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og med positivt forvandlingstal afbildes trekant ABC i en ligesidet trekant.

   Bestem forvandlingstallet (3 dec.).

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = |x-2|-1, \quad x \in \mathrm{R}.$$

   Tegn grafen for f.

   Løs ligningen

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

   (En argumentation ud fra den tegnede graf vil være tilstrækkelig.)

3. Et eksperiment består i at kaste en symmetrisk mønt, indtil den viser krone eller for fjerde gang viser plat. Antallet af kast i eksperimentet er en stokastisk variabel X.

   Beregn for $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ sandsynligheden $P(X=n)$.

   Beregn middelværdien for X.

VEND!

4. En stofrest, der er 90 cm bred og 120 cm lang, skal bruges til en såkaldt rundskåren nederdel til en pige. Der skal udklippes det størst mulige cirkeludsnit med radius 55 cm.

Beregn den brøkdel, som cirkeludsnittet udgør af den tilsvarende cirkel.

5. I et koordinatsystem har en ellipse E ligningen

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1 ,$$

og en hyperbel H har ligningen

$$x^2-\frac{y^2}{3} = 1 .$$

Bestem koordinatsættet til det skæringspunkt P mellem E og H, der ligger i første kvadrant.

For såvel E som H gælder, at den del, der er beliggende i første kvadrant, er graf for en funktion. Angiv en regneforskrift for hver af disse to funktioner.

Vis, at de to grafer i punktet P har tangenter, der står vinkelret på hinanden.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3+5}{4x+4}, \quad x \neq -1 .$$

Undersøg f og dens graf med henblik på nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Beregn arealet af den punktmængde, der er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 3 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

6b. En avis har i et bestemt område en markedsandel på 0,3. Avisens ledelse vil gerne øge markedsandelen og starter derfor en salgskampagne. Af erfaring ved man, at ændringer i markedsandelen afhænger såvel af den økonomiske indsats i kampagnen som af den endnu ikke erobrede markedsandel.

Idet y betegner markedsandelen, og x angiver det antal millioner kroner, der ofres på kampagnen, antages det, at

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}2\,x(1-y) .$$

Hvor mange penge må man regne med at skulle bruge for at få markedsandelen op over 0,5?

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1979

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 15. maj 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
hver af opgaverne 3-4	ca. 15 points
opgave 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 30 points

1. I en æske chokolade er der 12 stykker fyldt chokolade, der ser ens ud. De 5 stykker er med marcipanfyld og resten med nougatfyld.

   Bestem sandsynligheden for, at en person kommer til at smage begge slags fyld, når vedkommende på tilfældig måde tager 3 stykker fra æsken og spiser dem.

2. I et koordinatsystem er for ethvert tal t givet de egentlige vektorer $\boldsymbol{a}(\cos t, \sin t)$ og $\boldsymbol{b}(1, \sin t)$.

   Bestem de tal $t \in [-\pi;\pi]$, for hvilke $\boldsymbol{a}$ står vinkelret på $\boldsymbol{b}$.

3. Bestem tallet a, således at

$$\int_3^9 \left(\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt{x}}\right) dx = 12 .$$

4. Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 3x + 6}{x^2 - 3x + 2} .$$

   Vis, at grafen for f har to asymptoter, og bestem en ligning for hver af disse.

VEND!

5. Om en funktion f oplyses, at der findes to positive tal a og b, således at

$$f(x) = a \cdot b^x, \qquad x \in \mathrm{R}\ .$$

Endvidere oplyses, at $f(2)=5$ og $f(5)=10$.

Bestem tallene a og b.

Løs ligningen $f(x)=80$.

Løs ligningen $f'(x)=80$.

6a. En importør af et bilmærke har om en bestemt model opdaget, at af den seneste årgang har

6% fejl ved styretøjet,
5% fejl ved bremsesystemet og
2% begge de nævnte fejl.

Der tænkes på tilfældig måde valgt en bil af denne model og årgang.

1) Bestem sandsynligheden for, at den valgte bil ikke har nogen af de nævnte fejl.

2) Bestem sandsynligheden for, at den valgte bil har fejl ved styretøjet, men ikke fejl ved bremsesystemet.

Når en bil undersøges, undersøger man først styretøjet, dernæst bremsesystemet.

3) Antag, at den valgte bil har fejl ved styretøjet. Bestem da sandsynligheden for, at den ikke har fejl ved bremsesystemet.

Importøren påtænker at hjemtage 12 biler af denne model og årgang.

4) Bestem sandsynligheden for, at mindst 9 af disse biler ikke vil have fejl ved bremsesystemet.

6b. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad x \in \mathrm{R}\ .$$

Undersøg funktionen f med hensyn til nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Grafen og førsteaksen afgrænser en punktmængde, som har et areal.
Beregn dette.

Løs ligningen $f(x)=1$.

Angiv for ethvert reelt tal a antallet af løsninger til ligningen $f(x)=a$.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1979

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 28. august 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun èn afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
opgave 3	ca. 15 points
hver af opgaverne 4-5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. Bestem det førstegradspolynomium, der er løsning til differentialligningen

$$y' + 2y = -6x \, .$$

2. I et koordinatsystem er en punktmængde givet ved

$$\{(x,y) \mid x - y > 2 \wedge x^2 - y^2 > 4\} \, .$$

Angiv ved en figur punktmængdens beliggenhed.

3. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 &= 13, \\ (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 &= 7 \quad \text{og} \\ (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2 &= 28 \, .\end{aligned}$$

Bestem længderne af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ samt gradtallet for vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

4. Funktionerne f og g er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}, \qquad x \neq 1$$

og

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x, \qquad x \in \mathrm{R} \, .$$

Vis, at grafen for g er asymptote til grafen for f.
Løs uligheden

$$|f(x) - g(x)| < \tfrac{1}{9} \, .$$

VEND!

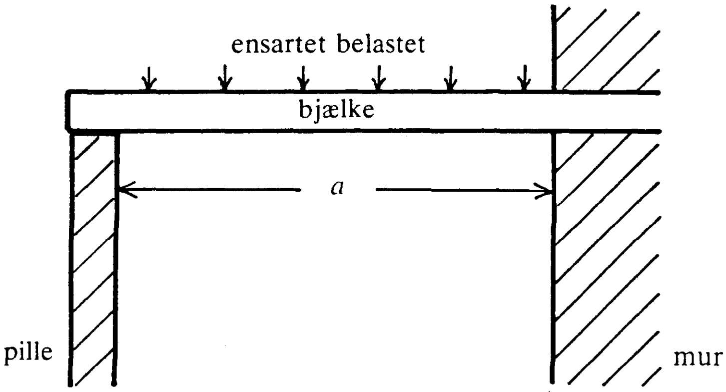
5. I et koordinatsystem er en punktmængde M bestemt ved

$$\{(x, y) \mid |y| \leqq 2\sqrt{1-|x|}\}.$$

Tegn M.

Beregn arealet af M.

6a. En vandret liggende bjælke er i den ene ende fastholdt ved indmuring, medens den i den anden ende kun er understøttet af en pille. (Se figur.)



Bjælkens frie længde fra pillen til muren kaldes a.

Belastes bjælken ensartet i hele sin frie længde, kan den lodrette nedbøjning i afstanden x fra pillen beskrives ved

$$f(x) = k \cdot a^4 \cdot \left(\frac{x}{a} - 3\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{a}\right)^4\right),$$

hvor k er en positiv konstant og $x \in [0; a]$.

Vis, at ifølge denne model er bjælken vandret ved indmuringsstedet.

Bestem den afstand fra pillen, hvor nedbøjningen er maksimal.

6b. For enhver værdi af a er

$$p_a(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + a$$

et polynomium i x.

Undersøg p_a med hensyn til monotoniforhold og beregn de lokale ekstrema.

Skitsér graferne for p_0 og p_3.

En funktion f er bestemt ved, at for ethvert reelt tal a er $f(a)$ lig med antallet af nulpunkter for p_a.

Tegn grafen for f.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1979

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 29. august 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
hver af opgaverne 3-4	ca. 15 points
opgave 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 30 points

1. Løs for $x>0$ ligningen

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \ln t\,dt\,.$$

2. Fem mænd, der alle er 43 år gamle, fejrer deres 25 års studenterjubilæum og drøfter udsigterne til at kunne mødes igen ved deres 40 års jubilæum. Sandsynligheden for at dø inden for de næste 15 år er for 43-årige mænd 0,097.

   Hvor stor er sandsynligheden for, at alle fem er i live ved 40 års jubilæet?

   Hvor stor er sandsynligheden for, at netop fire er i live ved 40 års jubilæet?

3. I et koordinatsystem er en kurve bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x = \cos 2t \\ y = 2\cos t \end{matrix}, \quad t\in[0;\pi]\,.$$

   Vis, at kurven er en del af en parabel, og tegn kurven.

VEND!

4. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^{y-x}.$$

Bestem den løsning $y=f(x)$, for hvilken $f(1)=1$.

5. I planen er givet et koordinatsystem. En ret affinitet f med forvandlingstallet 2 afbilder punktet $P(-2,-4)$ i punktet $Q(6,1)$.

Bestem en ligning for affinitetsaksen.

En ret affinitet g har samme affinitetsakse som f og afbilder punktet P i et punkt på førsteaksen.

Bestem koordinatsættet til punktet $g(Q)$.

6a. En funktion f er bestemt ved

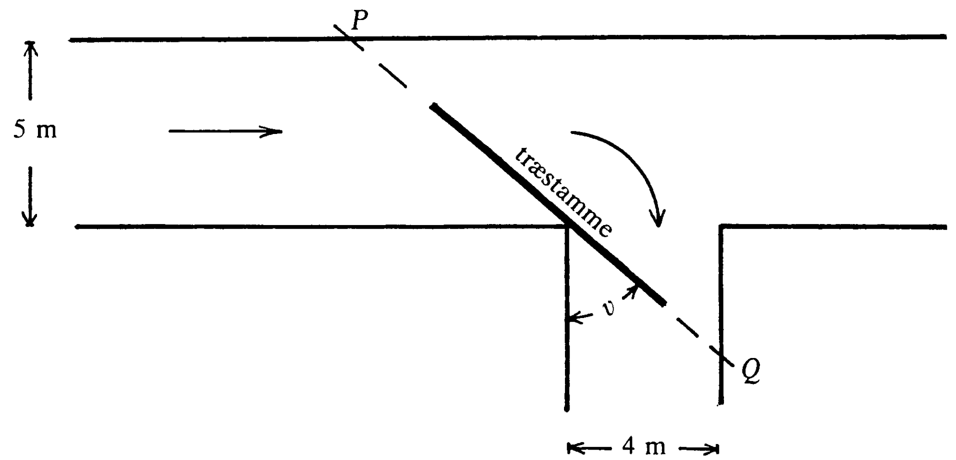
$$f(x) = 8\frac{x^2-1}{x^4+8}, \qquad x \in \mathrm{R}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Løs ligningen $f(x)=\frac{2}{3}$.

6b. I et kanalsystem flyder lange træstammer. Hovedkanalen er 5 m bred. Nogle af træstammerne skal dirigeres ind i en sidekanal, der er 4 m bred. Figuren viser kanalsystemet, hvor en træstamme er på vej ind i sidekanalen.



Undersøg, om en 12,5 m lang træstamme kan komme ind i sidekanalen flydende på vandet. Der ses bort fra træstammens tykkelse.

Forslag til løsningsmetode: Undersøg $|PQ|$ som funktion af vinklen v (se figur).

79-8-10

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1979

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 28. august 1979 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2-5	ca. 15 points
opgave 6	ca. 30 points

1. I et koordinatsystem er en parabel givet ved ligningen

$$y = x^2 + ax + b \; .$$

Parablen har i punktet med førstekoordinat 2 tangenten med ligningen $2x - y = 1$.

Bestem tallene a og b.

2. Løs for $x \in [0;\pi]$ hver af ligningerne

1) $\operatorname{tg} x = 0{,}6$. 2) $\operatorname{tg} 2x = 1{,}2$. 3) $\operatorname{tg}^2 x = 0{,}36$.

3. I et koordinatsystem er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 3 = 0 \, ,$$

og en linje bestemt ved ligningen

$$4x - y = 0 \; .$$

Bestem koordinatsættene til skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

VEND!

4. Fra en bestyrelse på fem kvinder og tre mænd skal der vælges et udvalg bestående af fire personer.

Hvor mange muligheder er der for udvalgets sammensætning, hvis der skal være to af hvert køn i udvalget?

I bestyrelsen er der ét ægtepar. Hvor mange muligheder er der for udvalgets sammensætning, hvis ægtefællerne ikke begge må være medlemmer af udvalget?

5. Tegn i et koordinatsystem graferne for funktionerne f og g, der er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{2x}\ .$$

De to funktioners grafer begrænser en punktmængde, der har et areal. Beregn dette areal.

6a. Fra en sukkerfabrik leveres sukkeret i 1 kg-poser og 2 kg-poser. Vægten af de fyldte poser varierer.

Om 1 kg-poserne antages, at vægten er normalfordelt med middelværdi 1000 gram og spredning 25 gram. Bestem under denne antagelse sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt pose

1) vejer mere end 1025 gram.
2) vejer mellem 980 gram og 1020 gram.

Også 2 kg-posernes vægt antages at være normalfordelt. Her antages middelværdien at være 2000 gram. En række forsøg har vist, at sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt 2 kg-pose vejer mere end 2050 gram, ikke overstiger 10‰.

Giv ud fra disse oplysninger en vurdering af spredningen.

6b. I forbindelse med opstilling af modeller til beskrivelse af fangstudbyttet ved fiskeri, har man for fisk af en bestemt art opstillet en funktion v til beskrivelse af fiskenes gennemsnitsvægt som funktion af deres alder t.
(I denne opgave er enhederne uden betydning.)

I en af disse modeller gælder

$$v(t) = A(1-e^{-kt})^3\ ,$$

hvor A og k er positive konstanter.

Bestem $v(0)$ og $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$.

Hvorledes kunne disse to tal fortolkes i biologisk sammenhæng?

Bestem væksthastigheden v'.

Angiv monotoniforholdene for væksthastigheden, og bestem udtrykt ved k den alder t_0, hvor væksthastigheden er størst mulig.

Angiv $v(t_0)$.

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Tirsdag den 13. maj 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-3	ca. 10 points
hver af opgaverne 4-6	ca. 15 points
opgave 7......................	ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$x+1 < \sqrt{x+3}\,.$$

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-5x+6}, \qquad x \in \mathrm{R} \setminus \{2,3\}.$$

Undersøg, om $f(x)$ har en grænseværdi for henholdsvis x gående mod 1, x gående mod 2 og x gående mod 3.

3. Beregn tallet

$$\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

4. I et koordinatsystem er givet punktet $Q(22,-1)$ og kurven med ligningen $y=\sqrt{x}$. Med P betegnes det punkt på kurven, der har førstekoordinat 9.

Angiv $\overrightarrow{PQ}$ som en sum af to vektorer, hvoraf den ene er parallel med kurvens tangent i P, og den anden er vinkelret på tangenten i P.

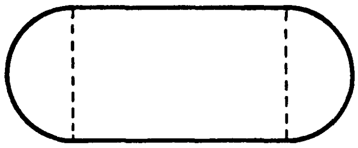
VEND!

5. En forfalsket terning er forsynet med øjentallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Sandsynligheden er $\frac{1}{4}$ for øjentallet 1, mens sandsynligheden er $\frac{1}{6}$ for hvert af øjentallene 2, 3, 4 og 5. Med denne terning tænkes udført seks på hinanden følgende kast.

Beregn sandsynligheden for, at der forekommer

1) netop to seksere.
2) højst to seksere.

6. På et atletikstadion afgrænser en løbebane et område, hvis form fremgår af nedenstående figur. Som figuren viser, er området sammensat af et rektangel og to halvcirkler.



Områdets omkreds er 400 m.
Bestem områdets areal, idet den rektangulære del har størst muligt areal.

7a. Med Z_7 betegnes mængden af restklasser modulo 7, og med G betegnes mængden $\mathsf{Z}_7 \setminus \{(0)_7\}$. Vi betragter den multiplikative gruppe $(G, \cdot)$.

1) Opstil en kompositionstavle for gruppen.

2) Angiv det inverse element til $(4)_7$.

3) Løs for $x \in G$ ligningen

$$(5)_7 \cdot x = (6)_7 .$$

4) For hvilke $a \in G$ har ligningen

$$x \cdot x = a$$

løsninger i G?

5) Undersøg, om ligningen

$$x \cdot x \cdot x = (5)_7$$

har nogen løsning i G.

6) Undersøg, om der i $(G, \cdot)$ findes en undergruppe med tre elementer.

(I besvarelsen af ovenstående spørgsmål er det tilstrækkeligt at betegne elementerne i G med 1, 2, 3, 4, 5 og 6).

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2e^{2x} - 3e^{x} + 1, \qquad x \in \mathsf{R} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Løs ligningen $f(x) = 1$.

Bestem mængden af tal a, for hvilke

$$\int_a^{\ln\frac{3}{2}} (1 - f(x))\, dx < \tfrac{9}{4} .$$

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Onsdag den 14. maj 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
opgave 3	ca. 15 points
hver af opgaverne 4-5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. I et sandsynlighedsfelt (U,P) er givet to hændelser A og B. Det oplyses, at $P(A)=\frac{1}{3}$ og $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$. Bestem $P(B)$ i hvert af følgende tilfælde:

   1) A og B er disjunkte.

   2) A og B er uafhængige.

2. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder

$$|\boldsymbol{a}| = 2, \quad |\boldsymbol{b}| = 3 \quad \text{og} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 3\,.$$

   Beregn gradtallet for vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

3. I et koordinatsystem er to punktmængder A og B givet ved ligningerne

$$A\colon\; x^2+y^2+2x-12y+21 = 0$$

$$B\colon\; 4x^2+y^2-16x-12y+36 = 0\,.$$

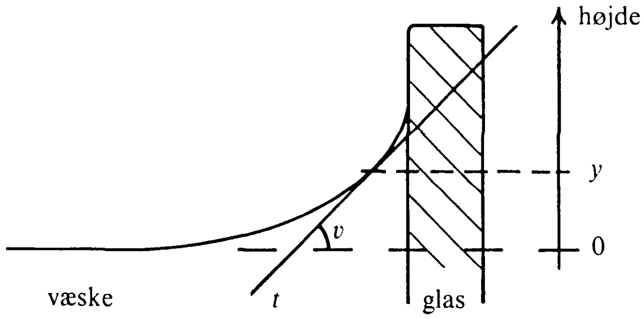
   Tegn de to punktmængder.

   En ret affinitet med negativt forvandlingstal afbilder A på B.

   Bestem affinitetsaksen og forvandlingstallet for denne rette affinitet.

VEND!

4. Langs en plan, lodret glasvæg i et kar vil en væske som f.eks. vand få en krum overflade. Nedenstående figur viser et snit vinkelret på glasvæggen og væskeoverfladen.



Som det fremgår af figuren, danner tangenten t i højden y over den vandrette væskeoverflade en vinkel v med denne.
Det oplyses, at der gælder

$$y \cdot \frac{dy}{dv} = k \cdot \sin v \, ,$$

hvor k er en for væsken karakteristisk konstant.

Bestem y som funktion af v.

For vand gælder det, at væskeoverfladen stort set står lodret helt ude ved glasset, og at $k = 0{,}0763 \text{ cm}^2$.

Bestem den største vandhøjde over den vandrette overflade.

5. For ethvert positivt tal p er en funktion f_p bestemt ved

$$f_p(x) = \frac{e^x}{p + e^x}\, , \qquad x \in \mathrm{R}\, .$$

Bevis, at enhver sådan funktion f_p er voksende.

Beregn integralet

$$I(p) = \int_0^{\ln p} f_p(x)\, dx\, .$$

Bestem $\lim_{p \to \infty} I(p)$.

6a. I begyndelsen af året 1980 deponeres forskellige radioaktive isotoper. Som bekendt aftager mængden af en radioaktiv isotop eksponentielt med tiden.

1) Der deponeres 2,00 g af isotopen Sr-90, der har en halveringstid på 28 år.
Hvor mange gram vil der være tilbage af denne isotop i begyndelsen af år 2000?
I hvilket år vil der være 0,80 g tilbage af det deponerede Sr-90?

2) Ligeledes deponeres et kvantum Ni-63, der har halveringstiden 92 år.
Hvis der i begyndelsen af år 2020 viser sig at være 1,45 g tilbage, hvor mange gram blev der så deponeret i 1980?

3) Endelig deponeres 2,00 g af Pb-210.
Bestem halveringstiden for denne isotop, idet det antages, at der i begyndelsen af år 2022 vil være 0,50 g tilbage.

6b. I et kommunikationssystem sendes udelukkende tegnene 0 og 1, og ethvert afsendt tegn modtages som enten tegnet 0 eller tegnet 1.
Der er sandsynligheden 0,6 for, at et vilkårligt afsendt tegn er tegnet 1.
Der forekommer forstyrrelser i systemet; disse bevirker, at når tegnet 1 afsendes, er sandsynligheden for, at det modtages som tegnet 0, lig med 0,1. Når tegnet 0 afsendes, er sandsynligheden for, at det modtages som tegnet 1, lig med 0,05.

Tegnet 1 modtages. Bestem sandsynligheden for, at det var tegnet 1, der blev afsendt.

Fem gange modtages tegnet 1. Bestem sandsynligheden for, at mindst et af disse tegn var afsendt som tegnet 0.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1980 **80-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 13. maj 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
opgave 5......................	ca. 15 points
hver af opgaverne 3-4	ca. 20 points
opgave 6......................	ca. 25 points

1. I et koordinatsystem er givet tre vektorer

$$\boldsymbol{a}(3,-2), \quad \boldsymbol{b}(1,1) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c}(2,4)\,.$$

Bestem tallene s og t, således at $\boldsymbol{c}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$.

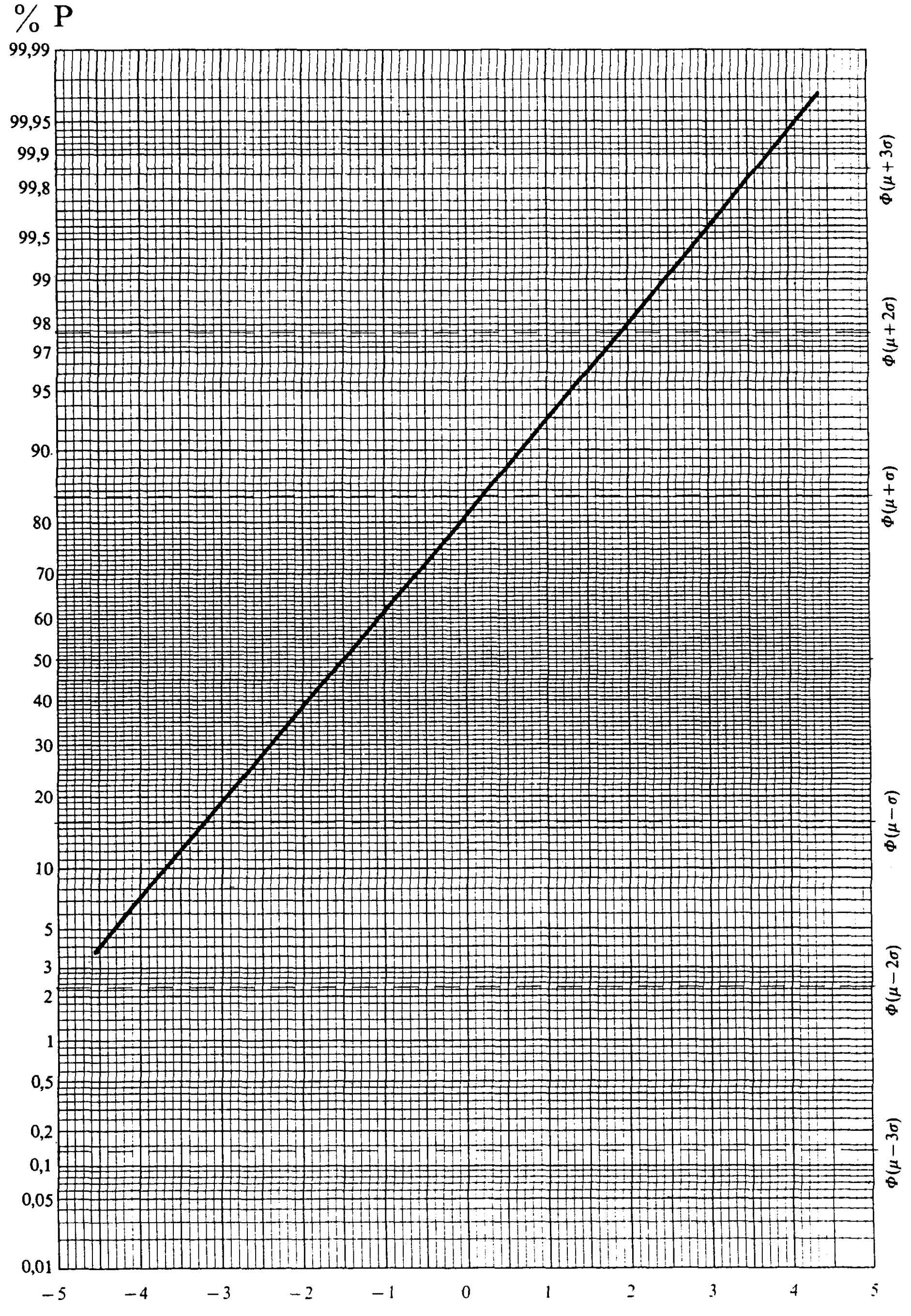
VEND!

2. På nedenstående figur er på normalfordelingspapir indtegnet grafen for fordelingsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem hver af de tre sandsynligheder

$$P(X \leqq 2), \quad P(-3 \leqq X \leqq 1) \quad \text{og} \quad P(X \geqq 3).$$



3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}, \qquad x \in \mathrm{R}\,.$$

Bevis, at tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$ går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Grafen for f, tangenten i P og koordinatsystemets andenakse begrænser en punktmængde, som har et areal.

Beregn dette areal.

4. En skole har et elevråd. Ved et forslag om ændring af vedtægterne for elevrådet vurderes det på forhånd, at 60 % af eleverne går ind for vedtægtsændringen.
Det antages derfor, at der er sandsynligheden 0,6 for, at en tilfældig valgt elev stemmer for forslaget.
Der tænkes afholdt en afstemning om forslaget i en klasse med 25 elever, der alle afgiver deres stemme.

Bestem sandsynligheden for, at

1) højst halvdelen af klassens elever stemmer for forslaget.

2) mindst $\frac{2}{3}$ af klassens elever stemmer for forslaget.

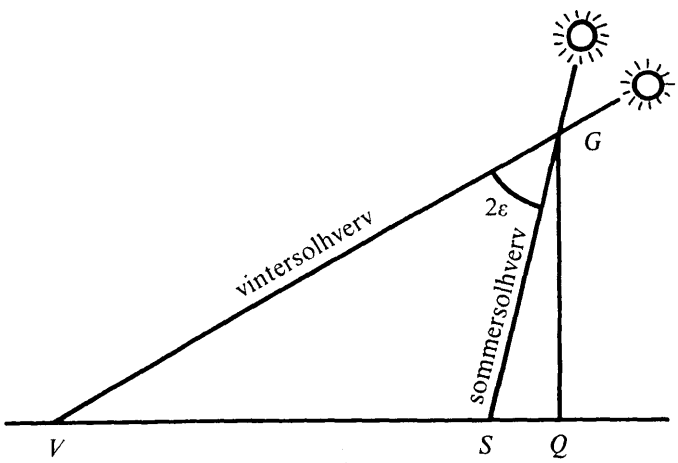
3) mindst $\frac{2}{3}$ af klassens elever stemmer for forslaget under forudsætning af, at man på forhånd ved, at der i klassen er et flertal, der stemmer for forslaget.

5. Et af de ældste astronomiske instrumenter er den såkaldte *gnomon*, der er en stang opstillet vinkelret på en vandret, plan flade. Med dette instrument havde man allerede 400 år f.Kr. bestemt årstidernes længde og ekliptikas hældning. Ekliptikas hældning er vinklen mellem solbanens plan og ækvators plan.

På nedenstående figur betegner QG gnomon, QS gnomons middagsskygge ved sommersolhverv og QV gnomons middagsskygge ved vintersolhverv. Vinklen VGS er da lig med den dobbelte ekliptikahældning.

Beregn ekliptikahældningen ε, idet følgende størrelser tænkes målt:

Gnomons højde: 1,80 m.
Længden af gnomons middagsskygge ved sommersolhverv: 0,43 m.
Længden af gnomons middagsskygge ved vintersolhverv: 3,17 m.



VEND!

6a. En virksomhed fremstiller en vare. Omkostningerne $O(x)$ ved fremstilling af x tons pr. uge af denne vare er givet ved

$$O(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 30 ,$$

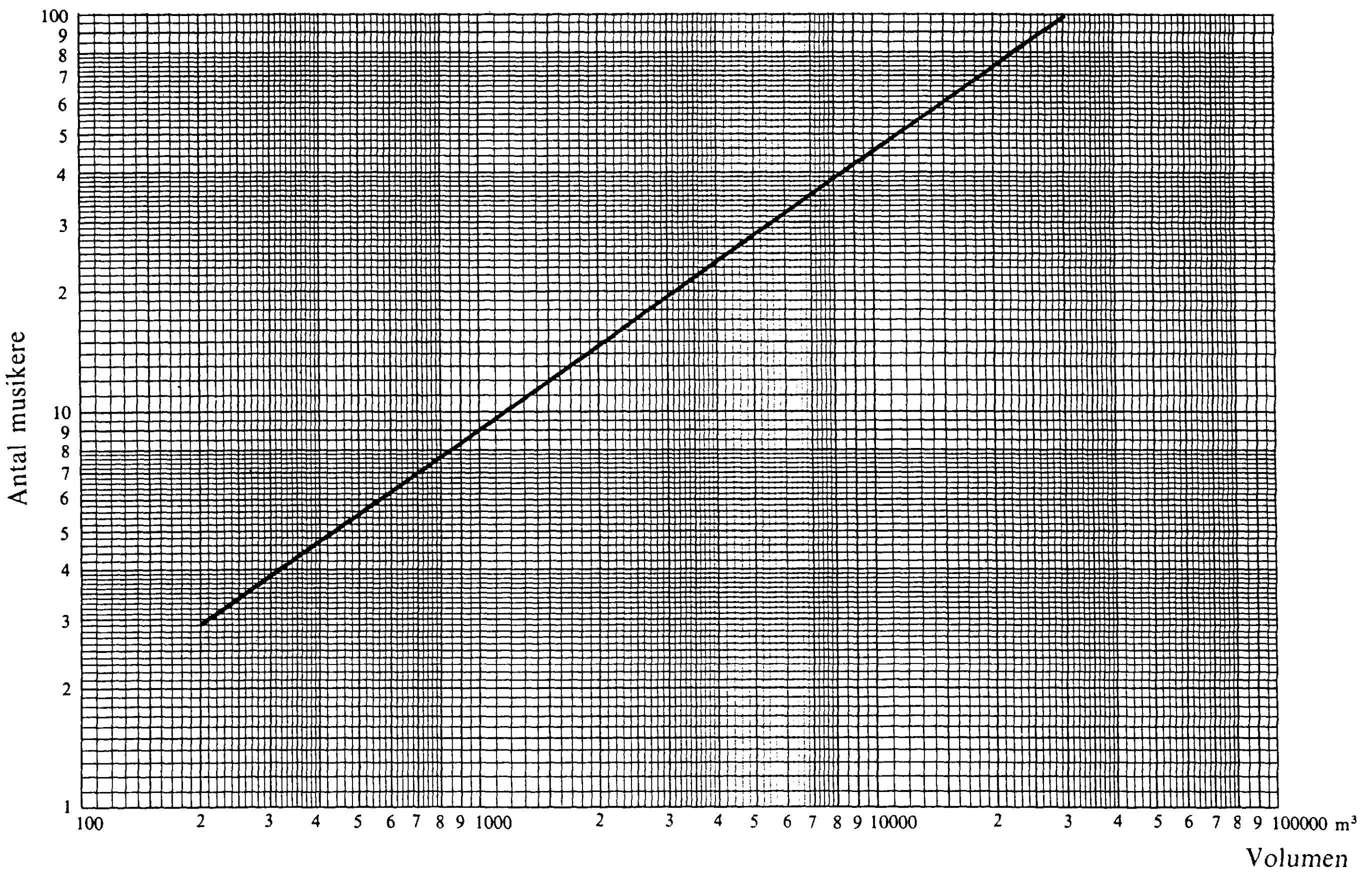
hvor $O(x)$ er udtrykt i en møntenhed, som er underordnet i denne forbindelse.

Gør rede for, at omkostningerne er en voksende funktion af den producerede varemængde.

Den producerede varemængde kan sælges til en fast pris på 308 pr. ton.

Bestem det antal tons, som virksomheden skal fremstille pr. uge, hvis fortjenesten skal være maksimal.

6b. Blandt de mange ting, der spiller en rolle for at opnå god akustik i en koncertsal, er sammenhængen mellem antallet af musikere i det orkester, der spiller i salen, og salens volumen. Nedenstående figur stammer fra Fritz Ingerslevs bog »Akustik« (udgivet i 1949) og viser på dobbeltlogaritmisk papir den sammenhæng, der bør være mellem orkesterstørrelse og koncertsalsvolumen, hvis akustikken skal være god.



Angiv det omtrentlige antal musikere, som det er rimeligt at lade spille i en koncertsal, hvis volumen er 4000 m^3.

Hvor mange gange så stor bør en koncertsal til 40 musikere være som en sal til 30 musikere?

Angiv en regneforskrift for antallet af musikere som funktion af salens volumen.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1980 **80-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

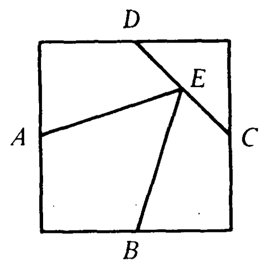
Tirsdag den 26. august 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2	ca. 10 points
opgave 3......................	ca. 15 points
hver af opgaverne 4-5	ca. 20 points
opgave 6......................	ca. 25 points

1. I et kvadrat betegnes sidernes midtpunkter A, B, C og D. Midtpunktet af linjestykket CD betegnes E.
Bestem gradtallet for vinkel AEB.



2. En funktion f er for $x \in \mathrm{R}$ bestemt ved

$$f(x) = \min\{x^2, 2+x, 5\},$$

hvilket betyder, at $f(x)$ er det mindste af tallene x^2, $2+x$ og 5.

Tegn grafen for f.

3. Et eksperiment består i at foretage to kast med en symmetrisk terning. Øjentallet ved første kast betegnes a, og øjentallet ved andet kast betegnes b.
Til ethvert udfald (a,b) ved dette eksperiment betragtes den rette linje med ligningen

$$ax+by = 4.$$

Bestem sandsynligheden for, at linjen

1) indeholder punktet $P(1,1)$.

2) er parallel med linjen med ligningen $x+y=13$.

3) er vinkelret på linjen med ligningen $2x-y=7$.

VEND!

4. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,-1)$, $B(5,-3)$ og $C(3,1)$.
Med P betegnes projektionen af C på linjen gennem A og B.
Bestem koordinatsættet til P.

Ved en multiplikation med centrum C afbildes P i et punkt på andenaksen.
Bestem multiplikationsfaktoren.

Ved multiplikationen afbildes trekant ABC i en trekant $A'B'C$.
Bestem arealet af trekant $A'B'C$.

5. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cos t} \\ y &= \sin 2t \end{aligned}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Gør rede for, at kurven har en asymptote.

Angiv en ligning for hver af de kurvetangenter, der er parallelle med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

6a. En elev skal til eksamen i et bestemt fag og vil for sin præstation få én karakter. En vurdering af elevens muligheder inden eksamen fremgår af følgende tabel:

Karakter	$\leqq 5$	6	7	8	9	$\geqq 10$
Sandsynlighed	0,0	0,2	0,4	0,3	0,1	0,0

Bestem middelværdi og spredning for den stokastiske variabel X, der angiver elevens karakter.

Det antages nu, at eleven går til eksamen to gange i faget, og at elevens muligheder begge gange vurderes som ovenfor. Herefter fastsættes den endelige eksamenskarakter i faget som det største af de opnåede resultater.

Bestem sandsynlighedsfordelingen for den stokastiske variabel Y, der angiver den endelige eksamenskarakter.

Beregn middelværdi og spredning for Y.

6b. Luftrøret på et menneske antages at have cirkulært tværsnit, og radius ved almindelig udånding betegnes med R. Umiddelbart før man hoster, ændres luftrørets radius til r.

Det antages, at den hastighed $h(r)$, hvormed de enkelte luftpartikler hostes ud, er givet ved

$$h(r) = a(R-r)r^2 ,$$

hvor $r<R$, og a er en positiv konstant.
Bestem r, så denne hastighed er maksimal.

Det antages, at radius ikke ændres, mens man hoster, men nok ændres fra den ene gang man hoster til den anden.

Bestem den værdi af r, for hvilken man hoster det størst mulige rumfang luft ud pr. tidsenhed.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1980 **80-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 27. august 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-2 .... ca. 10 points
opgave 3...................... ca. 15 points
hver af opgaverne 4-5 .... ca. 20 points
opgave 6...................... ca. 25 points

1. I et koordinatsystem har en cirkel centrum $O(0,0)$.

   Bestem cirklens radius, således at linjen med ligningen $x+2y+2=0$ er tangent til cirklen.

2. Løs med hensyn til x ligningen

$$(e^x - 9e^{-x})(2e^{2x} - 9e^x + 4) = 0 .$$

3. Vurderingsprisen for et bestemt dansk frimærke fremgår af nedenstående tabel.

År	1972	1974	1976	1978
Vurderings-pris i kr.	175	225	300	400

Gør rede for, at denne prisudvikling med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen $f(x) = a \cdot b^x$.

Det antages, at denne prisudvikling fortsætter.

Hvilken vurderingspris vil mærket have i 1990?

Hvornår opnås en vurdering på 1000 kr.?

VEND!

4. I et koordinatsystem er givet punktet $P(-12, \frac{15}{2})$ og parablen med ligningen $y = x^2$.

Bestem førstekoordinaten til hvert af de parabelpunkter Q, for hvilke $\overrightarrow{PQ}$ står vinkelret på parabeltangenten i Q.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin^2 x + 2\sin x - 1, \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Gør rede for, at f har en omvendt (invers) funktion f^{-1}.

Bestem $f^{-1}(\frac{1}{4})$ og $(f^{-1})'(\frac{1}{4})$.

6a. Blandt 10 ægtepar tænkes på tilfældig måde udvalgt 3 personer.

Beregn sandsynligheden for, at der blandt disse 3 er et ægtepar.

Blandt 10 andre ægtepar tænkes på tilfældig måde udvalgt 5 personer.

Beregn sandsynligheden for, at der blandt disse 5 er

1) 2 ægtepar.

2) netop ét ægtepar.

6b. En talfølge

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

er defineret ved

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{og} \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \qquad n > 2 .$$

(Tallene i denne talfølge er de såkaldte *Fibonacci-tal.*)

Bevis, at der for $n \in \mathrm{N}$ gælder

1) $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1.$

2) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}.$

3) $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1980 **80-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 26. august 1980 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-4	ca. 10 points
opgave 5......................	ca. 15 points
opgave 6......................	ca. 20 points
opgave 7......................	ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\sqrt{x^2+4} \geqq x+2\ .$$

2. Om en trekant ABC, som ligger i en orienteret plan, gælder

$$\overrightarrow{AC} = \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \widehat{\overrightarrow{AB}}\ .$$

Beregn gradtallene for trekantens vinkler.

3. For ethvert talpar (a, b) er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = a\cos 2x + b\sin 2x, \qquad x \in \mathrm{R}\ .$$

Vis, at enhver af disse funktioner tilfredsstiller ligningen

$$f''(x) = -4f(x)\ .$$

Bestem tallene a og b, når det oplyses, at

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ .$$

4. To puslespil indeholder henholdsvis 15 og 20 brikker. Disse brikker er ved et uheld blevet blandet sammen. Fra blandingen tænkes på tilfældig måde udtaget tre brikker.

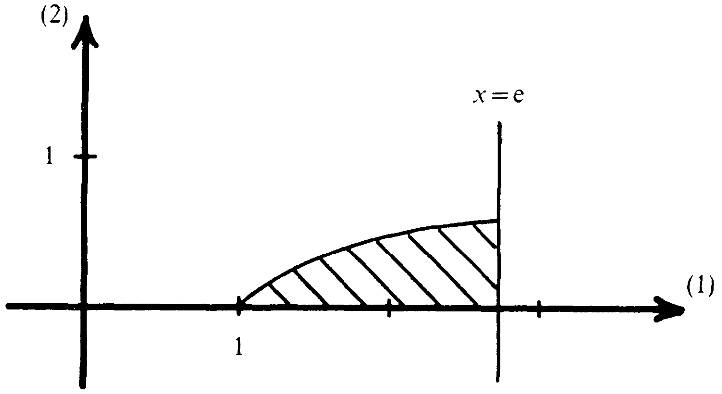
Bestem sandsynligheden for, at de tre brikker er fra samme spil.

VEND!

5. Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad 1 \leqq x \leqq e .$$

Grafen for f, førsteaksen og linjen med ligningen $x = e$ afgrænser en punktmængde, der er markeret på figuren nedenfor.



Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje denne punktmængde 360° om førsteaksen.

6. Det danske postvæsen anslår, at ca. 5 % af de breve, der ekspederes, er mere end et døgn undervejs. I det følgende antages det derfor, at netop 5 % af de ekspederede breve er mere end et døgn undervejs.
Vi tænker os, at der ekspederes 50 breve.

1) Bestem sandsynligheden for, at netop 3 breve er mere end et døgn undervejs.
2) Bestem sandsynligheden for, at mindst 46 breve er højst et døgn undervejs.
3) Bestem det mindste tal m, således at sandsynligheden er under 1% for, at mindst m breve er mere end et døgn undervejs.

7a. Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9, \quad x \in \mathrm{R} .$$

Undersøg funktionens monotoniforhold, og bestem dens lokale ekstrema.

Angiv funktionens nulpunkter og fortegnsvariation.

Tegn grafen for f.

En lineær funktion g er bestemt ved

$$g(x) = x + 1 .$$

Løs ligningen

$$g(x) = f(x) .$$

Graferne for f og g samt andenaksen afgrænser i anden kvadrant en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

7b. Et firma handler med kuglepenne. Antallet af kuglepenne, der sælges i en bestemt periode, afhænger af den stykpris x, som firmaet fastsætter. Stykprisen x angives i øre.
Antallet af solgte kuglepenne, målt i tusinder, betegnes $f(x)$.
Det antages, at

$$f(x) = \begin{cases} 180 - 3x & \text{for } 0 < x \leqq 40 \\ 100 - x & \text{for } 40 < x \leqq 100 \,. \end{cases}$$

Bestem stykprisen, således at firmaet får maksimal indtægt på salget af kuglepenne.

Firmaets udgift pr. kuglepen er 10 øre.

Bestem den stykpris, der giver firmaet maksimal fortjeneste.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1981 **81-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 12. maj 1981 kl. 9.00-13.00

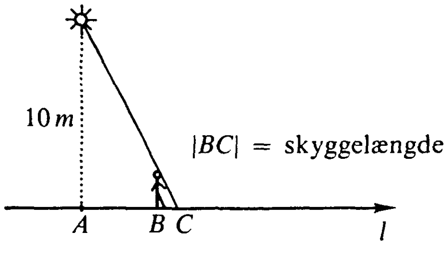
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2-5	ca. 15 points
opgave 6	ca. 30 points

1. Bestem antallet af sekscifrede tal, der kan skrives med tre 1-taller, et 2-tal og to 3-taller.

2. I højden 10 m over gaden hænger en lampe, og en 2 m høj mand befinder sig til tiden $t=0$ i afstanden 4 m fra A (se figur).



Hvor lang er hans skygge til tiden $t=0$?

Han bevæger sig med den konstante fart $\frac{1}{2}$ m/s væk fra A langs den rette linje l.

Hvor lang er hans skygge til tiden $t=16$?

Til hvilket tidspunkt er hans skyggelængde 2 m?

Bestem skyggens længde som funktion af tiden.

VEND!

3. Bestem den funktion f, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2y},$$

og som opfylder, at $f'(2)=5$.

4. I september 1980 kunne man i en avis læse, at af de oplysninger om udbetaling af hjælp efter bistandsloven, der registreres i kommunerne, er 13% behæftet med fejl.
I det følgende antages derfor, at sandsynligheden er 0,13 for, at en tilfældigt valgt oplysning er fejlagtig.
Der tænkes på tilfældig måde udtaget tyve oplysninger til brug for en undersøgelse.

Bestem sandsynligheden for, at der højst vil forekomme én fejlagtig oplysning blandt de tyve.

Bestem det mest sandsynlige antal fejlagtige oplysninger blandt de tyve.

5. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1} + \frac{x-x^2}{x+2},$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+4x-1}}.$$

Gør rede for, at grafen for hver af disse funktioner har en vandret asymptote, idet funktionerne undersøges for x gående mod uendelig.

Bestem en ligning for hver af disse asymptoter.

6a. I planen er valgt et koordinatsystem.
En afbildning f er bestemt ved

$$f\colon (x,y) \curvearrowright (5x-12y+8,\ 12x+5y-16)\,.$$

Bestem billedet af punktet $P(1,0)$ ved denne afbildning.

Vis, at f har netop ét fikspunkt, og bestem koordinatsættet til dette.

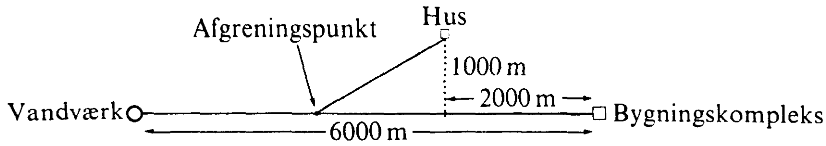
Afbildningen er sammensat af en drejning om fikspunktet i positiv omløbsretning og en multiplikation ud fra fikspunktet.

Bestem en drejningsvinkel og den dertil svarende multiplikationsfaktor.

En linje m har ligningen $x-2y+1=0$.

Bestem en ligning for linjen $f(m)$.

6b.



Fra et vandværk skal der lægges en hovedvandledning til et større bygningskompleks 6000 m fra vandværket. Samtidig skal der fra hovedvandledningen føres en sideledning ind til et hus, der ligger i afstanden 1000 m fra den planlagte hovedvandledning (se figur).
Efter afgreningspunktet kan dimensionen på hovedvandledningen mindskes.
Priserne på vandrør opgives til

300 kr. pr. meter hovedvandledning før afgrening,
204 kr. pr. meter hovedvandledning efter afgrening og
120 kr. pr. meter sideledning.

Bestem afstanden fra vandværket til afgreningspunktet, således at den samlede pris for vandledningerne bliver mindst mulig.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1981 **81-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 13. maj 1981 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 3, 4 og 5	ca. 15 points
opgave 2	ca. 10 points
opgave 6	ca. 30 points

1. En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2 - x \ln x, \qquad x \in \mathrm{R}_+ .$$

Bestem værdimængden for funktionen.

2. Løs for $x \in [0;\pi]$ dobbeltuligheden

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2x \leqq \frac{1}{2} .$$

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+4}, \qquad x \in [-1;\infty[.$$

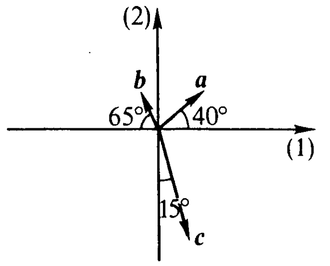
Bestem en stamfunktion til f, og beregn tallet

$$\int_1^2 f(x)\, dx .$$

VEND!

4. I et koordinatsystem er givet tre vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$, hvor $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$ og $|\boldsymbol{c}|=6$ (se figur).

Beregn længden af vektoren $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, og beregn et gradtal for den vinkel, som denne vektor danner med førsteaksen.



5. Det viste udklip stammer fra *Samvirke*, august 1980. Udklippet er en del af en artikel af professor Ove Nathan om moderne atomfysik.
Vi antager i det følgende, at kvarkmodellen holder, således at protonen er radioaktiv med en halveringstid på 10^{30} år.

Angiv en forskrift for den funktion f, der beskriver, hvor mange protoner der er tilbage til tiden t, målt i år, når der til tiden 0 er 10^{30} protoner.

Bestem det approksimerende førstegradspolynomium til f i tallet 0.

Bestem ved hjælp heraf et skøn over, hvor mange af de 10^{30} protoner der sønderdeles i løbet af det første år, og sammenhold med artiklens oplysning om dette.

Universets alder – et kort sekund

Senest har kvark-fysikken sat spørgsmålstegn ved endnu en „hellig ko": Protonens absolutte stabilitet. Kvarkmodellen forudsiger, at protonen er radioaktiv med en halveringstid på ca. 10^{30} år (et ettal med 30 nuller efter). Halveringstiden er den tid, der skal hengå, før halvdelen af et vist antal protoner spontant er sønderdelt til andre partikler. Man kan naturligvis ikke direkte måle et tidsrum på 10^{30} år – selv universets alder (ca. 20 milliarder år) er kun et kort sekund i sammenligning. Men hvis man har mange protoner, kan man i løbet af et års tid gøre sig håb om at iagttage sønderdelingen af nogle få protoner. Forsøget er inden for mulighedernes rækkevidde, hvis man iagttager ca. 10^{30} protoner, svarende til protontallet i et middelstort svømmebasin fyldt med vand.

I disse måneder er den første forsøgsopstilling til måling af protonens spontane sønderdeling ved at blive monteret i en forladt mineskakt dybt under Jordens overflade.

6a. En bilfabrik producerer to modeller, en luksusmodel og en standardmodel. Inden en bil forlader fabrikken, skal den gennem tre produktionsafdelinger I, II og III.

En luksusmodel beslaglægger afdelingerne således:

I: 100 arbejdstimer
II: 10 arbejdstimer
III: 15 arbejdstimer .

For en standardmodel er de tilsvarende tal:

I: 50 arbejdstimer
II: 8 arbejdstimer
III: 20 arbejdstimer .

Afdelingernes kapacitet pr. uge er

I: 10 000 arbejdstimer
II: 1300 arbejdstimer
III: 2750 arbejdstimer .

Fortjenesten på en luksusmodel er 1200 kr. og på en standardmodel 1000 kr.

Hvordan bør produktionen tilrettelægges for at give maksimal fortjeneste?

Bestem den maksimale fortjeneste pr. uge.

Regeringen planlægger en politik, der vil reducere fortjenesten på hver bil med 850 kr.

Hvordan må fabrikken i lyset af dette ændre produktionen for at få maksimal fortjeneste?

Bestem den maksimale fortjeneste, der efter denne ændring kan opnås pr. uge.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x\sqrt{9-x^2} .$$

Bestem definitionsmængden for f, og vis, at grafen for f er symmetrisk om $O(0,0)$.

Vis, at grafen for f har to vandrette tangenter og to lodrette (halv)tangenter.

Tegn grafen.

En punktmængde M er fastlagt ved

$$M = \{P(x,y) \mid y = f(x) \vee y = -f(x)\} .$$

Tegn M.

M afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1981 **81-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN

OG

NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 12. maj 1981 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-4 .... ca. 10 points
opgave 5 .... ca. 15 points
opgave 6 .... ca. 20 points
opgave 7 .... ca. 25 points

1. Løs (gerne grafisk) ligningen

$$|x^2-x-6| = x+2 .$$

2. I en trekant ABC er $\angle A=30°$, $\angle C=120°$ og $|AC|=20$.

Beregn trekantens areal.

VEND!

3. Et sandsynlighedsfelt (U, P) har udfaldsrummet

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\},$$

og sandsynlighedsfunktionen P er bestemt ved følgende tabel:

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$P(u)$	0,30	0,20	0,15	0,15	0,10	0,10

Hændelserne A og B er givet ved

$$A = \{u_1, u_2, u_4, u_5\} \quad \text{og} \quad B = \{u_2, u_4, u_6\}.$$

Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(A \cup B), \quad P(A \setminus B) \quad \text{og} \quad P(A \mid B).$$

4. En funktion f er for positive tal x bestemt ved

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt.$$

Beregn $f(3)$.

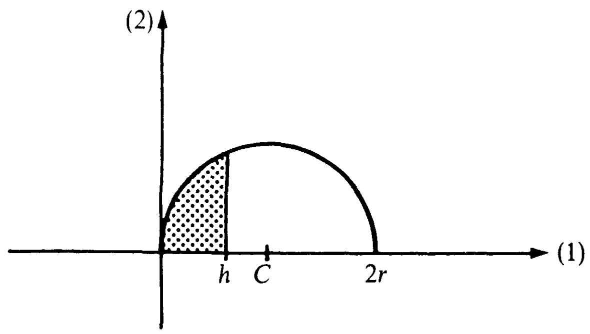
Bestem $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 2e \ln x, \quad x \in \mathrm{R}_+.$$

Bestem værdimængden for f.

6.



For et givet positivt tal r er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{2rx - x^2}, \qquad 0 \leqq x \leqq 2r .$$

Grafen for denne funktion er en halvcirkel med radius r og centrum i punktet $C(r, 0)$ (se figuren).

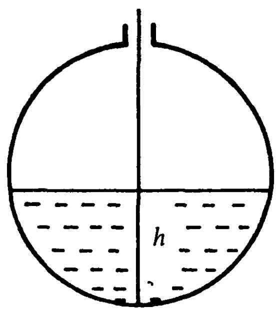
For ethvert tal h, hvor $0 < h \leqq 2r$, er en punktmængde bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq h \quad \wedge \quad 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Ved rotation af en sådan punktmængde omkring førsteaksen fremkommer et omdrejningslegeme, der er en del af en kugle med radius r.
Bevis, at rumfanget $V(h)$ af dette omdrejningslegeme er

$$V(h) = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) .$$

En olietank har form som en kugle med radius $r = 0{,}85$ m. Når man skal undersøge, hvor meget olie der befinder sig i tanken, kan dette gøres ved at stikke en målestok lodret ned i tanken og måle olieoverfladens højde over bunden.



Opstil en tabel som nedenstående og færdigudfyld den.

Oliehøjde h (i m)	0,10	0,30	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
Oliebeholdning V (i m^3)	0,026	0,212				2,127	2,474

Bestem (gerne grafisk) de oliehøjder, for hvilke oliebeholdningen er mere end 1,50 m^3.

VEND!

7a. En fabrikant af elektriske pærer garanterer, at mindst 80% af produktionen har en levetid på mere end 500 timer.
I det følgende antages, at sandsynligheden er 0,80 for, at en elektrisk pære kan brænde mere end 500 timer.
En kunde køber 50 pærer.

Bestem sandsynligheden for, at højst 35 pærer kan brænde efter 500 timers brug.

Bestem sandsynligheden for, at netop 40 pærer kan brænde efter 500 timers brug.

Bestem sandsynligheden for, at mindst 40 pærer kan brænde efter 500 timers brug.

Kunden ønsker imidlertid, at der er 99% sandsynlighed for, at mindst 40 pærer kan brænde efter 500 timers brug.

Hvilken garanti må fabrikanten da give for at kunne leve op til kundens ønske?

7b. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}.$$

Undersøg funktionen f og dens graf med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f, og angiv værdimængden for f.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1981 **81-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 25. august 1981 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-5 .... ca. 15 points
opgave 6 .... ca. 25 points

1. Løs med hensyn til x uligheden

$$\ln(1+\ln x) < 1 .$$

2. Gør rede for, at

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,dx = 2 .$$

Man kan f.eks. benytte substitutionen $t=\sqrt{x}$ efterfulgt af partiel integration.

3. Bestem hvert af tallene

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2-7x+3}{5x^2-9x+4}$$

og

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{4x^2-7x+3} - \frac{1}{5x^2-9x+4}\right)$$

VEND!

4. Når en transformer belastes, afhænger virkningsgraden af, hvor stor en belastning transformeren udsættes for. Ved belastningsgraden x forstås forholdet mellem den givne belastning og den maksimale belastning; der gælder altså, at $0 \leqq x \leqq 1$.

For en bestemt transformer er virkningsgraden V bestemt ved

$$V(x) = \frac{24x}{x^2 + 24x + 0{,}2}\,.$$

Bestem virkningsgraden ved maksimal belastning (4 dec.).

Bestem transformerens maksimale virkningsgrad (4 dec.).

5. I et koordinatsystem har en ret linje m parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathrm{R}\,,$$

og en vektor $\boldsymbol{a}$ har koordinatsættet $(2,4)$.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem linjen m og vektoren $\boldsymbol{a}$.

Bestem koordinatsættet til $\boldsymbol{a}$'s projektion på m.

6a. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er for ethvert tal t givet to punkter

$$P_t(t, \tfrac{1}{2}t^2 - 2) \quad \text{og} \quad Q_t(2t-4, t-4)\,.$$

Bestem de tal t, for hvilke vinkel Q_tOP_t er ret.

Bestem den mindste længde af linjestykket Q_tP_t.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln\frac{x}{1-x}\,.$$

Bestem funktionens definitionsmængde.

Bestem funktionens værdimængde.

Gør rede for, at funktionen har en invers funktion f^{-1}, og bestem en forskrift for f^{-1}.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1981 **81-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 26. august 1981 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2-4	ca. 15 points
opgave 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. En *rhombe* er en firkant, hvor alle sider er lige lange.
I en bestemt rhombe er den ene diagonal tre gange så lang som den anden.

Beregn rhombens vinkler.

2. Bestem den løsning f til differentialligningen

$$\sqrt{x}\cdot f'(x) = f(x)\,,$$

for hvilken $f(1)=1$.

3. I et koordinatsystem har en parabel ligningen $y=\frac{1}{4}x^2$.
Der er givet et tal t, $t\neq 0$.

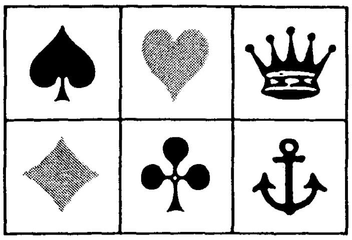
Bestem en ligning for parablens tangent i punktet $P_t(t,\frac{1}{4}t^2)$.

Bestem en ligning for den tangent til parablen, der er vinkelret på tangenten i P_t.

Bevis, at de to tangenter skærer hinanden på linjen med ligningen $y=-1$.

VEND!

4. Et populært spil i England er »Crown and Anchor«. Til spillet anvendes en spilleplade som denne:



Desuden anvendes tre symmetriske terninger, der hver er mærket med de samme tegn: spar, hjerter, ruder, klør, krone og anker.
En spiller sætter 1£ på ét af de seks tegn, og der kastes én gang med de tre terninger. Hvis ingen af terningerne viser det pågældende tegn, mister spilleren sin indsats, og hans gevinst sættes til -1£. I modsat fald får han sin indsats tilbage og får desuden gevinsten 1£, 2£ eller 3£ svarende til, hvor mange af terningerne der viser det pågældende tegn.
Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver spillerens gevinst.

Angiv sandsynlighedsfordelingen for X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x} - 2 .$$

Gør rede for, at f er aftagende.

Bestem $f(0)$ og $(f^{-1})'(-1)$.

Bestem tallet

$$\int_0^1 f(x)\,dx .$$

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Punktmængden M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid -1 \leqq x \leqq 0 \wedge f(x) \leqq y \leqq 0\} .$$

Beregn arealet af M.

6b. For ethvert tal a er

$$\cos 2x + \cos x = a$$

en ligning i x.

Løs denne ligning for $a=1$.

Bestem mængden af tal a, for hvilke ligningen har en ikke-tom løsningsmængde.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1981 **81-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 25. august 1981 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2, 3 og 5	ca. 15 points
opgave 4	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. En stokastisk variabel X er normalfordelt, og der gælder, at

$$P(X > 7) = 0{,}05 \quad \text{og} \quad P(X \leqq 3) = 0{,}40 .$$

Tegn på normalfordelingspapir grafen for fordelingsfunktionen for X.

Angiv middelværdien og spredningen for X.

Find $P(X \leqq 1{,}5)$.

2. I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$A(-3,4), \quad B(4,-1) \quad \text{og} \quad C(3,10) .$$

Beregn gradtallet for vinkel ABC.

Beregn længden af projektionen af $\overrightarrow{BC}$ på $\overrightarrow{BA}$.

3. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln\left(x+\frac{1}{x}\right), \quad x > 0 .$$

Bestem funktionens værdimængde.

VEND!

4. Beregn hvert af integralerne

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\cos(x^2)dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos x\, dx\,.$$

5. Blandt mænd er der 7%, der er rød-grøn farveblinde, mens der blandt kvinder kun er 0,5%.

   1) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 20 tilfældigt udvalgte mænd er netop én, der er rød-grøn farveblind.

   2) Bestem sandsynligheden for, at der blandt 10 tilfældigt udvalgte kvinder ingen rød-grøn farveblinde er.

   3) En forsamling på 20 tilfældigt udvalgte personer består af lige mange mænd og kvinder. Bestem sandsynligheden for, at der ingen rød-grøn farveblinde er i forsamlingen.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2, \qquad -\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\,.$$

Undersøg f med henblik på nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Beregn arealet af den punktmængde, som afgrænses af grafen og dennes tangent i punktet $A(1, f(1))$.

6b. Den samlede verdensproduktion af metallet cadmium var 5,5 tusinde tons i 1950. Produktionen blev fordoblet i løbet af de følgende 10 år. Det antages, at årsproduktionen af cadmium øgedes eksponentielt.

Hvilken årsproduktion af cadmium ville man på denne baggrund forvente, at der var i henholdsvis 1970 og 1980?

Det har vist sig, at antagelsen om eksponentiel vækst med fordoblingstiden 10 år var i overensstemmelse med de faktiske forhold indtil 1970. Siden 1970 har væksten også været eksponentiel, men verdensproduktionen i 1980 blev 50 tusinde tons.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver den årlige produktion af cadmium som funktion af tiden, angivet i år efter 1950.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1982 **82-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 11. maj 1982 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 points
hver af opgaverne 3, 4, 5 og 6	ca. 15 points
opgave 7........................	ca. 20 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0 .$$

Bestem hver af grænseværdierne $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Bestem samtlige andengradspolynomier P, der tilfredsstiller ligningen

$$xP'(x) = 2P(x) - x .$$

3. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder, at

$$|\boldsymbol{a}| = 2, \quad |\boldsymbol{b}| = 3 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 60^\circ .$$

Beregn vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{c}$ og $\boldsymbol{d}$, hvor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{d} = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

4. Et eksperiment består i at kaste tre terninger samtidigt.

Beregn sandsynligheden for hver af hændelserne

H_1: Der er netop én sekser og ingen firere.
H_2: Antallet af seksere er større end antallet af firere.

VEND!

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Bestem funktionens værdimængde.

6. I et koordinatsystem er to linjer m og n givet ved ligningerne

$$m\colon\ 2x - y + 5 = 0$$

og

$$n\colon\ x + 2y - 5 = 0 .$$

Gør rede for, at disse linjer står vinkelret på hinanden, og at linjen med ligningen

$$y = -3x$$

halverer en af vinklerne mellem m og n.

7a. Ved en undersøgelse har man for en række dyr målt dyrenes energiforbrug ved løb og sammenlignet dette forbrug med deres vægt. For at kunne sammenligne forskellige dyr er energiforbruget angivet som den energi, der kræves for at transportere 1 kilogram 1 meter. Følgende tabel viser sammenhørende værdier af et dyrs vægt M (målt i kg) og dets energiforbrug E ved løb $\left(\text{målt i } \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{m}}\right)$:

M	0,020	0,24	0,39	2,5	39	580
E	55	20	15	7	2	0,7

Indtegn sammenhørende værdier af $\log M$ og $\log E$ i et koordinatsystem, og gør rede for, at sammenhængen mellem $\log M$ og $\log E$ med tilnærmelse er lineær.

Hvilket energiforbrug ved løb må man på denne baggrund forvente for et dyr, der vejer 18 kg?

Hvilken vægt må man forvente for et dyr med et energiforbrug ved løb på 1,5 $\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{m}}$?

7b. For en lyskilde med lysstyrken N gælder, at lysintensiteten i et punkt med afstand a til lyskilden er $\frac{N}{a^2}$. (Lysstyrken måles i candela, lysintensiteten i lux og afstanden i meter.)

For et punkt, der er beliggende på forbindelseslinjen mellem to lyskilder, gælder, at den samlede lysintensitet i punktet er summen af de to lysintensiteter.

To lyskilder, hvoraf den ene har otte gange så stor lysstyrke som den anden, er placeret i afstanden 6 meter fra hinanden.

Beregn beliggenheden af det punkt på forbindelseslinjen mellem de to lyskilder, i hvilket lysintensiteten er mindst.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1982 **82-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 12. maj 1982 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b, 5c og 5d må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2 og 5	ca. 15 points
opgave 3	ca. 20 points
opgave 4	ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$x-6 \geqq \sqrt{x} .$$

2. I en pose ligger 6 kugler, og enhver af disse er enten rød eller grøn. På tilfældig måde og samtidigt udtages 4 kugler.

   Bestem sandsynligheden for resultatet 3 røde og 1 grøn kugle, hvis de 6 kugler i posen har farvefordelingen 3 røde og 3 grønne.

   Bestem den farvefordeling på de 6 kugler, der gør resultatet 3 røde og 1 grøn kugle mest sandsynligt.

3. Om en funktion f oplyses, at f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{y}, \quad y>1 ,$$

   og at $f(0)=2$.

   Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0,2)$.

   Bestem en forskrift for f.

VEND!

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}, \qquad x \in \mathrm{R}_+ .$$

Undersøg f med henblik på nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Bestem asymptoterne til grafen for f, idet det oplyses, at $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Tegn grafen.

Angiv funktionens værdimængde.

Grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x = e^2$ afgrænser en punktmængde, som har et areal.

Beregn dette areal.

5a. Bestem maksimum for funktionen f bestemt ved $f(x,y) = x+4y$ i mængden

$$M = \{(x,y) \mid x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge 2x+3y \leqq 4 \wedge 3x+y \leqq 3\} .$$

5b. I et koordinatsystem har en ellipse E ligningen

$$4x^2 + y^2 - 16x - 12y + 48 = 0 .$$

Tegn ellipsen E.

Ved spejling i linjen med ligningen $y = x$ efterfulgt af den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og forvandlingstal 3 afbildes ellipsen E på en ellipse E_1.

Angiv en ligning for ellipsen E_1.

5c. En eksponentielt voksende funktion f er bestemt ved

$$f(x) = b\,a^x ,$$

hvor a og b er positive tal. Det oplyses, at fordoblingskonstanten for f er $\frac{1}{2}$, og at

$$\ln 2 \int_1^2 f(x)\,dx = 4 .$$

Bestem de eksakte værdier af a og b.

5d. Løs for $x \in [0;\pi]$ ligningen

$$\sqrt{\sin x} + \cos x = 0 .$$

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b, 5c og 5d må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1982 **82-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 11. maj 1982 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 10 points
opgave 5	ca. 15 points
opgave 7	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. Løs (gerne grafisk) uligheden

$$|x-5| \leqq \tfrac{1}{2}x+2 \,.$$

2. En funktion f er fastlagt ved

$$f(x) = 2x^3+3x^2-12x, \qquad x \in [-3;3] \,.$$

Bestem værdimængden for f.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^2-2x+1} \,.$$

Bestem en ligning for hver af de to asymptoter til grafen for f.

VEND!

4. I et koordinatsystem er en linje l bestemt ved ligningen

$$x + 3y - 100 = 0$$

og en linje m bestemt ved ligningen

$$ax - 5y + 1 = 0\,,$$

hvor a er en konstant.

Bestem tallet a, således at l er vinkelret på m.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1 - 2\cos x, \qquad x \in \,]-\pi;\pi[\,.$$

Bestem de to stamfunktioner til f, hvis grafer har førsteaksen som tangent.

6. Ved en kyst ønsker man at bygge et dige, der skal forhindre oversvømmelse af et lavtliggende område.
Ved observationer gennem en årrække har man fundet, at højeste vandstand i et kalenderår er normalfordelt med en middelværdi på 0,93 m og en spredning på 0,20 m.

Hvad er sandsynligheden for, at diget overskylles et tilfældigt år, hvis digets højde er 1,40 m?

Bestem den mindste højde, diget skal have, når sandsynligheden for, at det overskylles et tilfældigt år, ikke må være mere end 2%.

Diget tænkes nu bygget med en højde på 1,50 m, og det antages, at et års højeste vandstand er uafhængig af andre års højeste vandstande.

Bestem under disse antagelser sandsynligheden for, at diget overskylles i løbet af 20 år.

7a. Det viste udklip stammer fra Berlingske Tidende. I det følgende antages, at indbyggertallet i Mexico City er eksponentielt voksende, samt at udklippets forudsigelse holder.

Bestem en forskrift for den funktion f, der beskriver indbyggertallet i Mexico City som funktion af tiden målt i år efter 1950.

Bestem fordoblingstiden for indbyggertallet i Mexico City.

Hvor mange procent (helt tal) vokser indbyggertallet i Mexico City i løbet af 10 år?

Overbefolkning

COLOMBO: Overbefolkningen vil få indbyggertallet i de i forvejen overbefolkede storbyer til at eksplodere inden århundredskiftet, hvis det ikke lykkes at standse flugten fra land til by, fremgår det af en rapport til en FN befolkningskonference i Colombo på Sri Lanka. Den alvorligst truede by er Mexico City, der i 1950 havde 2,9 millioner indbyggere. Den vil i år 2000 have 31,6 millioner. (AP)

7b. En lineær funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{3}{2}x + 2, \qquad x \in [-6;6]\,.$$

Tegn i samme koordinatsystem graferne for funktionen f og dens inverse (omvendte) funktion f^{-1}.

Angiv såvel definitionsmængde som forskrift for f^{-1}.

Beregn den spidse vinkel mellem de to grafer.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1982 **82-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 24. august 1982 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 ...... ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 6 ...... ca. 15 points
opgave 7........................ ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\frac{x}{1-x} < x-4 .$$

2. I en plan er givet tre vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$, hvor

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}, \quad |\boldsymbol{a}|=5, \quad |\boldsymbol{c}|=3 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0 .$$

Beregn længden af vektoren $\boldsymbol{b}$.

Beregn et gradtal for vinklen mellem $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$.

3. Beregn den eksakte værdi af tallet

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du .$$

(Benyt for eksempel substitutionen $u=\sin x$.)

4. Bevis, at for alle tal x gælder

$$e^x \geqq 1+x ,$$

og at lighedstegnet kun gælder for $x=0$.

VEND!

5. Om en bestemt sygdom antages, at der er sandsynligheden $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ for at dø af sygdommen, hvis man rammes af den.

Sygdommen tænkes at ramme 100 000 mennesker. Beregn sandsynligheden for, at

1) netop ét menneske dør af sygdommen.
2) højst to mennesker dør af sygdommen.

6. I en plan er givet et koordinatsystem. For ethvert tal a er en punktmængde M_a bestemt ved ligningen

$$ax^2 + (a-1)y^2 = a \,.$$

Bestem de tal a, for hvilke M_a er en ellipse.

For hvilke a ligger ellipsens storakse på koordinatsystemets førsteakse?

7a. På en virksomhed afhænger produktionens størrelse af antallet af ansatte. Idet antallet af ansatte betegnes med x, antages det, at det antal enheder $P(x)$, som produceres pr. måned, udelukkende afhænger af tallet x. Funktionen P antages at være bestemt ved $P(x) = bx^a$, hvor a og b er positive konstanter.

Bestem de to tal a og b, når det oplyses, at 125 ansatte producerer 2500 enheder pr. måned, og at 500 ansatte producerer 6300 enheder pr. måned.

Hver ansat får 8000 kr. pr. måned, og hver produceret enhed sælges for 1200 kr.

Bestem en forskrift for fortjenesten f som funktion af antallet af ansatte x, idet der ikke tages hensyn til andre indtægter og udgifter.

Bestem det antal ansatte, der giver virksomheden maksimal fortjeneste.

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \,.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på definitionsmængde, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

For ethvert tal a er en funktion g_a defineret ved

$$g_a(x) = ae^x \,.$$

Bevis, at for alle positive tal a har grafen for f og grafen for g_a netop to fællespunkter.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1982 **82-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 25. august 1982 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 20 points

1. En funktion f er bestemt ved

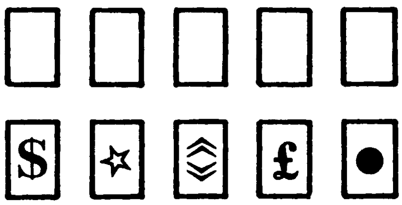
$$f(x) = \sqrt{2x-1} - \ln x, \qquad x \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Gør rede for, at funktionen er voksende.

2. En ligesidet trekant har to vinkelspidser på en linje l. Ved en ret affinitet med linjen l som affinitetsakse og med positivt forvandlingstal afbildes trekanten i en retvinklet trekant.

Beregn forvandlingstallet.

3. I en udsendelse i fjernsynet optrådte en tryllekunstner. På et bord lagde han fem kort med hver sit symbol. Over for disse kort lagde han på tilfældig måde fem andre kort med de samme symboler.



Figuren illustrerer situationen, efter at alle kortene er lagt. Den ene række har billedsiden nedad.

Tricket gik ud på, at de kort, der lå over for hinanden i de to rækker, havde samme symbol. Tryllekunstneren sagde, at sandsynligheden for dette kan udtrykkes ved, at det sker i ét tilfælde ud af $5^5 = 3125$. Han argumenterede på følgende måde: I ét tilfælde ud af 5 passer de to første kort sammen, og i ét tilfælde ud af $5 \cdot 5 = 25$ passer både de to første og de to næste kort sammen, o.s.v. Dette er ikke korrekt.

Giv en korrekt forklaring, og bestem den rigtige sandsynlighed.

VEND!

4. Grafen for en differentiabel funktion f har i punktet med førstekoordinat 2 linjen med ligningen $y=\frac{1}{2}x+2$ som tangent.
En funktion g er givet ved

$$g(x) = (f(x))^2 .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for funktionen g i punktet med førstekoordinat 2.

5. Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\ln y},$$

hvis graf går gennem punktet $P\left(3,\frac{1}{e}\right)$.

Angiv definitionsmængden og værdimængden for denne løsning.

6a. I et koordinatsystem har en trekant vinkelspidserne

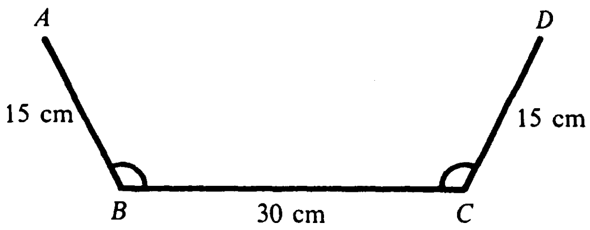
$$A(1,8), \quad B(8,7) \quad \text{og} \quad C(4,-1) .$$

Beregn gradtallet for vinkel A.

Beregn trekantens areal.

Bestem en ligning for trekantens omskrevne cirkel (den cirkel, der indeholder trekantens vinkelspidser).

6b. Af en 60 cm bred rektangulær blikplade skal fremstilles en åben vandrende, således at rendens to skrå sider er 15 cm lange, og bunden er 30 cm bred (se figur).



Tværsnit af den åbne rende.
I firkant $ABCD$ er $\angle B = \angle C$.

Hvorledes skal blikpladen bøjes, for at arealet af firkant $ABCD$ er maksimalt?

6c. I et koordinatsystem har en kurve parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= -5+\cos t+\sin t \\ y &= 3+\cos t-\sin t \end{aligned} \quad , \; t \in [0;\pi] .$$

Bestem koordinatsættene til de punkter på kurven, hvori der er en tangent parallel med en af koordinatakserne.

Beregn afstanden fra et vilkårligt kurvepunkt til punktet med koordinatsættet $(-5,3)$.

Tegn kurven.

Husk, at kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1982 **82-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN OG NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 24. august 1982 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 points
hver af opgaverne 3, 4, 5 og 6	ca. 15 points
opgave 7........................	ca. 20 points

1. Løs ligningen

$$\ln(x^2) = (\ln x)^2 .$$

2. En vektor $\boldsymbol{a}$ har længden 3, og en vektor $\boldsymbol{b}$ har længden 5.
Vektoren $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ har længden 7.

Beregn et gradtal for vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

3. En binomialfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 12 og spredning $\sqrt{8}$.

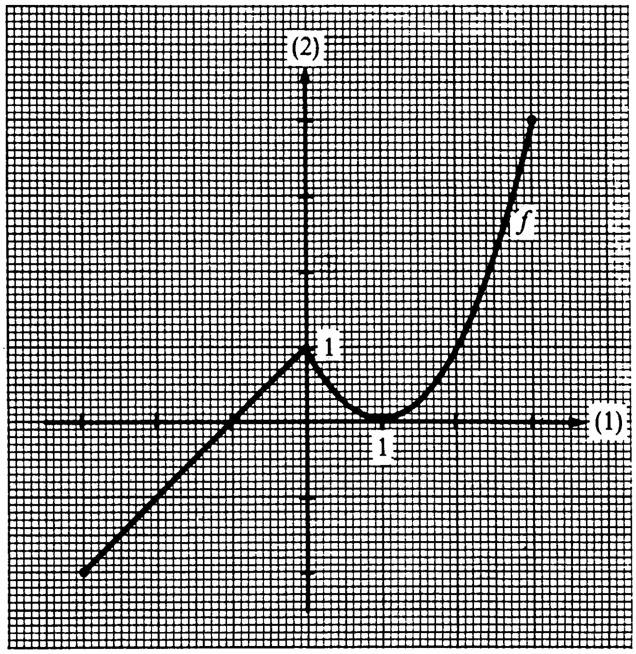
Beregn sandsynligheden $P(X=3)$.

4. Et tredjegradspolynomium P har lokalt minimum 0 for $x=4$ og lokalt maksimum 32 for $x=0$.

Bestem en forskrift for polynomiet P.

VEND!

5.



Ovenstående figur viser et linjestykke og en del af en parabel i et koordinatsystem. Tilsammen udgør disse grafen for en funktion f.

Bestem tallet

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx \, .$$

6. I et koordinatsystem er for ethvert tal c en linje l_c bestemt ved ligningen

$$y = \frac{3}{2}x + c \, .$$

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x + \sin x, \qquad 0 \leqq x \leqq \pi \, .$$

Bestem c, således at linjen l_c er tangent til grafen for f.

7a. For ethvert positivt tal k er en funktion f_k bestemt ved

$$f_k(x) = \frac{kx}{x^2 + k^2} \, .$$

Bestem værdimængden for f_k.

7b. Et eksperiment består i, at tre terninger kastes samtidigt. To hændelser A og B er givet ved

A: mindst én af terningerne viser 6 øjne.
B: mindst to af terningerne viser 6 øjne.

Beregn hver af sandsynlighederne

$$P(A), \quad P(B), \quad P(A|B), \quad P(B|A) \quad \text{og} \quad P(A|\complement B) \, .$$

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1983 **83-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Tirsdag den 10. maj 1983 kl. 9.00-13.00

Dette opgavesæt består af 12 opgaver.
Kun 10 af disse opgaver må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-12 .... ca. 10 points

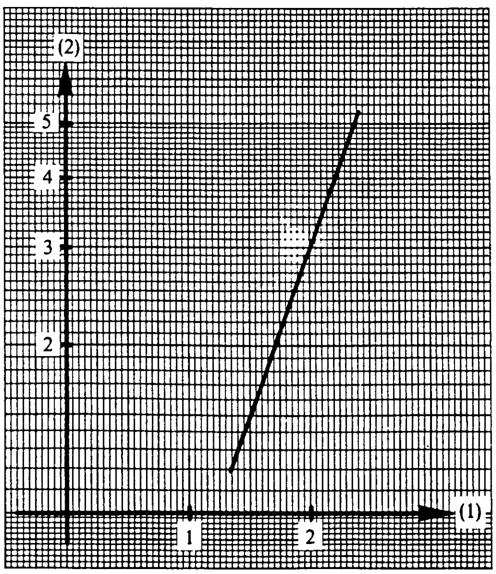
1. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder, at

$$|\boldsymbol{a}| = 5, \quad |\boldsymbol{b}| = 3 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = v°, \quad \text{hvor } 0<v<90\,.$$

Bestem de tal v, for hvilke det gælder, at arealet af det af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspændte parallelogram er større end 10.

2. Figuren viser i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem grafen for en eksponentielt voksende funktion.

Bestem en forskrift for denne funktion.



VEND!

3. Bestem tallet

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} .$$

4. Beregn den eksakte værdi af

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{2+\sin x}\, dx .$$

5. En integralkurve til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}, \quad y>1 ,$$

går gennem punktet $P(1,2)$.

Bestem en ligning for tangenten til denne kurve i punktet P.

6. Der er givet en mønt, hvor sandsynligheden for at få plat ved ét kast er 0,52. Mønten tænkes kastet tre gange.
To hændelser A og B er givet ved

A: Der kommer plat netop to gange.
B: Der kommer plat mindst en gang.

Beregn hver af sandsynlighederne $P(A)$, $P(B)$ og $P(A \mid B)$.

7. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \in \mathrm{R}_+ .$$

Det oplyses, at f er en isomorfi af $(\mathrm{R}_+, \cdot)$ på $(A, *)$, hvor A betegner en talmængde og $*$ en komposition i A.

Vis, at tallene 2 og 3 tilhører A.

Bestem tallet $2 * 3$.

8. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længden 3. To andre vektorer $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er bestemt ved

$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{a}} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \hat{\boldsymbol{a}} \,.$$

Beregn længden af $\boldsymbol{b}$'s projektion på $\boldsymbol{c}$.

9. I et koordinatsystem er to linjer l og m givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} l: &\quad x+3y+6 = 0 \\ m: &\quad x+3y-9 = 0 \,. \end{aligned}$$

Ved en multiplikation ud fra punktet $Q(1,1)$ med multiplikationsfaktor k afbildes l på m. Bestem k.

10. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x-2} - x, \quad x \geqq \tfrac{9}{4} \,.$$

Vis, at f har en invers (omvendt) funktion.

11. For ethvert tal c er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = ce^x \,.$$

Bestem c, således at linjen med ligningen $y=x$ er tangent til grafen for f.

12. Løs med hensyn til x ligningen

$$\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x = 0 \,.$$

Husk, at kun 10 af opgaverne må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1983 **83-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 11. maj 1983 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 5a, 5b og 5c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 15 points
hver af opgaverne 3 og 5	ca. 20 points
opgave 4........................	ca. 30 points

1. Et polynomium P er givet ved

$$P(x) = 4x^3+3x^2-6x-2 .$$

Beregn $P(0)$ og $P(-1)$, og giv en redegørelse for, at P har én positiv rod og to negative rødder.

2. Udklippet viser en del af »Bekendtgørelse om grænser for støjspænding og udstråling fra radiofoni- og fjernsynsmodtagere«.

Tegn grafen for den funktion, der angiver den størst tilladte symmetriske støjspænding på fjernsynsmodtageres netklemmer, målt i μV, som funktion af frekvensen, målt i kHz.

Er en symmetrisk støjspænding på 640 μV ved 275 kHz tilladt?

> § **3.** Den størst tilladte støjspænding udgør på fjernsynsmodtageres netklemmer:
>
> a) Symmetrisk støjspænding:
> 900 µV (59 dB over 1 µV) ved 150 kHz faldende lineært med stigende frekvens til
> 200 µV (46 dB over 1 µV) ved 500 kHz.
> 200 µV (46 dB over 1 µV) i frekvensområdet mellem 500 kHz og 1605 kHz.
>
> Min. f. off. arb. G. P. T. j. nr. 1.T.7999-1980

VEND!

3. I et koordinatsystem er en punktmængde L bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x = & -3+2\cos t \\ y = & 6+3\sin t \end{matrix}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Tegn punktmængden L.

En afbildning φ er sammensat af en spejling i andenaksen, efterfulgt af en ret affinitet med forvandlingstallet 2 og førsteaksen som affinitetsakse.
En punktmængde M er bestemt ved

$$\varphi(M) = L .$$

Tegn punktmængden M.

Angiv en parameterfremstilling for punktmængden M.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Undersøg funktionen og dens graf med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen.

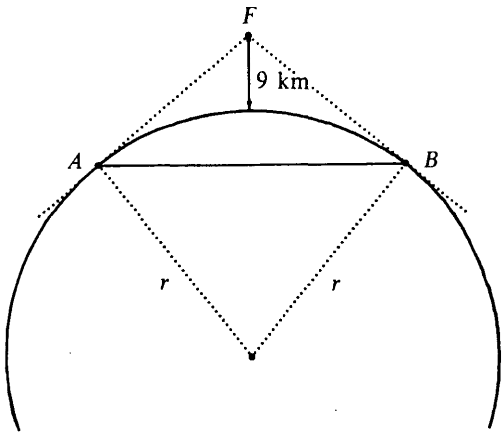
Vis, at

$$f(x) = x-2+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Grafen for f, førsteaksen og linjen med ligningen $x=5$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

5a. I NATO's varslingskæde indgår AWACS-fly, der er flyvende radarstationer. De flyvende radarstationer har den fordel i forhold til radarstationer på jorden, at de kan iagttage flyvemaskiner, som ellers ville være skjult på grund af jordkrumningen og uregelmæssigheder i terrænet.



Tværsnit af jorden
(*Størrelsesforholdene er ikke korrekte*)

Et AWACS-fly befinder sig i højden 9 km. På figuren tænkes flyet at befinde sig i punktet F. A og B angiver yderpunkter i det område, flyets radar kan dække. Jordens radius r sættes til 6371 km.

Bestem længden af linjestykket AB samt længden af cirkelbuen $\overset{\frown}{AB}$.

5b. Gallup Institutet offentliggjorde i Berlingske Tidende den 13. september 1982 en undersøgelse af befolkningens holdning til halvdagsbeskæftigelse. Undersøgelsen viste blandt andet, at ca. 85% af kvinderne ønskede at bevare systemet med halvdagsbeskæftigelse.
Antag, at sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt kvinde ønsker at bevare halvdagsbeskæftigelse, er 0,85.
På tilfældig måde udtages 50 kvinder.

Bestem sandsynligheden for, at mindst 40 af de 50 kvinder ønsker at bevare halvdagsbeskæftigelse.

Bestem sandsynligheden for, at mindst 40 og højst 45 af de 50 kvinder ønsker at bevare halvdagsbeskæftigelse.

Lad X betegne den stokastiske variabel, der angiver antallet af kvinder blandt de 50, som ønsker at bevare halvdagsbeskæftigelse, og lad μ betegne middelværdien af X.

Bestem det største naturlige tal m, for hvilket

$$P(|X-\mu| \leqq m) \leqq 0{,}95 \, .$$

VEND!

5c. I en beholder med vand er vandhøjden 0,5 m. Der åbnes for en bundventil for at tømme beholderen. Vandhøjden y, målt i meter, kan nu beskrives som en funktion af tiden t, målt i sekunder. Under tømningen aftager vandhøjden på en sådan måde, at den hastighed, hvormed vandhøjden ændrer sig, til ethvert tidspunkt er proportional med kvadratroden af vandhøjden. Med de valgte enheder er proportionalitetsfaktorens værdi $-0{,}04$. Vandhøjden som funktion af tiden er således fastlagt ved en differentialligning.

Opskriv denne differentialligning, og bestem den tid, det tager at tømme beholderen.

Husk, at kun én af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1983 **83-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 10. maj 1983 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 6a, 6b, 6c og 6d må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 points
hver af opgaverne 4 og 6	ca. 15 points
opgave 5........................	ca. 25 points

1. En kondensator aflades, og dens ladning aftager eksponentielt med tiden.
Det oplyses, at ladningen 30 sekunder efter afladningens begyndelse var $2{,}0\,\mu C$, og at ladningen efter yderligere 20 sekunder var $1{,}5\,\mu C$.

   Bestem ladningens størrelse ved afladningens begyndelse.

2. I et koordinatsystem er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0 .$$

   Angiv centrum og radius for cirklen.

   Bestem en ligning for den tangent til cirklen, der går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

3. Beregn den eksakte værdi af

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx .$$

VEND!

4. Figuren viser på normalfordelingspapir graferne for tre funktioner f, g og h. Netop én af disse er fordelingsfunktion for en normalfordelt stokastisk variabel X.

Gør rede for, hvilken af funktionerne det drejer sig om.

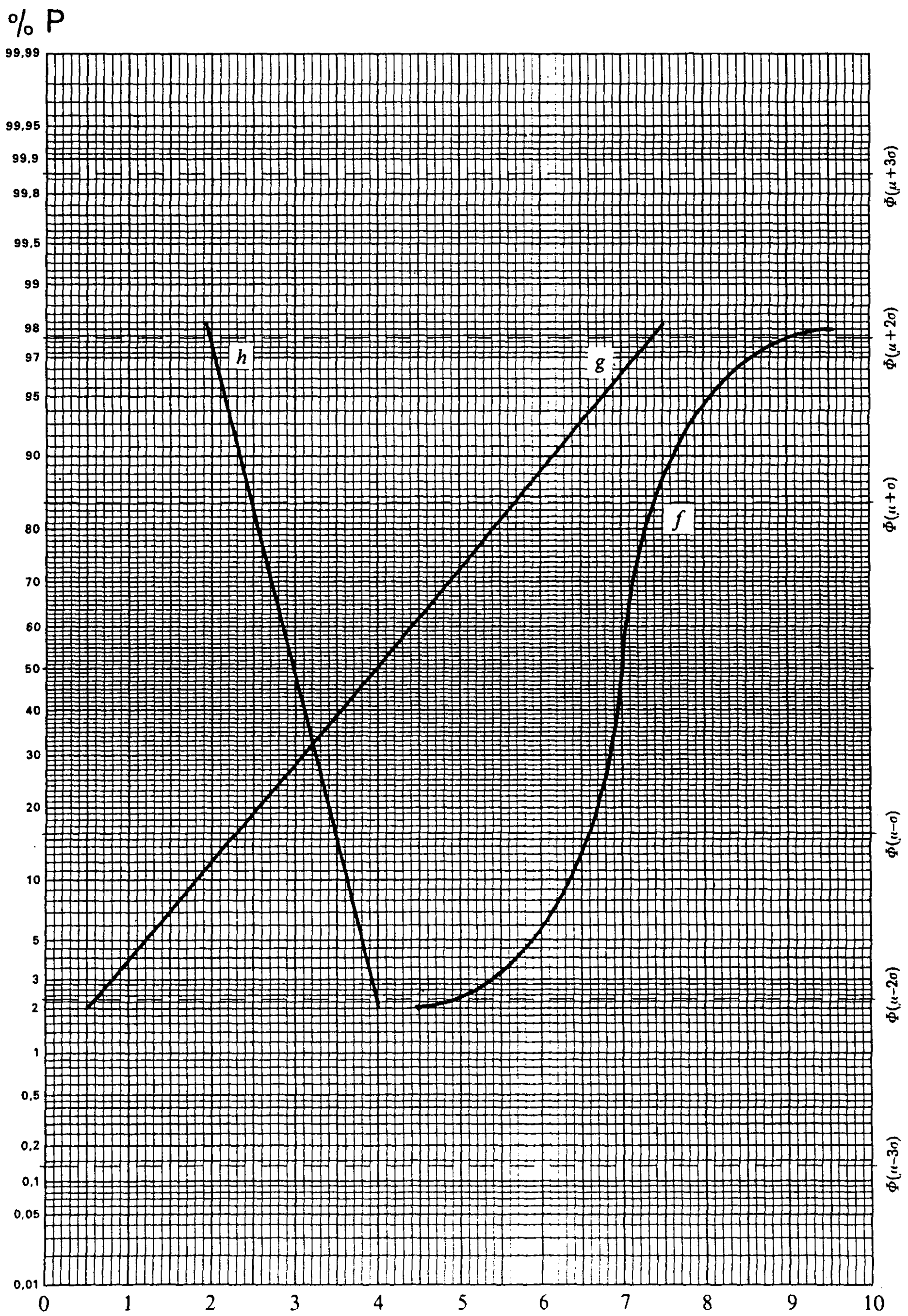
Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(X \leqq 2) \quad \text{og} \quad P(X > 5{,}5) .$$

Bestem det tal t, for hvilket det gælder, at

$$P(X \geqq t) = 0{,}30 .$$



5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0 .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$M = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Punktmængden M drejes 360° om førsteaksen.

Beregn rumfanget af det herved fremkomne omdrejningslegeme.

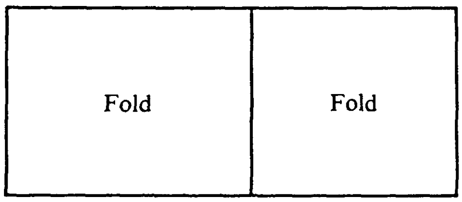
6a. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder, at

$$|\boldsymbol{a}| = 2, \ |\boldsymbol{b}| = 3 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 60° .$$

Bestem skalarproduktet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Beregn længden af vektoren $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ samt en vinkel mellem denne vektor og vektoren $\boldsymbol{a}$.

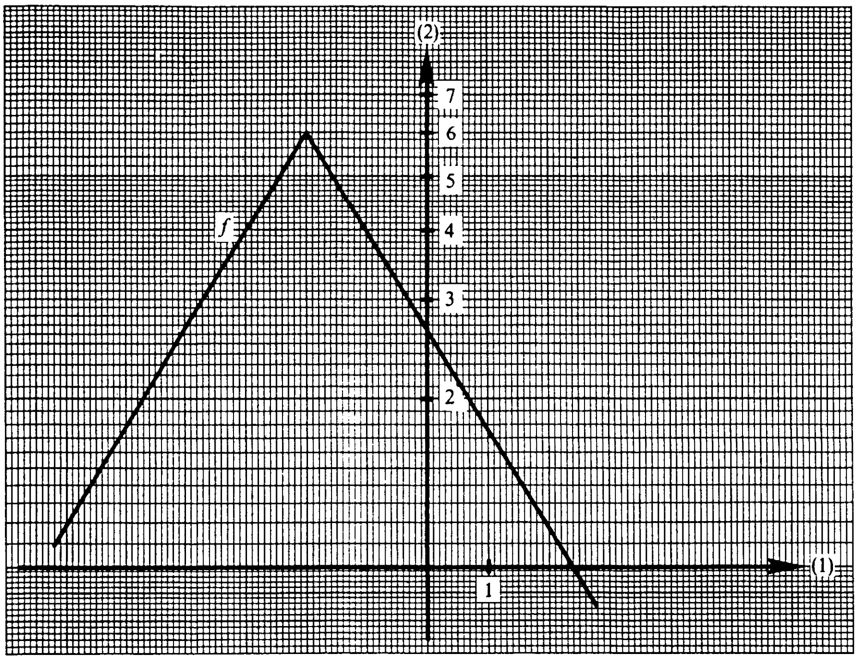
6b. En kvægavler vil indhegne et stykke jord. Indhegningen skal være rektangulær, og ved hjælp af et hegn parallelt med det ene par sider skal den deles i to adskilte folde. Der er i alt 600 meter hegn til rådighed.



Bestem det størst mulige areal af det indhegnede stykke jord.

VEND!

6c.



Figuren viser i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem grafen for en funktion f med definitionsmængde R.

Bestem værdimængden for f.

Angiv en forskrift for f.

6d. Om en bestemt vaccine oplyses, at sandsynligheden er 0,996 for, at den slår an hos en vaccineret person. Der vaccineres 400 personer med denne vaccine.

Beregn sandsynligheden for, at det for højst to af de 400 personer gælder, at deres vaccination ikke slår an.

Beregn det mest sandsynlige antal personer blandt de 400, for hvilket det gælder, at deres vaccination ikke slår an.

Husk, at kun 2 af opgaverne 6a, 6b, 6c og 6d må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1983 **83-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 23. august 1983 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 5 . . ca. 15 points
opgave 6 . . . . ca. 25 points

1. Løs dobbeltuligheden

$$2x-5 < -2-x < \sqrt{x+4}\,.$$

2. I et koordinatsystem er to linjer givet ved ligningerne

$$3x-2y = 4 \quad \text{og} \quad 3x-2y = -12\,.$$

Bestem en ligning for den cirkel, der har disse to linjer som tangenter, og hvis centrum ligger på førsteaksen.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}\,.$$

Bestem et gradtal for den spidse vinkel mellem tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$ og tangenten i punktet $Q(4, f(4))$.

4. Løs for $x \in [0;\, 2\pi]$ ligningen

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} (\sin^2 t - 2)\cos t\, dt = \tfrac{1}{3}\,.$$

VEND!

5. For enhver værdi af k er en funktion f_k fastlagt ved

$$f_k(x) = \frac{1}{x^2+kx+4} .$$

Bestem de værdier af k, for hvilke grafen for f_k har

1) netop én asymptote.

2) netop to asymptoter.

3) netop tre asymptoter.

6a. En befolknings størrelse kan beskrives ved en funktion N, således at $N(t)$ er folketallet til tiden t, hvor t angives i år.
Det antages, at N tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = (0{,}025-0{,}0004\,t)N ,$$

samt at $N(0)=113\cdot 10^6$.

Bestem en forskrift for N, og beregn $N(30)$.

Bestem maksimum for N, og find $\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$.

6b. I et koordinatsystem er givet en ellipse med ligningen

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1 .$$

Tegn ellipsen.

Tre punkter P, Q og R på ellipsen er givet ved

$$P(5\cos t,\ 3\sin t)$$
$$Q(-5,0)$$
$$R(5\cos t,\ -3\sin t) ,$$

hvor $0<t<\pi$.

Bestem den værdi af t, for hvilken arealet af trekant PQR er størst.

Beregn for den fundne værdi af t trekantens vinkler og sider.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1983 **83-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 24. august 1983 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 5a, 5b og 5c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2 .... ca. 15 points
hver af opgaverne 3 og 5 .... ca. 20 points
opgave 4........................ ca. 30 points

1. I et koordinatsystem er der givet to punkter $A(1,3)$ og $B(5,0)$, og for ethvert tal t er givet et punkt $P_t(8+t, 4-t)$.

   Bestem de værdier af t, for hvilke arealet af trekant ABP_t er større end 12.

2. Der er givet et koordinatsystem. En ret affinitet f har linjen med ligningen $x=2$ som affinitetsakse og tallet $\frac{1}{2}$ som forvandlingstal.
   En cirkel C har ligningen

$$x^2+y^2-6y+5 = 0 .$$

   Bestem en ligning for punktmængden $f(C)$.

   Bestem en ligning for punktmængden $f^{-1}(C)$.

3. Et eksperiment består i på tilfældig måde at udtrække netop ét af de ti cifre $0, 1, 2, \ldots, 9$. Dette eksperiment gentages seks gange.

   Bestem sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

   A: cifferet 0 forekommer ikke blandt de udtrukne cifre.
   B: ingen af cifrene 0 og 1 forekommer blandt de udtrukne cifre.
   C: mindst ét af cifrene 0 og 1 forekommer ikke blandt de udtrukne cifre.

VEND!

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x(1 - \ln x) .$$

Undersøg funktionen med henblik på definitionsmængde, nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Bestem værdimængden for f.

Tegn grafen for f, idet det oplyses, at $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq e \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Beregn arealet af M.

5a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2^{x^2-1}, \ x \geqq 0 .$$

Bevis, at funktionen f har en invers (omvendt) funktion f^{-1}.

Beregn $f^{-1}(8)$ og $(f^{-1})'(8)$.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f^{-1}.

5b. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 6$$
$$g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3 .$$

Bevis, at der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder

$$f(x) > g(x) .$$

For ethvert tal k er en punktmængde bestemt ved

$$\{(x,y) \mid k \leqq x \leqq k+1 \wedge g(x) \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Bestem k, således at arealet af denne punktmængde bliver så lille som muligt.

5c. Nedenståendė figur er gengivet efter en artikel i Dansk orgelårbog 1981/82: »Akustiske forhold i danske kirker« af Jørgen Petersen.

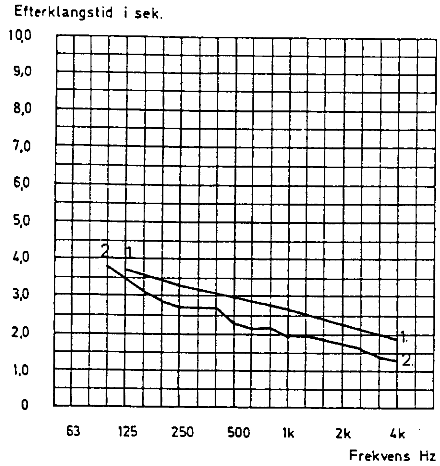


Fig. 2
Efterklangstidens variation med tonehøjden i Sct. Nicolai kirke, Svendborg, målt i tom kirke før og efter at lydregulering er foretaget. Kurve 1: før lydregulering. Kurve 2: efter lydregulering. Lydreguleringen, som blev foretaget af hensyn til en utilstrækkelig taleforståelighed, bestod i, at de hestehårsbetrukne bænkehynder blev erstattet med læderbetrukne hynder, og kokosløberne på gangen blev udlagt på underlagsfilt med gummibelagt overside. Under kirkekoncerter fjernes løbere og underlag, hvorved efterklangstiden hæves betydeligt.

I det følgende betragtes udelukkende den del af kurve 1, der svarer til frekvenser i intervallet 250 Hz-1000 Hz (1k = 1000). I dette interval følger kurve 1 en ret linje. Efterklangstiden svarende til 250 Hz er 3,3 sekunder, og svarende til 1000 Hz er den 2,7 sekunder.

Bestem ved hjælp af dette en forskrift for den funktion, der beskriver frekvensen som funktion af efterklangstiden.

Beregn efterklangstiden for kammertonen, hvis frekvens er 440 Hz.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver efterklangstiden som funktion af frekvensen.

Husk, at kun én af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1983 **83-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 23. august 1983 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 points
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 15 points
opgave 6........................	ca. 20 points

1. Løs for $x \in [-1; 1]$ ligningen

$$(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2)\mathrm{tg}\, x = 0\,.$$

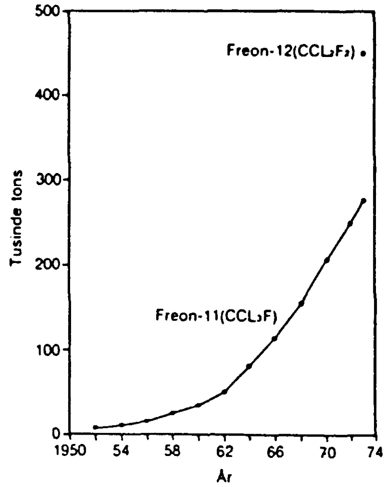
2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}\,.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(\mathrm{e}, f(\mathrm{e}))$.

VEND!

3. I bogen »Meteorologi« af Knud Stelzner (Gyldendal 1982) findes følgende figur:



Den årlige produktion af Freon 11 og 12. Den årlige vækst i produktionen ligger på omkring $8\frac{1}{2}\%$.

Den viste figur indeholder oplysninger om den årlige produktion af freon i perioden 1952-1973. Antag, at den årlige produktion af Freon 11 er vokset eksponentielt fra 10 000 tons i 1952 til 280 000 tons i 1973.

Beregn på grundlag af denne antagelse den årlige procentvise vækst i produktionen af Freon 11 i den nævnte periode.

4. En stokastisk variabel X antager værdierne 2, 4, 6, 8 og 10. Sandsynlighedsfordelingen for X er bestemt ved

$$P(X=t) = \frac{4+t}{50}.$$

Bestem sandsynligheden $P(X \leqq 6)$.

Beregn middelværdi og spredning for X.

5. Der er givet et koordinatsystem. For ethvert tal a er to linjer l og m bestemt ved ligningerne

$$\begin{aligned} l: &\quad 2ax + (2a-3)y = 3 \\ m: &\quad 8x + ay = 6\,. \end{aligned}$$

Bestem for $a=9$ koordinatsættet til linjernes skæringspunkt.

Bestem de tal a, for hvilke linjerne har netop ét skæringspunkt.

6a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4\,.$$

Vis, at grafen for f har to tangenter, der er parallelle med linjen med ligningen $9x+4y=0$.

Bestem en ligning for hver af disse.

Vis, at de to tangenter går gennem hvert sit af de grafpunkter, der svarer til funktionens lokale ekstrema.

6b. I et koordinatsystem er givet to punkter $A(1,3)$ og $B(5,0)$.
For ethvert tal t er givet et punkt $P_t(6+t, 2-t)$.

Vis, at trekant ABP_t er retvinklet for $t=-\frac{3}{2}$.

Bestem de fire tal t, for hvilke trekant ABP_t er retvinklet.

6c. Ved statistisk behandling af karakterer er det almindeligt at opfatte en karakter som resultatet af en vurdering, der ligger i et interval om karakteren. Således kan f.eks. karakteren 8 opfattes som resultatet af en vurdering, der ligger mellem 7,5 og 8,5.
I sin bog »Skal 13-skalaen bestå?« anvender Bruno Giannini følgende sammenhæng mellem karakter og interval:

Karakter	00-03	5	6	7	8	9	10	11	13
Interval	under 4,0	4,0-5,5	5,5-6,5	6,5-7,5	7,5-8,5	8,5-9,5	9,5-10,5	10,5-12,0	over 12,0

Bruno Giannini har i bogen undersøgt baggrunden for 13-skalaen og fundet, at fordelingen af karakterer burde være en normalfordeling med middelværdien 8, samt at det blev anset for rimeligt, at 1% af eleverne opnår karakteren 13.

Bestem ud fra dette spredningen for denne normalfordeling.

Hvor mange procent af eleverne må forventes at få 5 eller derunder?

Hvor mange procent af eleverne må forventes at få 5 eller derunder, hvis middelværdien falder til 7, mens spredningen er uændret?

Husk, at kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Tirsdag den 8. maj 1984 kl. 9.00-13.00

Kun 3 af opgaverne 5a, 5b, 5c, 5d og 5e må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 points
opgave 5	ca. 15 points
opgave 4	ca. 25 points

1. Løs med hensyn til x ligningen

$$\sin x = \cos 2x .$$

2. I et koordinatsystem har en ret affinitet med positivt forvandlingstal linjen med ligningen $y = 2$ som affinitetsakse. Ved den rette affinitet afbildes en linje, der danner en vinkel på 30° med førsteaksen, på en linje, hvis vinkel med førsteaksen er 60°.

   Bestem forvandlingstallet.

3. I et koordinatsystem er en punktmængde bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2 \wedge 0 \leqq y \leqq \sqrt{x-1}\,e^{(x-1)^2}\} .$$

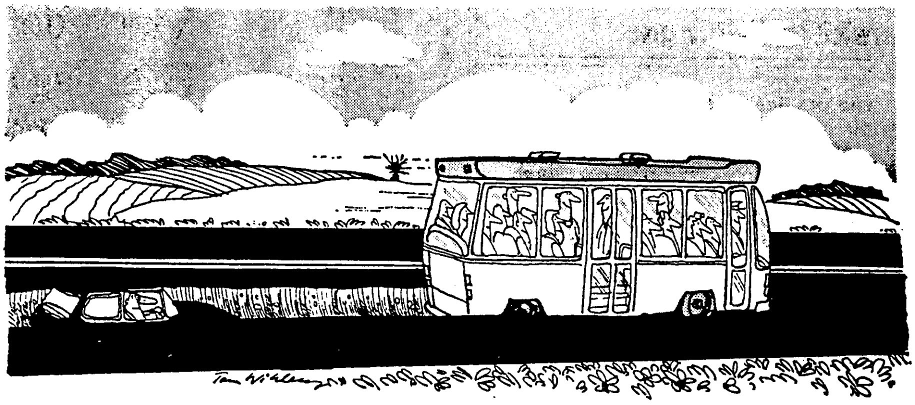
   Ved rotation af denne punktmængde om førsteaksen fremkommer et omdrejningslegeme.

   Bestem rumfanget af dette omdrejningslegeme.

VEND!

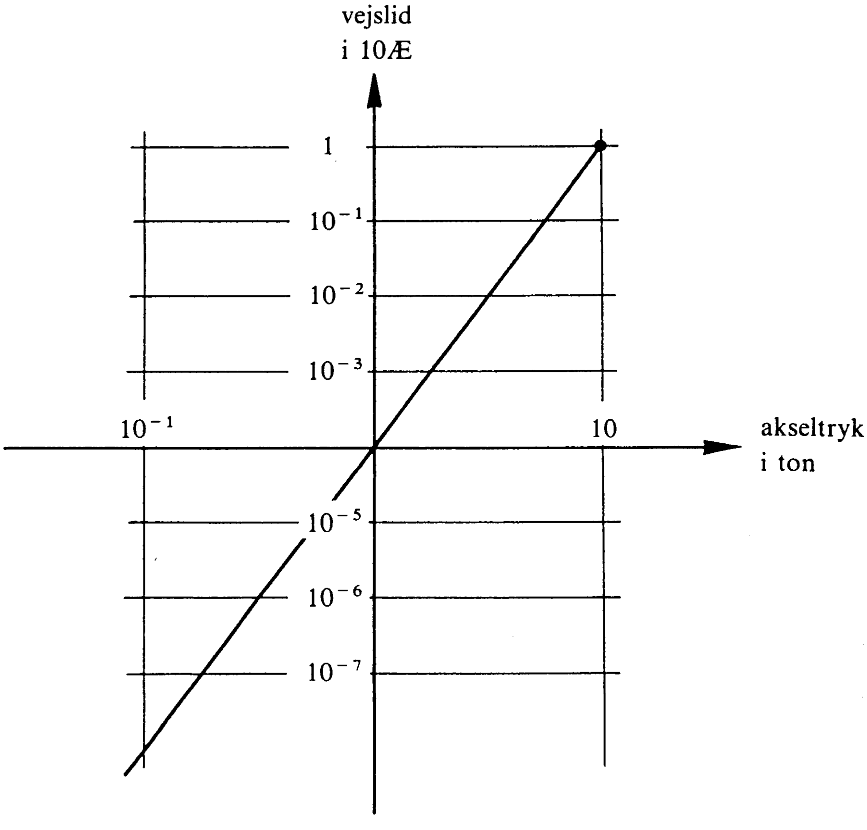
4. Overskrift og illustration fra Berlingske Tidende tirsdag den 16. marts 1982:

En bus slider på vejen som 10.000 biler



Stadig flere lastbiler og busser kræver øget vedligeholdelse af vejnettet.

Forsøg har vist, at trafikkens slid på vejnettet afhænger af køretøjernes akseltryk. Et køretøjs vejslid er summen af de enkelte akslers vejslid.
Figuren nedenfor viser en aksels vejslid som funktion af trykket på denne aksel (vejslid måles i enheden 10Æ og akseltryk i ton).



Bemærk, at koordinatsystemet er dobbeltlogaritmisk,
og at der er forskellige enheder på akserne.

Bestem en forskrift for den funktion, der angiver vejsliddet som funktion af en aksels tryk.

Hvor stort er vejsliddet fra en aksel, når trykket på akslen er henholdsvis 2,5 tons og 5,0 tons?

I en bus med fuldt læs er trykket på forakslen 5,0 tons, og trykket på bagakslen er 8,0 tons.

Beregn bussens vejslid.

Hvor stort et antal personbiler med tryk på 0,5 ton og 0,8 ton på henholdsvis for- og bagaksel har tilsammen et vejslid, der svarer til bussens vejslid?

En bestemt type lastbil har én foraksel og to bagaksler. Ved forsøg er lastbilens vejslid målt til 1,8 10Æ. Det antages, at trykket på de to bagaksler er ens, og at trykket på forakslen er 50% af trykket på en bagaksel.

Beregn trykket på hver af lastbilens aksler.

5a. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{y}$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,1)$.

5b. En mængde M er bestemt ved

$$M = \{(x,y) \mid 2 \leqq x+y \leqq 6 \wedge 0 \leqq x \leqq 4 \wedge 0 \leqq y\}.$$

Bestem såvel maksimum som minimum for funktionen f givet ved

$$f(x,y) = 13x+12y, \quad (x,y) \in M.$$

5c. To personer A og B kaster 3 gange med hver sin symmetriske mønt.

Bestem sandsynligheden for, at A får henholdsvis 0, 1, 2 og 3 plat.

Bestem sandsynligheden for, at A og B får lige mange plat.

Bestem sandsynligheden for, at A får flere plat end B.

5d. I et koordinatsystem er en firkant $ABCD$ bestemt ved, at de fire vinkelspidser har koordinatsættene

$$A(3,3), \quad B(5,7), \quad C(13,9) \quad \text{og} \quad D(11,1).$$

Midtpunkterne af firkantens sider danner en ny firkant.

Vis, at denne firkant er et parallelogram.

Beregn sider og vinkler i dette parallelogram, og beregn dets areal.

VEND!

5e. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 3\cos^2 t \\ y &= \tan t \end{aligned} \quad , \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \, .$$

Gør rede for, at kurven har en lodret tangent og en lodret asymptote.

Skitsér kurven.

Husk, at kun 3 af opgaverne 5a, 5b, 5c, 5d og 5e må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1984 **84-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 9. maj 1984 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 points
opgave 3........................	ca. 15 points
opgave 5........................	ca. 20 points
opgave 4........................	ca. 25 points

1. For ethvert tal a er en funktion f givet ved

$$f(x) = ax^3+2x^2+4x+6 .$$

Bestem de tal a, for hvilke f er en voksende funktion.

2. I et koordinatsystem er for ethvert tal t givet to vektorer

$$\boldsymbol{a}(2,t) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}(t-2,t+1) .$$

Bestem de tal t, for hvilke de to vektorer er parallelle.

Bestem t, således at længden af $\boldsymbol{b}$ bliver mindst mulig.

3. På et bord ligger to spil kort. Det ene er et sædvanligt spil med 52 kort, mens det andet er et spil, hvorfra samtlige hjerter er fjernet. På tilfældig måde tages fra et tilfældigt af de to spil 4 kort på én gang.

Bestem sandsynligheden for, at de 4 kort alle er røde.

Bestem sandsynligheden for, at de 4 kort blev taget fra det sædvanlige spil, når det oplyses, at alle 4 kort er røde.

VEND!

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tan^2 x - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Undersøg f og dens graf med henblik på fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Bestem arealet af punktmængden M bestemt ved

$$\{(x,y) \mid f(x) \leqq y \leqq 0\}.$$

5a. Bestem til differentialligningen

$$y'' = -4y$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0, -3)$, og hvis graf i punktet P har en tangent med hældningskoefficienten $-\frac{5}{2}$.

Bestem værdimængden for denne funktion.

5b. Blyforurening af græs stammer hovedsagelig fra motorkøretøjers forbrænding af blyholdig benzin på veje. Blyindholdet i græs ved en vej har vist sig tilnærmelsesvis at aftage eksponentielt med afstanden fra vejkanten, og »halveringsafstanden« er 15 m.
Ved en motorvej målte man et blyindhold på 50 mg pr. kg græs i afstanden 8 m fra vejkanten.

Bestem blyindholdet i græsset ved vejkanten.

Hvor langt væk fra vejkanten skal køer græsse, når et krav fra EF om højst 10 mg bly pr. kg i græs til foder skal overholdes?

Med $f(x)$ betegnes blyindholdet i græsset (målt i mg pr. kg) i afstanden x (målt i meter) fra vejkanten. Det gennemsnitlige blyindhold i en 50 meter bred bræmme nærmest vejen er da givet ved

$$\frac{1}{50}\int_0^{50} f(x)\,dx.$$

Beregn dette gennemsnit.

5c. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{6}{5}\sqrt{x^2-4x-21}.$$

Bestem definitionsmængden for f, og undersøg monotoniforholdene for f.

Tegn grafen for f.

Gør rede for, at grafen for f er en del af en hyperbel, og angiv en ligning for denne hyperbel.

Grafen for f har to asymptoter.

Bestem en ligning for hver af disse.

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1984 **84-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 8. maj 1984 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 8a, 8b og 8c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-6	ca. 10 points
opgave 8........................	ca. 15 points
opgave 7........................	ca. 25 points

1. Løs (gerne grafisk) uligheden

$$x-1 < \frac{2}{x}.$$

2. Beregn den eksakte værdi af integralet

$$\int_1^7 \frac{x}{x^2+1}\,dx .$$

3. Der er givet et sandsynlighedsfelt med sandsynlighedsfunktion P.
Om to hændelser A og B gælder

$$P(A \cup B) = 0{,}6, \quad P(A \mid B) = 0{,}5 \quad \text{og} \quad P(B) = 0{,}3 .$$

Bestem $P(A \cap B)$ og $P(A \setminus B)$.

Undersøg, om A og B er uafhængige.

VEND!

4. Når en lysstråle passerer gennem en bestemt type glasplade, formindskes lysstyrken med 15%.

Hvor mange af den type glasplader er det nødvendigt at stille sammen, hvis lysstrålen efter passage af pladerne skal have en lysstyrke, der er under 10% af den oprindelige?

5. Løs for $x \in [0; 2\pi]$ ligningen

$$3\sin\frac{x}{2} = 1{,}5 \ .$$

6. En virksomhed fremstiller metalplader. I forbindelse med produktionen kontrolleres pladetykkelsen. Måling af mange plader har vist, at 1,2% af pladerne har en tykkelse under 14,0 mm, og at 95,4% har en tykkelse under 16,0 mm.
Det antages, at pladetykkelsen er normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for pladetykkelsen.

7. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{2x+3} \ .$$

Bestem en ligning for den tangent til grafen for f, hvis røringspunkt P har førstekoordinat 3.

Tegn grafen og tangenten i et koordinatsystem.

Røringspunktet P, tangentens skæringspunkt Q med førsteaksen samt punktet $R(3,0)$ danner en trekant.

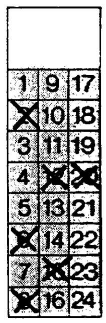
Beregn sider og vinkler i trekant PQR.

Beregn trekantens areal.

Grafen for f deler trekanten i to punktmængder.

Beregn arealet af hver af disse.

8a. For at deltage i »Lykke-Lotto« skal man afkrydse 6 felter i et skema med tallene $1, 2, 3, \ldots, 24$. På figuren ses en spillerække fra »Lykke-Lotto« 1983.



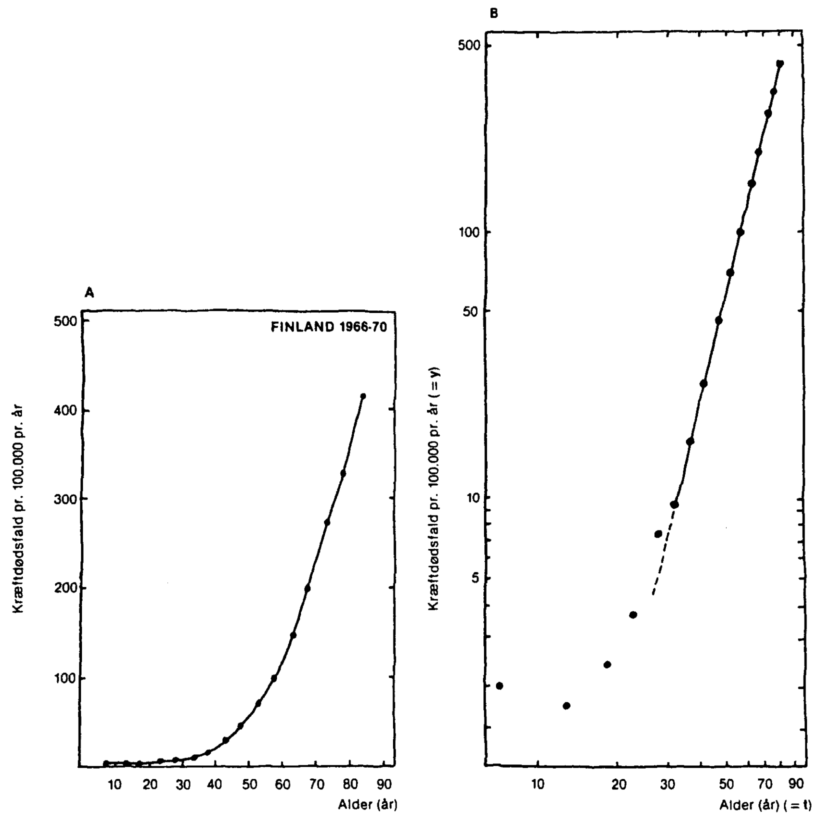
Gør rede for, at der kan laves i alt 134 596 forskellige spillerækker.

Der udtrækkes 6 vindertal, og af de 134 596 spillerækker vil netop én indeholde de 6 udtrukne vindertal.

Hvor mange spillerækker indeholder slet ingen af de 6 vindertal?

Hvor mange spillerækker indeholder netop 5 af vindertallene?

8b. Nedenstående figur stammer fra bogen »Kræft og biologi« af Ove Jørgensen og viser det årlige antal kræftdødsfald pr. 100 000 personer som funktion af alderen. (Materialet er fra Finland, indsamlet i femårsperioden 1966-1970).



Grafen i det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem viser, at punkterne svarende til alderen 30 år og opefter ligger på ret linje.
Det vil altså sige, at sammenhængen mellem antallet y af kræftdødsfald pr. 100 000 pr. år og alderen t i år kan beskrives ved et udtryk af formen

$$y = bt^a, \quad t \geqq 30 .$$

Bestem tallene a og b, idet det oplyses, at to af punkterne på grafen har koordinatsættene $(58, 100)$ og $(78, 327)$.

8c. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2}{e}x + e^{-2x} .$$

Bestem værdimængden for f.

Husk, at kun én af opgaverne 8a, 8b og 8c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1984 **84-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 21. august 1984 kl. 9.00-13.00

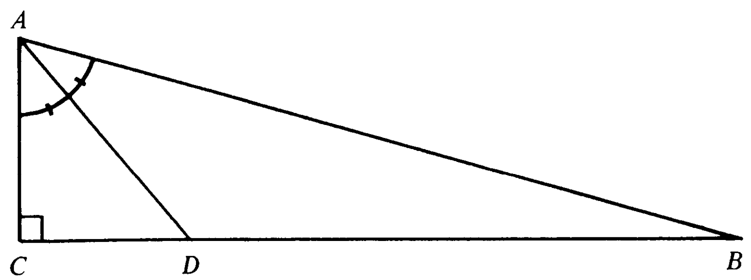
Dette opgavesæt består af 12 opgaver.

Kun 10 af disse opgaver må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1-12 .... ca. 10 points

1.



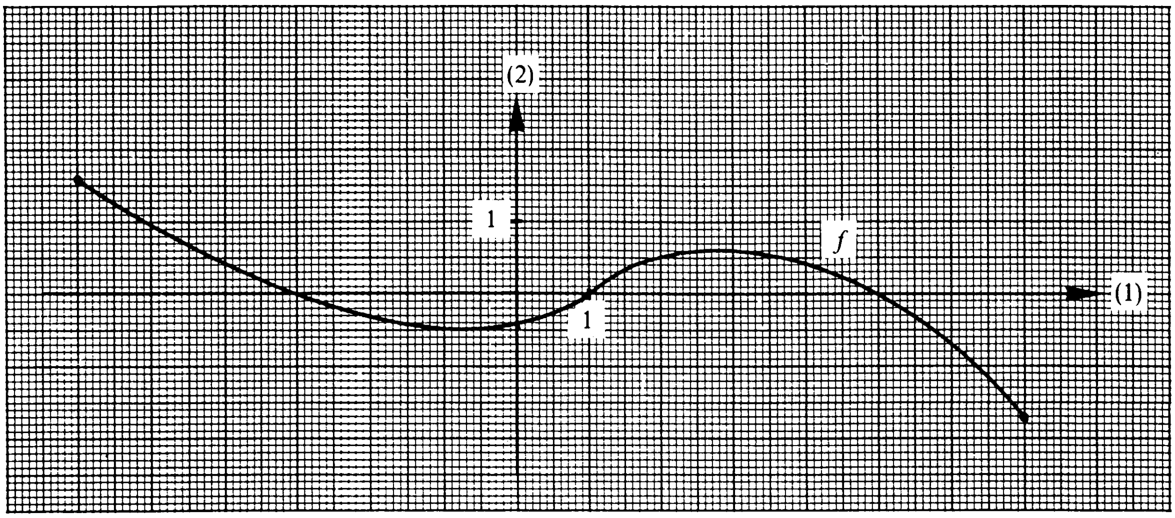
I en retvinklet trekant ABC halveres vinkel A af AD (se figur).
Endvidere er $|AD| = 4$ og $|AC| = 3$.

Beregn vinkel A og vinkel B.

Beregn $|AB|$ og $|BC|$.

VEND!

2. Figuren viser grafen for en funktion f.



Løs uligheden

$$\frac{f(x)}{x-2} \geqq 0 .$$

3. En funktion er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}, \qquad y>0 ,$$

og funktionens graf indeholder punktet $P(6,4)$.

Bestem funktionen.

4. I et koordinatsystem er givet vektoren $\boldsymbol{a}(2,-3)$.
Om en vektor $\boldsymbol{b}$ oplyses, at

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4 \quad \text{og} \quad \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} = -19 .$$

Bestem koordinatsættet for $\boldsymbol{b}$.

5. Bestem

$$\lim_{x\to\ln 2} \frac{e^{2x}+e^x-6}{e^x-2} .$$

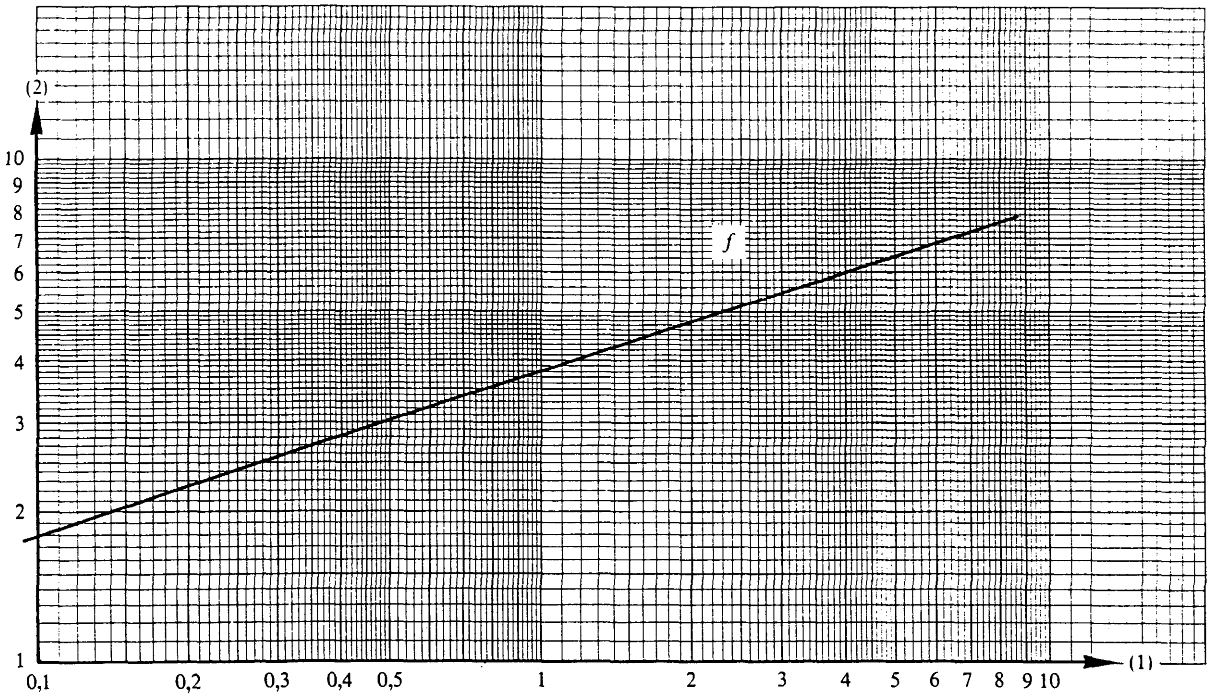
6. I et koordinatsystem er to punktmængder S og l bestemt ved

$$S:\ y = \sin x, \qquad x \in [0;\, 2\pi] .$$

$$l:\ x-2y+2 = 0 .$$

Beregn koordinatsættet til det punkt i S, der har mindst afstand til l.

7.



Figuren viser grafen for en funktion f i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bestem en forskrift for f.

8. Mængden af et bestemt radioaktivt stof aftager eksponentielt med tiden. Efter 6 timer er 70% af stoffet tilbage.

   Hvor mange procent af stoffet er tilbage efter 18 timer?

   Efter hvor lang tid er 5% af stoffet tilbage?

9. I mængden R er en komposition $*$ fastlagt ved, at for reelle tal x og y er

$$x*y = x+y+xy\ .$$

   Vis, at $(\mathsf{R}, *)$ har et neutralt element.

   Vis, at funktionen f bestemt ved

$$f(x) = x+1$$

   er en isomorfi af $(\mathsf{R}, *)$ på $(\mathsf{R}, \cdot)$.

VEND!

10. I planen er givet et koordinatsystem. En afbildning f er bestemt ved

$$f: (x,y) \curvearrowright (x+y+1, \; -x+y+1) \; .$$

Afbildningen f er sammensat af en drejning i positiv omløbsretning om punktet $C(1,-1)$ og en multiplikation med positiv multiplikationsfaktor ud fra C.

Bestem en drejningsvinkel og multiplikationsfaktoren.

11. Et eksperiment E består i at kaste to symmetriske terninger, en rød og en grøn.

Bestem sandsynligheden for, at den røde terning viser mere end den grønne.

Eksperimentet E udføres 12 gange.

Beregn sandsynligheden for, at den røde terning netop 5 af de 12 gange viser mere end den grønne.

12. Beregn den eksakte værdi af

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{4^x}{4^x+2}\,dx \; .$$

Husk, at kun 10 af opgaverne må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1984 **84-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 22. august 1984 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 4a, 4b og 4c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 points
hver af opgaverne 2 og 4	ca. 20 points
opgave 3	ca. 25 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{e^x+3} - x, \qquad x \in [0;\, 3]\,.$$

Bestem værdimængden for f.

2. I et koordinatsystem har en punktmængde M ligningen

$$4x^2+y^2-24x-24y+164 = 0\,.$$

Tegn M.

Med f og g betegnes følgende afbildninger af planen på sig selv:

f er spejlingen i linjen med ligningen $y=x$,
g er den rette affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og forvandlingstal 4.

Tegn $g(f(M))$ i samme koordinatsystem som M.

For en multiplikation h med positiv multiplikationsfaktor om et punkt C gælder det, at

$$h(M) = g(f(M))\,.$$

Bestem koordinatsættet til C og multiplikationsfaktoren.

VEND!

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sin 2x} .$$

Undersøg i intervallet $]0;\pi[$ funktionen og dens graf med henblik på fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen for f i dette interval.

Den tegnede graf og linjen med ligningen $y=2$ afgrænser en punktmængde, der har et areal. Denne punktmængde drejes 360° om førsteaksen.

Beregn rumfanget af det herved fremkomne omdrejningslegeme.

4a. Et eksperiment består i to kast med en terning. Tre hændelser A, B og C er givet ved

A: Summen af de to øjental er lige.
B: De to øjental er forskellige.
C: Første øjental er 4.

Bestem sandsynligheden for hver af de tre hændelser.

Undersøg for hvert af følgende par af hændelser, om hændelserne er uafhængige:

1) A og B. 2) A og C. 3) B og C.

Bestem sandsynligheden for hver af hændelserne $A \cup B$, $A \cup C$ og $B \cup C$.

4b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = |x^3 - x| , \quad x \in \mathrm{R} .$$

Undersøg funktionen f og dens graf med hensyn til monotoniforhold og lokale ekstrema.

Skitsér grafen for f.

Gør for ethvert reelt tal k rede for antallet af løsninger til ligningen $f(x)=k$.

4c. Ved en bestemt type kemisk proces, hvor to stoffer A og B reagerer med hinanden, gælder, at reaktionshastigheden v er proportional med koncentrationerne af de reagerende stoffer. Hvis de to stoffers begyndelseskoncentration er den samme, vil de to stoffer under hele processen have samme koncentration. Idet denne fælles koncentration kaldes y, gælder der, at

$$v = -\frac{dy}{dt} = ky^2 ,$$

hvor k er en positiv konstant.

Bestem y som funktion af tiden t, idet den fælles begyndelseskoncentration for A og B til tiden $t = 0$ kaldes y_0.

Et eksempel på den omtalte type kemisk proces foreligger, når ethylacetat reagerer med natriumhydroxid:

$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH \longrightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH .$$

Ved denne proces har k værdien 6,50, når koncentrationen angives i mol pr. liter og tiden i minutter. Den fælles begyndelseskoncentration y_0 antages at være 0,01 mol pr. liter.

Hvor mange minutter varer det, før koncentrationen er faldet til en tiendedel af begyndelseskoncentrationen?

Husk, at kun 2 af opgaverne 4a, 4b og 4c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1984 **84-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
OG
NATURFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 21. august 1984 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 ...... ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 7 ...... ca. 15 points
opgave 6....................... ca. 25 points

1. I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\boldsymbol{a}(2,5) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}(3,4)\ .$$

Beregn et gradtal for vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

Beregn arealet af det af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspændte parallelogram.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2\sqrt{3x+1}\ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.

VEND!

3. Når en bestemt type gammastråler sendes gennem en blyvæg, er der følgende sammenhæng mellem intensiteten I_0 før passage af blyvæggen og intensiteten I efter passage:

$$I = I_0 e^{-kx},$$

hvor x angiver blyvæggens tykkelse, målt i mm, og k er en konstant.
En blyvæg på 16 mm reducerer intensiteten med 60%.

Hvor tyk skal en blyvæg være, for at den halverer intensiteten?

4. Følgende figur er fra bogen »Facts from Figures« af M. J. Moroney:

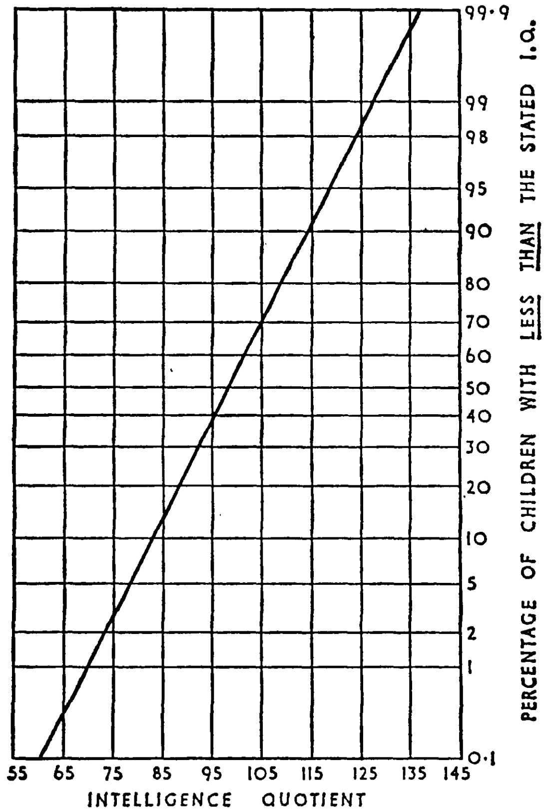


Fig. 16. The ogives of Fig. 9 presented as a straight line by using probability paper. Note how scale is crowded at the centre – just as I.Q. itself tends to bunch around the average value

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver intelligenskvotienten (I.Q.) hos et tilfældigt valgt barn. X er da normalfordelt, og grafen på figuren er grafen for fordelingsfunktionen for X.

Tegn grafen på normalfordelingspapir, og bestem middelværdi og spredning for X.

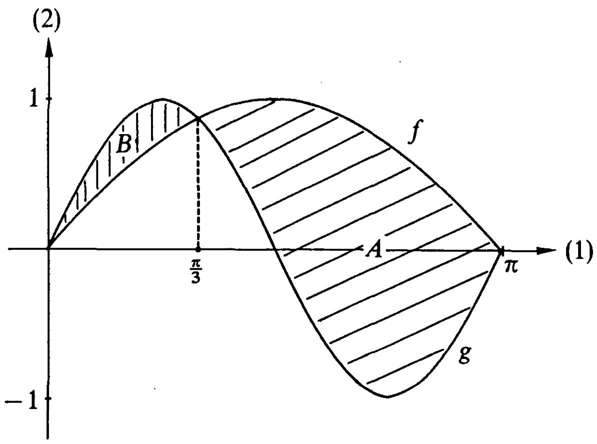
Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt barn

1) har intelligenskvotient mellem 90 og 110.
2) har intelligenskvotient 130 eller derover.

5. Nedenstående figur viser graferne for to funktioner f og g givet ved

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0;\pi] \quad \text{og}$$
$$g(x) = \sin 2x, \quad x \in [0;\pi]\,.$$

De to grafer afgrænser to punktmængder A og B som vist på figuren.



Vis, at arealet af A er 9 gange så stort som arealet af B.

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4\,.$$

Undersøg f med henblik på monotoniforhold og lokale ekstrema.

Bestem nulpunkter og fortegn for f.

Tegn grafen for f.

En linje m har ligningen $y = -x + 1$.

Tegn linjen m, og bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen m og grafen for f.

Linjen m og grafen for f afgrænser i anden kvadrant en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

7a. På et gymnasium skal eleverne i 3.g planlægge sidste skoledag. I klassen 3x skal nedsættes et udvalg på 4 personer, der vælges ved lodtrækning.

Klassen 3x består af 9 elever fra mF-grenen, 7 elever fra mN-grenen og 8 elever fra mS-grenen.

Bestem sandsynligheden for, at ingen elev fra mF-grenen kommer i udvalget.

Bestem sandsynligheden for, at alle tre grene bliver repræsenteret i udvalget.

VEND!

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x\,2^x\,.$$

Løs hver af ligningerne

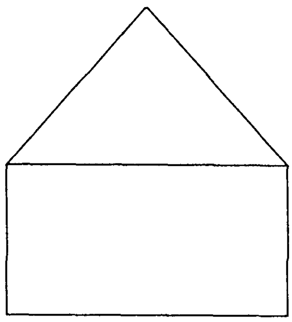
1) $f'(x) = 0\,.$

2) $f'(x) = f(x)\,.$

7c. Nedenstående tekst er et uddrag af dagsordenen for et kommunalbestyrelsesmøde i en landkommune.

> J. nr. B.26.830412. - Matr. nr. 9 hq, [redacted]
> beliggende [redacted]
> \---
>
> Ved ansøgning af 11/4-1983 ansøger ejeren af ovennævnte ejendom om tilladelse til opførelse af et énfamiliehus i 1½ etage på samme.
>
> Tagetagen agtes udført med en taghældning på 50°, hvilket er i strid med den på ejendommen tinglyste deklaration, som foreskriver en taghældning på 45°.
>
> Ansøgningen har været forelagt teknisk udvalg i møde den 2/5-1983, hvor man vedtog ikke at imødekomme det ansøgte.

Som det fremgår af teksten, ville teknisk udvalg ikke imødekomme en ansøgning om at hæve taghældningen fra de tilladte 45° til 50°.
I det følgende antages, at det planlagte parcelhus skulle have en bredde på 9,20 m og sædvanlig symmetrisk gavlprofil (se figur).



Beregn den ekstra højde, huset ville få med en taghældning på 50°, sammenlignet med den højde, en taghældning på 45° ville give.

Hvor stor kunne taghældningen blive, hvis teknisk udvalg kunne acceptere en højde på 0,50 m mere end den højde, en taghældning på 45° ville give?

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Mandag den 13. maj 1985 kl. 9.00-13.00

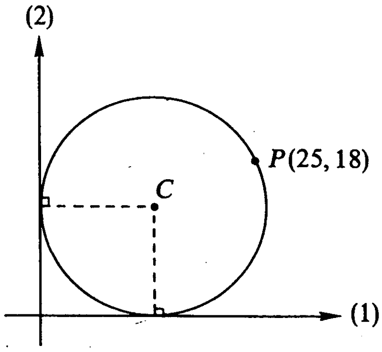
Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 10 points
opgave 5	ca. 15 points
opgave 6	ca. 20 points
opgave 7	ca. 25 points

1. Figuren til højre viser en cirkel, hvis centrum C ligger i første kvadrant. Cirklen går gennem punktet $P(25,18)$, og den tangerer begge koordinatakser.

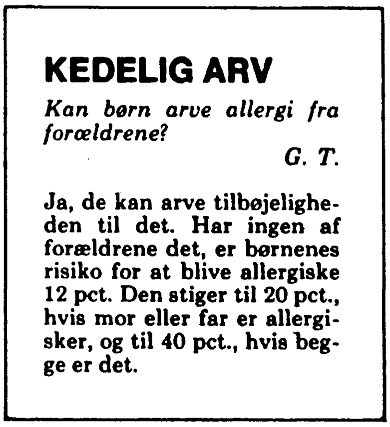
   Beregn cirklens radius.



2. Det viste udklip stammer fra Ekstrabladets lægebrevkasse fredag den 4. marts 1983.
   Det antages, at et forældrepar får 4 børn.

   Bestem sandsynligheden for, at ingen af børnene bliver allergiske, hvis begge forældre er allergiske.

   Bestem sandsynligheden for, at mindst ét barn bliver allergisk, hvis ingen af forældrene er allergiske.



KEDELIG ARV

Kan børn arve allergi fra forældrene?

G. T.

Ja, de kan arve tilbøjeligheden til det. Har ingen af forældrene det, er børnenes risiko for at blive allergiske 12 pct. Den stiger til 20 pct., hvis mor eller far er allergisker, og til 40 pct., hvis begge er det.

VEND!

3. Løs uligheden

$$\cos^2 x \leqq \tfrac{3}{4}, \quad x \in [0; 2\pi].$$

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2^{x+1}}{2^x + 2^{-x}}.$$

Bestem hver af grænseværdierne $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}, \quad x \in \mathsf{R}.$$

Bestem værdimængden for f.

6.

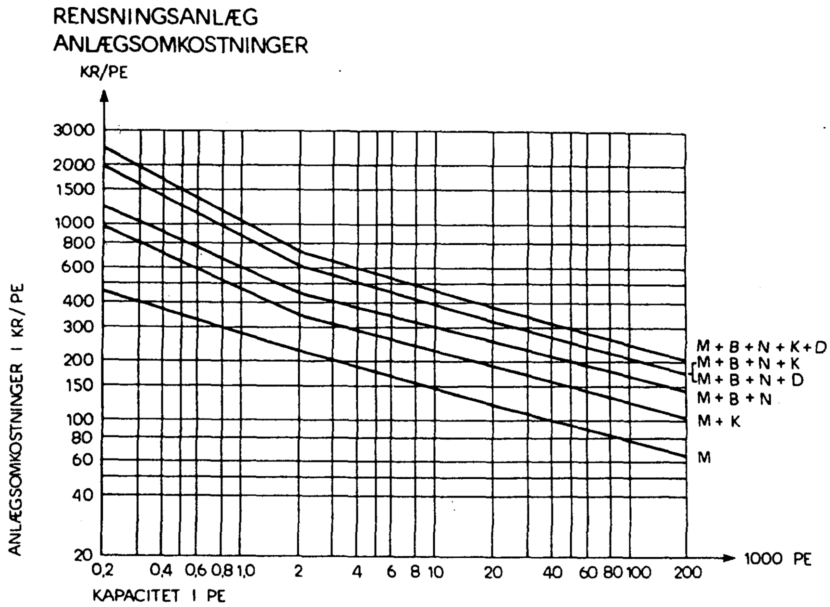


Fig. 9.6. Anlægsomkostninger for rensningsanlæg med forskellig funktionsmæssig opbygning. M = mekanisk, B = biologisk, K = kemisk, N = nitrifikation, D = denitrifikation (Cowiconsult).

Ovenstående figur (fra bogen »Spildevandsteknik« af Leif Winther m.fl.) viser for forskellige funktionsmæssige opbygninger anlægsomkostningerne for rensningsanlæg i kr. pr. personækvivalent (PE) som funktion af rensningsanlæggets kapacitet i 1000 PE. (1 PE svarer til 200 liter spildevand pr. døgn med en ganske bestemt forureningsgrad).
En kommunalbestyrelse skal planlægge et rensningsanlæg med kapacitet 50 000 PE og kan højst betale 8 millioner kr. for anlægget.

Hvilke funktionsmæssige opbygninger kan anlægget så få?

Beregn anlægsomkostningerne for et mekanisk rensningsanlæg med kapacitet 3000 PE (stationsby) og for et mekanisk rensningsanlæg med kapacitet 40 000 PE (købstad).

Angiv en forskrift for den funktion, der angiver anlægsomkostningerne for mekaniske rensningsanlæg som funktion af kapaciteten x, målt i 1000 PE, for $x \in [2; 200]$.

7a. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$(x, y) = (t^3 + 1{,}4t - 2t^2), \quad t \in \mathrm{R}.$$

Bestem koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatakserne.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori kurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatakserne.

Tegn kurven.

Kurven afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

7b. En fabrik fremstiller to produkter P_1 og P_2.
I afdeling A foretages den indledende forarbejdning, og der kan pr. år forarbejdes højst 25 000 enheder af P_1 og højst 15 000 enheder af P_2.
Både P_1 og P_2 skal gennemgå en speciel færdigforarbejdning i afdeling B. I denne afdeling lægger hver enhed af P_1 og P_2 beslag på henholdsvis $\frac{1}{30000}$ og $\frac{1}{36000}$ af den årlige kapacitet.
Der foreligger en aftale med medarbejderne om, at den årlige produktion af P_1 og P_2 tilsammen skal være mindst 10 000 enheder.
Det antages, at produktion af 1 enhed af P_1 giver fabrikken et dækningsbidrag på 40 kr., mens 1 enhed af P_2 giver et dækningsbidrag på 35 kr.

Hvilken årlig produktion af P_1 og P_2 giver henholdsvis det største og det mindste samlede dækningsbidrag?

På et tidspunkt stiger dækningsbidraget for hver enhed af P_1 og P_2 til henholdsvis 48 kr. og 40 kr.

Hvordan kan den årlige produktion af P_1 og P_2 nu tilrettelægges, hvis man vil opnå det største samlede dækningsbidrag?

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1985 **85-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

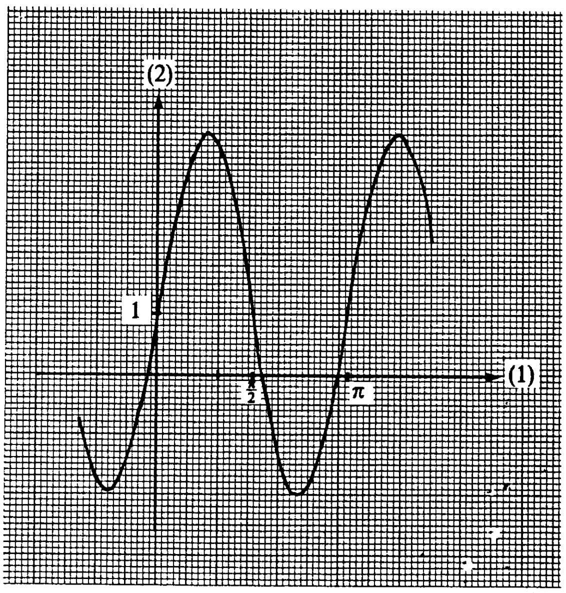
Tirsdag den 14. maj 1985 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a, 6b og 6c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 10 points
hver af opgaverne 2 og 3 . . . . ca. 15 points
hver af opgaverne 4, 5 og 6 . . . . . . ca. 20 points

1.



Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = a\sin(bx) + c\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

hvor a, b og c er positive konstanter.

Bestem a, b og c ved hjælp af figuren.

VEND!

2. Vandindholdet i luften omkring os afhænger bl.a. af luftens temperatur. For luft, der er mættet med vanddamp, er der i nedenstående tabel anført nogle sammenhørende værdier af luftens temperatur og mængden af vand pr. m^3 luft.

Temperatur °C	5,0	10,0	15,0	20,0
Vandmængde g/m^3	6,80	9,40	12,80	17,30

Vis, at vandmængden med god tilnærmelse er en eksponentielt voksende funktion af temperaturen, og bestem en forskrift for denne funktion.

I en stue er lufttemperaturen 20,0°C, og den relative luftfugtighed er 60%. Det betyder, at 1 m^3 luft kun indeholder 60% af den vandmængde, der kunne være ved den pågældende temperatur, hvis luften var mættet med vanddamp. Når luften afkøles, vil den relative luftfugtighed vokse.

Ved hvilken temperatur vil luften være mættet med vanddamp?

3. En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y'' = (\ln 2)^2 y ,$$

og dens graf indeholder punkterne $A(3,\frac{3}{2})$ og $B(1,\frac{9}{4})$.

Bestem en forskrift for funktionen f.

4. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{\frac{8}{x}-2} .$$

Bestem definitionsmængden for f.

Vis, at f er aftagende.

Vis, at grafen for f har en lodret asymptote og en lodret (halv)tangent.

Tegn grafen for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 4 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere M om førsteaksen.

5. En ellipse $\mathscr{E}$ har ligningen

$$16x^2+25y^2+32x-100y-284 = 0 .$$

Tegn $\mathscr{E}$ i et koordinatsystem.

En linje l har ligningen

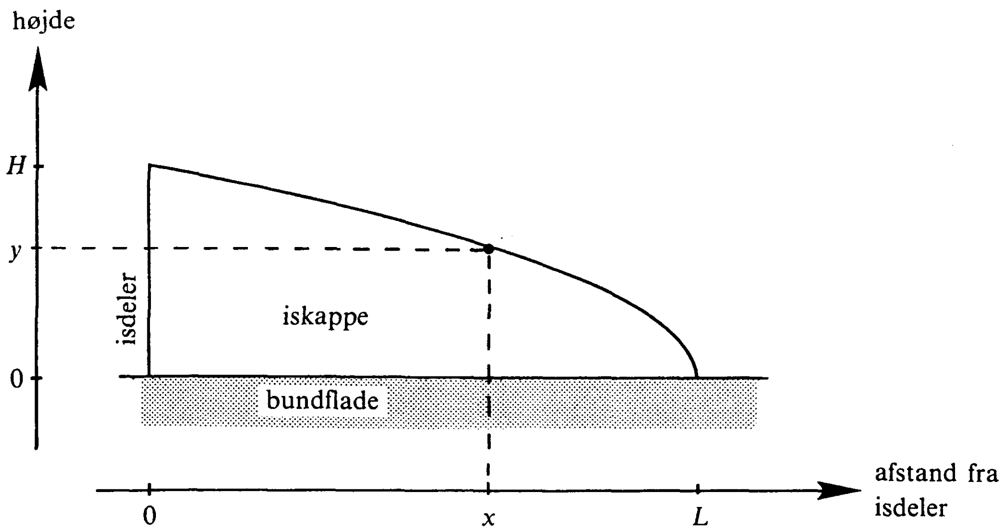
$$4x-5y+10 = 0 .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de to punkter A og B, i hvilke l skærer $\mathscr{E}$.

Linjestykket AB og det linjestykke, der udgøres af ellipsens lodrette akse, er diagonaler i en firkant.

Beregn arealet af denne firkant.

6a. En iskappe er en speciel gletscherform, hvor isen spreder sig ud i alle retninger fra et sted, der kaldes isdeleren. I det følgende antages det om en iskappe, at den hviler på en vandret bundflade og ikke ændrer form.
Nedenstående figur viser et lodret snit gennem en del af iskappen. På figuren ligger denne del til højre for isdeleren.



Som det fremgår af figuren, vil et vilkårligt punkt på iskappens overflade x meter fra isdeleren have en højde y meter over bundfladen. Ved isranden ($y=0$) er der L meter til isdeleren, og ved isdeleren ($x=0$) er iskappens højde H meter.
I en model for iskapper indgår differentialligningen

$$y\frac{dy}{dx} = -k\,,$$

hvor k er en positiv konstant, som afhænger af de termiske forhold.

Bestem en forskrift for y som funktion af x, idet der skal gøres rede for, at konstanten k kan bestemmes ved ligningen

$$k = \frac{H^2}{2L}\,.$$

VEND!

6b. En elev skal til eksamen i et fag, og eksamen består af en skriftlig prøve og en mundtlig prøve. For hver af disse gives en karakter, og den endelige karakter i faget fremkommer som gennemsnittet af de to karakterer, idet der rundes op, hvis gennemsnittet ligger midt mellem to karakterer.
Det antages, at elevens sandsynlighed for at få de forskellige karakterer er bestemt ved:

Karakter	<5	5	6	7	8	9	>9
Sandsynlighed	0,00	0,08	0,24	0,36	0,24	0,08	0,00

Denne sandsynlighedsfordeling tænkes at gælde for såvel den mundtlige som den skriftlige prøve, hvis resultater tænkes at være uafhængige af hinanden.
Opgaven går ud på at undersøge »afrundingsfordelen« ved fastsættelse af elevens endelige karakter i faget.

Gør rede for, at elevens sandsynlighed for at få 8 som endelig karakter i faget er 0,3264.

Den stokastiske variabel X angiver elevens endelige karakter i faget.

Bestem sandsynlighedsfordelingen for X ved at opstille en tabel som nedenstående og færdigudfylde den.

t	5	6	7	8	9
$P(X=t)$			0,4688	0,3264	

Bestem middelværdien for X.

6c. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^3+5x^2+8x+4}.$$

Bestem funktionens definitionsmængde.

Vis, at der findes tal a, b og c, således at

$$f(x) = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$

for alle x i funktionens definitionsmængde.

Bestem den eksakte værdi af integralet

$$\int_0^2 f(x)\,dx\,.$$

Husk, at kun én af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1985 **85-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 13. maj 1985 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 ...... ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 7 ...... ca. 15 points
opgave 6........................ ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$x^2+6x-2 \leqq 3x+2 .$$

2. Et sandsynlighedsfelt (U,P) har udfaldsrummet

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} ,$$

og sandsynlighedsfunktionen P er bestemt ved følgende tabel:

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$P(u)$	0,10	0,20	0,20	0,20	0,30

Hændelserne A og B er givet ved

$$A = \{u_1, u_3, u_5\} \quad \text{og} \quad B = \{u_1, u_2, u_3\} .$$

Undersøg, om hændelserne A og B er uafhængige.

VEND!

3. I bladet »Synspunkt«, november 1983, kunne man i SPARESPALTEN finde nogle oplysninger om energibesparelser.
Benyt oplysningerne i SPARESPALTEN til at besvare følgende spørgsmål:

Hvor mange procent kan man nedsætte energiforbruget i et hus med kælder, hvis man sænker indetemperaturen 5 grader?

Hvor mange grader skal man nedsætte indetemperaturen i et etplanshus for at opnå samme procentvise energibesparelse?

SPARE SPALTEN

VARME RÅD FOR HUSE MED KÆLDER

Huse med kælder reagerer anderledes end etplanshuse når vi taler energibesparelser. Det forhold er analyseret af lic. techn. Anker Nielsen, Laboratoriet for Varmeisolering ved *Danmark's tekniske Højskole*. Analysen skal man være civilingeniør for at forstå, men konklusionerne er klare.

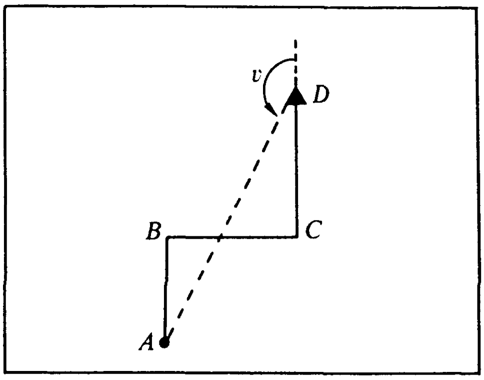
- Sænkes indetemperaturen i et hus med kælder én grad, spares 10% af energiforbruget. I et etplanshus siger tommelfingerreglen, at en grad ned, giver 5% energibesparelse.

4. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{3x - 9}.$$

Gør rede for, at grafen for f har to asymptoter, og angiv en ligning for hver af disse.

5.



»MYRESNAK« er et undervisningsprogram til en mikrodatamat. Ved hjælp af programmet kan en lille trekantet figur »myren« styres rundt på dataskærmen, hvorved der optegnes en geometrisk figur.
På illustrationen er myren kommet fra punktet A til punktet D efter at have tilbagelagt strækningen $A-B-C-D$, hvor

$$|AB| = 80, \quad |BC| = 100 \quad \text{og} \quad |CD| = 120,$$

og hvor retningsændringerne ved B og C begge er på 90°.
Eleven, der sidder ved skærmen, skal ved at indtaste gradtallet for vinklen v (se illustrationen) og længden af linjestykket DA dirigere myren tilbage til udgangspunktet A.

Beregn afstanden $|DA|$ og vinklen v.

6. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x}.$$

Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, fortegn og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(1,5)$.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 4 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\}.$$

7a. Det viste udklip stammer fra Berlingske Tidende den 4. april 1984.

Vis ved brug af udklippets oplysninger og normalfordelingspapir, at den stokastiske variabel X, der angiver farten af et køretøj på en motorvej, kan tænkes at være normalfordelt.

I det følgende antages, at X er normalfordelt.

Bestem spredningen for X.

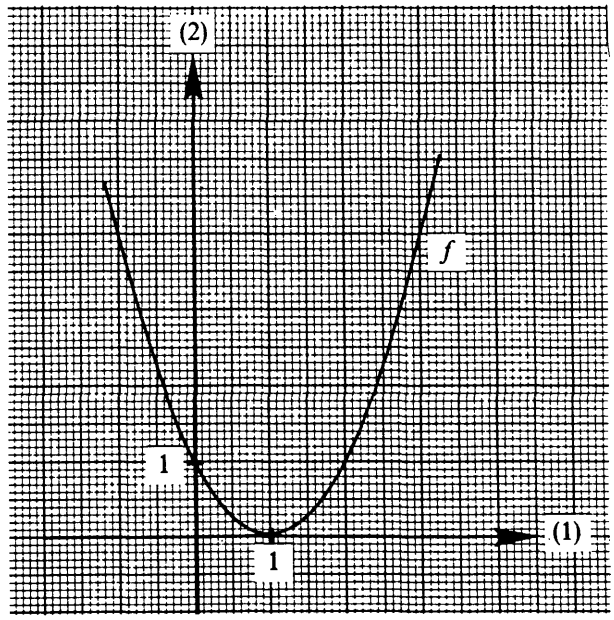
Hvor mange procent af køretøjerne på motorveje kører langsommere end 80 km/t?

Hvor mange procent af køretøjerne på motorveje har en fart mellem 100 km/t og 120 km/t?

Hastighedsgrænserne på veje uden for bymæssig bebyggelse overskrides i stort omfang. Det fremgår af målinger, som er foretaget af Rådet for Trafiksikkerhedsforskning. På motorveje er middelhastigheden godt 95 kilometer i timen, men flere end en tredjedel af bilisterne overskrider den generelle hastighedsgrænse på 100 km/t. En tiendedel af bilisterne kører hurtigere end 110 km/t.

VEND!

7b.



Ovenstående figur viser grafen for et andengradspolynomium f.

Bestem en forskrift for f.

Bestem en forskrift for den stamfunktion F til f, hvorom det gælder, at $F(1)=2$.

7c. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geqq 0 .$$

Bestem koordinatsættet til det punkt på grafen for f, hvis afstand til punktet $P(4,0)$ er mindst.

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1985 **85-8-4**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Mandag den 13. maj 1985 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 . . . . . . ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 6 . . . . . . ca. 15 points
opgave 7. . . . . ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\frac{1}{x} \geqq x+2\,.$$

2. Det viste udklip stammer fra bladet »Management«, august 1984, og handler om udviklingen i ØK's koncernomsætning.

Bestem på grundlag af oplysningerne i udklippet prisindeks for året 1983, når indeks for året 1973 sættes til 100.

ØKs koncernomsætning udgjorde i 1973 ca. 17.5 mia. kroner. og 10 år senere var omsætningen 16,9 mia. kr. I denne periode er priserne næsten tredoblede, og målt i 1973-priser er omsætningen derfor faldet dramatisk - fra 17,5 mia. kr. til 6,2 mia. kr.

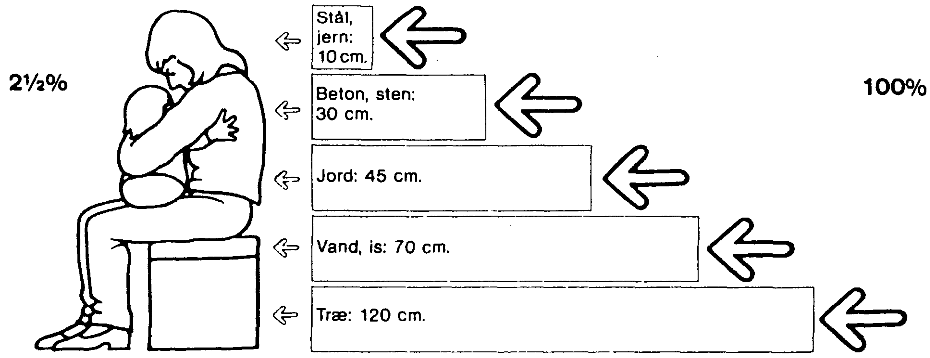
3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3-4x+3}{x^2-9x+8}\,.$$

Bestem tallet $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

VEND!

4. I august 1983 udsendte Civilforsvarsstyrelsen et hæfte med titlen »Om at overleve«. Figuren nedenfor, der stammer fra dette hæfte, giver eksempler på de materialetykkelser, der skal til for at nedsætte intensiteten af den radioaktive stråling fra en kernevåbensprængning til $2\frac{1}{2}\%$ af intensiteten af strålingen i det fri.

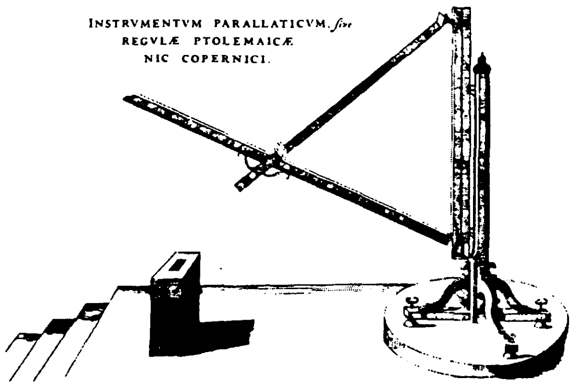


Det antages, at intensiteten af den radioaktive stråling, der trænger igennem et materiale med tykkelsen x, er en eksponentielt aftagende funktion af x.

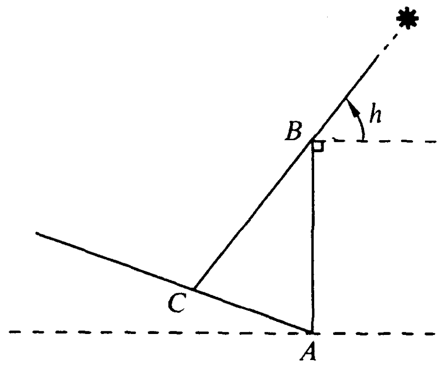
1) Med hvor mange procent nedsættes intensiteten, når den radioaktive stråling trænger igennem en 25 cm tyk jordvold?

2) Bestem tykkelsen af en betonvæg, der kan nedsætte intensiteten til 1% af den oprindelige.

5.



Parallaktisk lineal. Dette eksemplar, benyttet af Kopernikus, kom senere i Tycho Brahes besiddelse.



Til måling af stjerners højde brugte Ptolemaios (ca. 150 e. Kr.) et instrument, der kaldes en »parallaktisk lineal«.
Det bestod af en lodret mast (AB) med to påhængslede arme, en øvre og en nedre. Den øvre arm var forsynet med en øsken (C), der fattede om den nedre arm. Afstanden $|AB|$ mellem det nedre hængsel (A) og det øvre hængsel (B) på den lodrette mast var lig med afstanden $|BC|$, således at trekant ABC var ligebenet.
Når observatøren havde indstillet den øvre arm, således at den sigtede mod en stjerne, kunne $\angle CBA$ og dermed stjernens højde h beregnes, når blot længden af stykket AC på den nedre arm blev aflæst.
I det følgende sættes $|AB| = |BC| = 1$.

Bestem højden h for en stjerne, idet det oplyses, at $|AC|$ er aflæst til 1,22.

Bestem længden af stykket AC, når den observerede stjerne har højden $h = 50{,}4°$.

Hvor lang skal den nedre arm mindst være, når den parallaktiske lineal skal kunne måle alle højder mellem 0° og 90°?

6. Figuren viser en skitse af grafen for funktionen

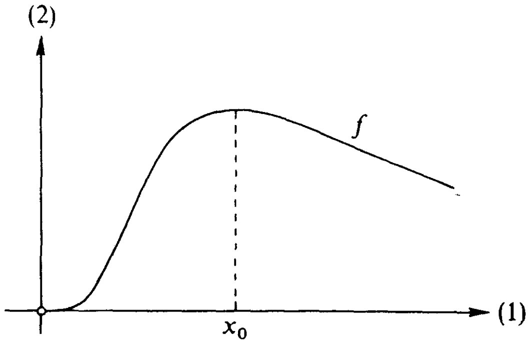
$$f(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}, \quad x>0 .$$

Det fremgår, at f har størsteværdi i tallet x_0.

Bestem x_0.

Bestem den eksakte værdi af

$$\int_1^2 f(x)\,dx .$$



7a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tan x - 8\sin x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter og monotoniforhold.

Tegn grafen.

Grafen for f og grafens tangent i punktet $P\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ afgrænser sammen med koordinatsystemets andenakse en punktmængde.

Beregn arealet af denne punktmængde.

7b. I et koordinatsystem i rummet er givet tre punkter

$$A(4,5,8), \quad B(1,-1,5) \quad \text{og} \quad C(1,0,2)$$

samt to vektorer

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

En linje l går gennem punkterne A og B, og en plan α indeholder punktet C og udspændes af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.
Linjen l skærer planen α i et punkt D.

Bestem koordinatsættet til D.

Bestem vinklen mellem l og α.

Bestem en parameterfremstilling for den linje m, der fremkommer ved projektion af l på α.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1985 **85-8-5**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Tirsdag den 14. maj 1985 kl. 9.00-13.00

Kun 3 af opgaverne 4a, 4b, 4c, 4d og 4e må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 4 .... ca. 15 points
hver af opgaverne 2 og 3 .... ca. 20 points

1. Beregninger i forbindelse med spildevandsudledning i vandløb kræver bl.a. kendskab til størrelsen af den gennemstrømmende vandmængde. Når man hvert år har målt den mindste vandmængde, der pr. sekund gennemstrømmer et tværsnit af vandløbet, kan man efter en årrække danne sig et skøn over variationen i disse årsminima.
Nedenstående figur (fra bogen »Spildevandsteknik« af Leif Winther m.fl.) viser den kumulerede frekvens for sådanne årsminima for Gudenåen, målt i årene 1917-70, indtegnet på normalfordelingspapir sammen med en udjævningslinje (fordelingskurve).

Tegn fordelingskurven på normalfordelingspapir, og aflæs middelværdi og spredning.

Bestem sandsynligheden for, at årsminimum i et vilkårligt valgt år bliver mindre end 700 l/s.

Bestem sandsynligheden for, at årsminimum i et vilkårligt valgt år vil ligge mellem 600 l/s og 900 l/s.

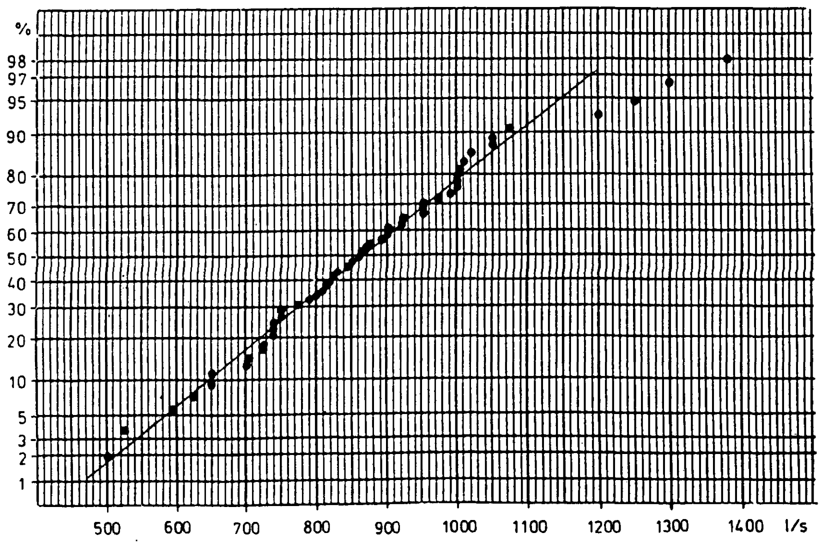


Fig. 4.13. Årsminima 1917-70 i Gudenå (Åstedbro) afsat på sandsynlighedspapir. Den skønsmæssige indlagte udjævningslinie (fordelingskurven) viser, at den statistiske værdi for medianminimum kan forventes at være ca. 865 l/s.

VEND!

2. Gør rede for, at ligningen

$$x^2-2-\ln x = 0$$

har netop to løsninger.

Bestem med to decimaler den løsning, der ligger i intervallet [1; 2].

3. Indholdet af kuldioxid (CO_2) i atmosfæren bliver i dag undersøgt grundigt, fordi dette indhold hævdes at have væsentlig indflydelse på jordens klima. I 1984 var CO_2-indholdet i atmosfæren 720 Gt (1 Gt $=10^9$ tons). I en model for den fremtidige udvikling af atmosfærens CO_2-indhold antages det, at

$$\frac{dQ}{dt} = -3+5\cdot 1{,}02^t, \quad t \geqq 0,$$

hvor Q angiver atmosfærens CO_2-indhold, målt i Gt, som funktion af tiden t, målt i år efter 1984.

Bestem væksthastigheden for CO_2-indholdet i atmosfæren til tiden $t=0$ og til tiden $t=80$.

Hvor mange procent vil CO_2-indholdet i atmosfæren ifølge modellen forøges med fra 1984 til 2064?

4a. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x>0$$

de tre løsninger, hvis grafer går gennem henholdsvis $A(1,0)$, $B(1,1)$ og $C(1,2)$.

Skitsér hver af de tre grafer.

4b. Diagnose af sygdommen yverbetændelse hos malkekøer kan foregå ved måling af laktoseindholdet i mælken. Metoden er imidlertid ikke helt sikker, idet der for raske køer gælder, at 6% af dem vil blive erklæret syge ved anvendelse af metoden, mens 7% af de køer, der har sygdommen, vil blive erklæret raske.
Et stort antal køer undersøges for yverbetændelse med en sikker, men langt dyrere metode, og det viser sig, at 4% af dem lider af yverbetændelse.

Hvilken procentdel af de undersøgte køer ville være blevet erklæret henholdsvis raske og syge, hvis undersøgelsen i stedet var foretaget med laktosemetoden?

4c. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^4, \quad x \geqq 0,$$

$$g(x) = x^2, \quad x \geqq 0.$$

Graferne for de to funktioner afgrænser en punktmængde.

Beregn rumfanget af det legeme, der fremkommer, når denne punktmængde drejes 360° om førsteaksen.

Den samme punktmængde drejes 360° om andenaksen, hvorved der også fremkommer et omdrejningslegeme.

Beregn, for eksempel ved at benytte f^{-1} og g^{-1}, rumfanget af dette omdrejningslegeme.

4d. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x - 12}{2\sqrt{x}}, \quad x \in [1; 9].$$

Bestem værdimængden for f.

4e. Fra 1. januar 1985 er der indført nye regler for det såkaldte befordringsfradrag. På selvangivelsen kan man fratrække et beløb, der i et vist omfang kan dække transportudgifterne mellem hjem og arbejdsplads.

De nye regler kunne læses i POLITIKEN den 2. september 1984.

Med x betegnes det antal km, som en skatteyder dagligt kører mellem hjem og arbejde, og med $f(x)$ betegnes det daglige befordringsfradrag i kr. for den pågældende skatteyder.

Der bør også indsendes forskudsskema, hvis skatteyderen er omfattet af de nye regler for befordringsfradrag: Intet fradrag for de første 20 daglige km mellem hjem og arbejde, mellem 20 og 54 km 1,10 kr. pr. km, ud over de 54 km dagligt: 27,5 øre pr. km.

Bestem en regneforskrift for f.

For skatteydere, der bor særlig langt fra arbejdspladsen, og som tidligere kunne få fradrag for bilkørsel, er der indført en overgangsregel.

Bestem en regneforskrift for den funktion g, der angiver det daglige befordringsfradrag i kr. for en sådan skatteyder.

Der er ingen skatteregler uden undtagelser eller som her 'en overgangsregel'. Den går ud på, at hvis skatteyderen, der har mere end 54 km dagligt mellem hjem og arbejde, efter de hidtidige regler kan få fradrag for bilkørsel, så kan denne forsat ikke få noget for de første 20 km, men får derimod 1,05 kr. pr. km for de resterende.

Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

En bestemt skatteyder kan vælge at beregne sit befordringsfradrag efter hovedreglen (funktionen f) eller efter overgangsreglen (funktionen g).

Hvor lang skal den daglige transportvej mindst være, for at overgangsreglen giver det største fradrag?

Husk, at kun 3 af opgaverne 4a, 4b, 4c, 4d og 4e må afleveres til *bedømmelse*.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1985 **85-8-6**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 13. maj 1985 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 ...... ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 7 ...... ca. 15 points
opgave 6........................ ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\frac{2x-6}{5+x} \geqq 0 .$$

2. En stokastisk variabel X med middelværdi 2 har sandsynlighedsfordelingen

t	1	2	a
$P(X=t)$	0,3	0,5	0,2

Bestem a og spredningen for X.

VEND!

3. Udklippet vedrørende sodavandssalget stammer fra POLITIKEN den 30. maj 1984.

Undersøg, om det er korrekt, at det gennemsnitlige procentvise fald pr. måned i salget af sodavand har været 24% i perioden januar-marts.

Beregn den gennemsnitlige procentvise ændring pr. måned for perioden december-marts.

> **Mindre salg af sodavand**
>
> **Sodavandsafgiften fra 1. januar i år førte til et gennemsnitligt fald i salget på 24 pct. i årets første tre måneder. I december sidste år steg salget 48 pct. I januar i år faldt det med 39 pct. Faldet i februar og marts i år var henholdsvis 15 og 18 pct. Det oplyser skatte- og afgiftsminister Isi Foighel (K) i et svar til Folketingets skatte- og afgiftsudvalg.**

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 .$$

Bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $P(2,4)$.

Bestem en ligning for den tangent til grafen for f, der står vinkelret på t.

5.

> **Toldvæsenet i aktion mod fritidssejlerne**
>
> **Toldvæsenet har med succes gennemført en ny aktionsform over for lystsejlerere i bælterne og Øresund. Ved to aktioner i henholdsvis juli og august arbejdere toldkrydsere og patruljevogne på landjorden sammen på en omfattende undersøgelse af 1100 danske og udenlandske fritidssejlere. Aktionen afslørede, at hver 10. sejler havde for mange afgiftsbelagte varer ombord. I alt måtte disse sejlere i told, afgifter og bøder betale 250.000 kr til statskassen.**

Det viste udklip er fra Jyllandsposten torsdag den 23. august 1984, og det fremgår, at 10% af fritidssejlerne havde for mange afgiftsbelagte varer ombord.
Det tænkes, at toldvæsenet senere iværksætter en tilsvarende aktion i mindre målestok, idet de undersøger 50 fritidssejlere. I den forbindelse er de interesseret i, om den første aktion har haft effekt, således at færre fritidssejlere nu medtager for mange afgiftsbelagte varer.

Beskriv en test, der tager stilling til spørgsmålet, idet nulhypotese og kritisk mængde angives (signifikansniveau 5%).

Kan man konkludere, at den første aktion signifikant har formindsket fritidssejlernes tendens til at medtage for mange afgiftsbelagte varer, hvis det viser sig, at kun 2 af de 50 fritidssejlere har for mange afgiftsbelagte varer ombord?

6. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{x} .$$

Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, fortegn og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(1,5)$.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 4 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

7a.

Den seneste udvikling i huspriser og indkomster

	2. kv. 83	3. kv. 83	4. kv. 83	1. kv. 84	2. kv. 84	3. kv. 84	%-vis ændring i forhold til samme kvartal sidste år
Samlet anskaffelsessum (hus + grund)	695.000	710.400	722.600	734.200	754.980	776.335	+ 9,3
Samlet husstandsindkomst	285.783	288.639	291.525	293.801	296.496	299.989	+ 3,9
+ Samlet beskatning incl. ejendomsskatter	73.907	75.014	76.150	80.605	77.974	79.595	+ 6,1
+ 1. års ydelse realkredit- og boliglån	95.926	96.782	97.890	94.408	103.697	105.162	+ 8,7
÷ Udgift til opvarmning	9.780	9.870	10.170	10.890	10.410	10.260	+ 4,0
Husstandens restindkomst i årets priser	106.170	106.973	107.315	107.898	104.417	104.972	+ 1,9
Husstandens restindkomst i faste priser (købekraft) (1. kv. 1978 = 100)	64.190	64.209	62.794	62.261	59.430	59.139	+ 7,9
Indeks for 1. års nettoboligudgift (1. kv. 1978 = 100)	103,8	105,8	107,7	104,5	114,3	116,3	+ 9,9

Tabel 1. Kreditforeningen Danmarks parcelhusindeks.

Den viste tabel er fra et dagblad og viser Kreditforeningen Danmarks parcelhusindeks.
En familie bygger et hus, der bliver færdigt i 3. kvartal 84, og de får en 1. års nettoboligudgift på 125.700 kr.

Hvor stor ville denne udgift ifølge indekset have været, hvis de havde bygget et år tidligere?

Opstil og færdigudfyld en tabel som nedenstående, der giver indeks for samlet anskaffelsessum (hus + grund).

	2. kv. 83	3. kv. 83	4. kv. 83	1. kv. 84	2. kv. 84	3. kv. 84
Indeks for samlet anskaffelsessum (hus + grund)		100				109,3

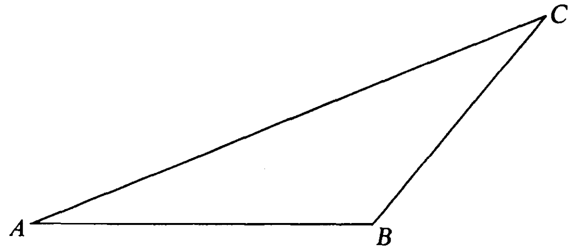
VEND!

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x}, \quad x \in [1;\, 10]\,.$$

Bestem værdimængden for f.

7c.



Figuren viser en stumpvinklet trekant ABC, hvor

$$\angle A = 21{,}2°, \quad |BC| = 6{,}9 \quad \text{og} \quad |AC| = 14{,}2\,.$$

Beregn vinklerne B og C.

Beregn $|AB|$.

Beregn arealet af trekant ABC.

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1985 **85-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 20. august 1985 kl. 9.00-13.00

Kun 3 af opgaverne 4a, 4b, 4c, 4d og 4e må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 4 .... ca. 15 points
hver af opgaverne 2 og 3 .... ca. 20 points

1. En parabel har ligningen

$$y = 2x^2 - 3x - 2 .$$

Punkterne A og B ligger på parablen og har førstekoordinat henholdsvis 0 og 2.

Bestem en ligning for parabeltangenten i A og for parabeltangenten i B.

Bestem et gradtal for en af de vinkler, som de to parabeltangenter danner.

2. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sin 2x + 2\cos x , \quad x \in [0; 2\pi] .$$

Bestem funktionens fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Grafen og førsteaksen afgrænser i fjerde kvadrant en punktmængde.

Beregn arealet af denne.

3. I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x, y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{matrix} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{matrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne eller banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

Vis, at banekurven er symmetrisk om førsteaksen.

Tegn på dette grundlag banekurven.

VEND!

4a. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \cdot y$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(1,1)$.

4b. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{x^4 - 20x^2 + 64}{2x^3 - 4x^2 - 16x} .$$

Bestem en ligning for hver af de linjer, der er asymptote til grafen for f.

4c. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En afbildning f af planen ind i planen er bestemt ved

$$f: (x,y) \curvearrowright (x-y, x+y) .$$

Afbildningen består af en drejning om O i positiv omløbsretning efterfulgt af en multiplikation ud fra O med positiv multiplikationsfaktor.

Bestem drejningsvinklen og multiplikationsfaktoren.

En ellipse $\mathscr{E}$ har ligningen

$$9x^2 + 4y^2 = 36 .$$

Tegn $\mathscr{E}$.

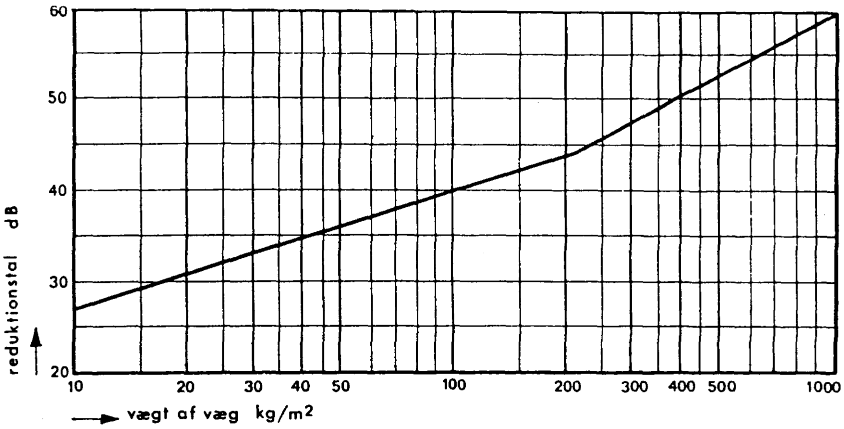
Tegn punktmængden $(f \circ f)(\mathscr{E})$, og angiv en ligning for denne.

4d. En æske indeholder tre symmetriske terninger, hvoraf de to er almindelige. Den tredje er speciel, idet den ikke har nogen ener, men til gengæld to seksere.
En tilfældig af de tre terninger vælges, og med den valgte terning foretages to kast.

Bestem sandsynligheden for, at man får en sekser i begge kast.

Bestem sandsynligheden for, at man har valgt den specielle terning, når det konstateres, at begge kast har givet en sekser.

4e. Ved lydisolering i ejendomme søger man at hindre eller reducere udbredelse af støj fra et lokale til et andet. Reduktionstallet, der angives i decibel (dB), er et mål for en bygningsdels isolering mod lyd, og for massive vægge ses på nedenstående kurve, hvorledes reduktionstallet afhænger af væggens vægt pr. arealenhed (angivet i kg/m^2).



Kilde: »teknisk ståbi« af C. G. Jensen og K. Olsen.

Bestem en regneforskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes reduktionstallet for en massiv væg afhænger af væggens vægt pr. arealenhed i intervallet fra 10 kg/m^2 til 200 kg/m^2.

Husk, at kun 3 af opgaverne 4a, 4b, 4c, 4d og 4e må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1985 **85-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 21. august 1985 kl. 9.00-13.00

Kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 5 .. ca. 10 points
opgave 6........................ ca. 25 points

1. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O har en ret linje l parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R},$$

og et punkt Q har koordinatsættet $(3,4)$.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter P på l, for hvilke trekant OPQ er retvinklet.

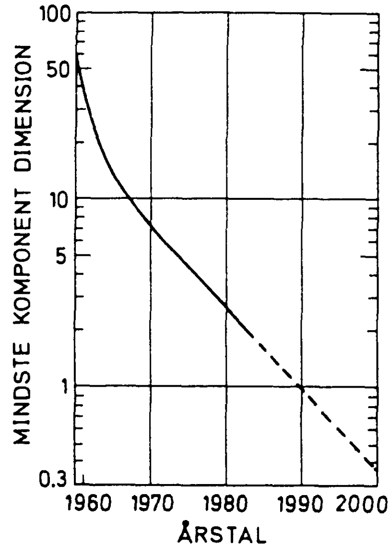
2. I et sandsynlighedsfelt (U, P) gælder der om to uafhængige hændelser A og B, at

$$P(A) = P(B) \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 0{,}64\,.$$

Bestem $P(A)$.

VEND!

3.



Kilde: »naturligvis« udgivet af informationsudvalget, Det naturvidenskabelige Fakultet, Københavns Universitet.

Figuren viser, hvorledes dimensionen af de mindste komponenter, der anvendes i halvlederindustrien, har udviklet sig siden 1960. Det fremgår af figuren, at siden 1970 er dimensionen af de mindste komponenter aftaget eksponentielt, og med den stiplede linje er det antydet, at denne udvikling forventes at fortsætte.

Bestem halveringstiden for den viste udvikling efter 1970.

Bestem den forventede dimension af de mindste komponenter i 2010.

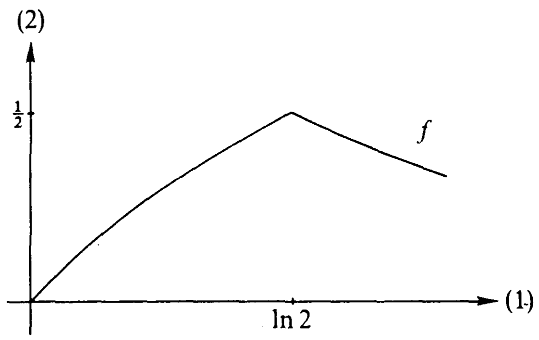
4. Et trapez $ABCD$ har vinkelspidserne

$$A(-7,1),\quad B(13,1),\quad C(7,6)\quad \text{og}\quad D(-5,6)\,.$$

Ved en ret affinitet afbildes A i B og D i C.

Bestem affinitetsaksen og forvandlingstallet for denne rette affinitet.

5.



Ovenstående figur viser grafen for funktionen f bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq \ln 2 \\ e^{-x} & \text{for} \quad \ln 2 < x\,. \end{cases}$$

Bestem den eksakte værdi af

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

6a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 .$$

Skitsér grafen for f, og bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$.

Om ethvert punkt $S(a,b)$ i planen gælder, at der gennem S går 0, 1 eller 2 tangenter til grafen for f.

Bestem for hvert af følgende tre talpar (a,b) antallet af tangenter gennem punktet $S(a,b)$:

1) $(a,b) = (1,-3)$. 2) $(a,b) = (1,2)$. 3) $(a,b) = (0,1)$.

For hvilke talpar (a,b) går der henholdsvis 0, 1 og 2 tangenter gennem $S(a,b)$?

Beskriv beliggenheden af S i hvert af de tre tilfælde.

6b. I et koordinatsystem er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 28x - 18y + 273 = 0 .$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

For ethvert reelt tal a fremstiller ligningen

$$y = ax + 1$$

en ret linje m_a.

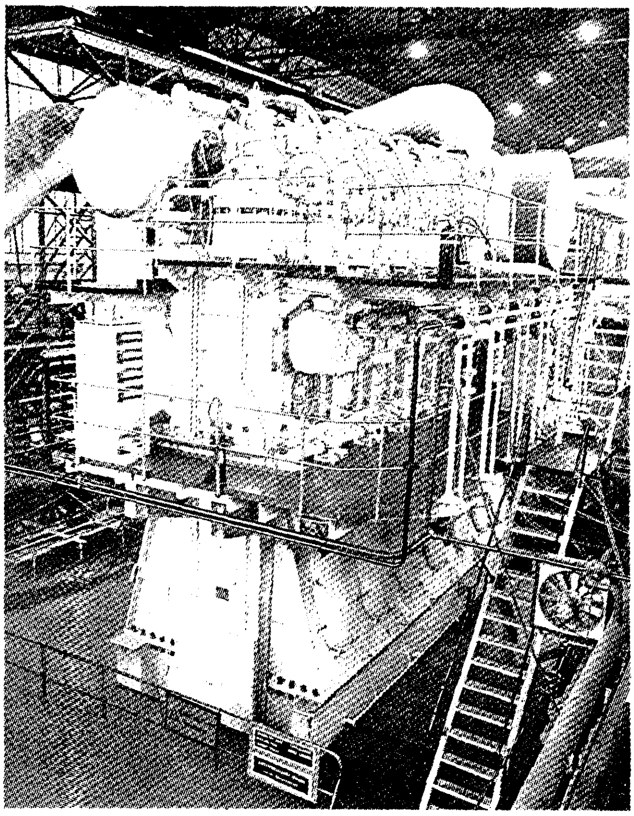
Vis, at linjen $m_{\frac{1}{2}}$ skærer cirklen.

Bestem tallet a, således at linjen m_a skærer cirklen i to punkter, som ligger på en diameter i cirklen.

Bestem mængden af tal a, for hvilke m_a har punkter fælles med cirklen.

VEND!

6c.



Dieselmotor til et skib.

En bestemt type skibsdieselmotor har en slaglængde på 2180 mm. Slaglængden er afstanden mellem øverste og nederste stilling af stempeltoppen.
Stemplets afstand fra topstillingen målt i mm er en funktion af tiden målt i sekunder. Denne funktion er af formen

$$f(t) = r(1-\cos mt),$$

hvor r og m er positive konstanter.
Stemplet udfører 97 gange i minuttet en hel bevægelse fra topstilling til bundstilling og tilbage igen.

Bestem konstanterne r og m.

Beregn stemplets maksimale fart.

Indsprøjtning af dieselolie til motoren sker én gang for hver hele stempelbevægelse. Indsprøjtningen begynder, når stemplet befinder sig 1,49 mm fra topstillingen på vej opad, og slutter, når stemplet efter at have passeret topstillingen befinder sig 37,14 mm under denne.

Hvor lang tid varer en indsprøjtning?

Husk, at kun 2 af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1985 **85-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 20. august 1985 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 10 points
opgave 5	ca. 15 points
opgave 7	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. Løs uligheden

$$\frac{x+2}{x-3} - 2 \geqq 0 .$$

2. Nedbrydningen af giftstoffet DDT i naturen kan beskrives ved en eksponentiel udvikling med halveringstid 11 år.

   Hvor mange procent af stoffet nedbrydes pr. år?

   Hvor lang tid varer det, før en bestemt mængde DDT er nedbrudt til 5% af den oprindelige mængde?

3. I et koordinatsystem har en parabel ligningen

$$y = x^2 .$$

   Punkterne A og B ligger på parablen, og deres førstekoordinater er henholdsvis 1 og -2.

   Bestem koordinatsættet til det punkt P på parablen, for hvilket

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB} .$$

VEND!

4. En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 3, og det oplyses, at $P(2{,}2 \leqq X \leqq 3{,}8) = 0{,}42$.

   Bestem spredningen for X.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \cos x \sqrt{\sin x}\,, \quad x \in [0; \pi]\,.$$

   Undersøg funktionens fortegnsvariation, og skitsér dens graf.

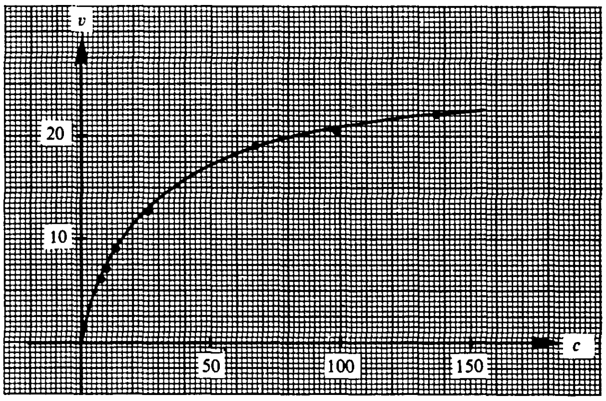
   Grafen for f og førsteaksen afgrænser i første kvadrant en punktmængde.

   Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når denne punktmængde drejes 360° om førsteaksen.

6. Det klassiske eksempel på måling af et enzyms reaktionshastighed som funktion af substratkoncentrationen er givet af Kuhn i 1923. Målt i passende enheder fandt han følgende sammenhørende værdier af koncentration c og hastighed v:

c	137,0	99,5	67,6	26,2	13,6	10,0	7,9
v	22,0	20,5	19,0	12,5	9,0	7,0	6,0

   Når de sammenhørende værdier afsættes som punkter i et koordinatsystem, fremkommer følgende kurve:



   Man ønsker at bestemme den værdi, som reaktionshastigheden tilsyneladende nærmer sig, når c går mod uendelig. Denne er imidlertid svær at bestemme ud fra grafen.

   Lav en tabel over sammenhørende værdier af $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$, og indtegn disse i et koordinatsystem.

   Gør rede for, at $\frac{1}{v}$ med tilnærmelse er en lineær funktion af $\frac{1}{c}$.

   Bestem ved hjælp heraf den værdi, som reaktionshastigheden v nærmer sig, når c går mod uendelig.

   Angiv en forskrift for v som funktion af c.

7a.

> Du er ikke *overvægtig*, siger du? Ja, ja, vær nu ikke for tryg – du kan blive det! 75% af danskerne over 40 år er det. Også der vil du skønne på de alternative varer, de fedtbegrænsede og kalorielette...

I overensstemmelse med ovenstående citat fra »Et bedre liv« af Lars Okholm antages i det følgende, at sandsynligheden er 0,75 for, at en tilfældigt valgt dansker over 40 år er overvægtig. På tilfældig måde tænkes valgt en gruppe på 20 danskere over 40 år.

Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

A: Alle 20 er overvægtige.
B: Der er højst 10 overvægtige.
C: Der er mindst 15 overvægtige.
D: Antallet af overvægtige er mindst 13 og højst 17.

Beregn den betingede sandsynlighed for D under forudsætning af C.

7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad x \neq 2 .$$

Bestem en ligning for den tangent t_1 til grafen for f, hvis røringspunkt har førstekoordinaten 4.

Grafen for f har en anden tangent t_2, der er parallel med tangenten t_1.

Bestem en ligning for tangenten t_2.

Beregn afstanden mellem de to tangenter t_1 og t_2.

Beregn arealet af punktmængden bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 3 \leqq x \leqq 4 \wedge 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986 **86-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Mandag den 12. maj 1986 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 2–9 .... ca. 15 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = |3x-12|-6 \ .$$

Tegn grafen for f.

Løs grafisk hver af ulighederne

$$1) \quad f(x) \leqq 3 \ .$$

$$2) \quad |f(x)| \leqq 3 \ .$$

2. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^{2,7} \quad , \quad x \in \mathbf{R}_+ \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,1)$.

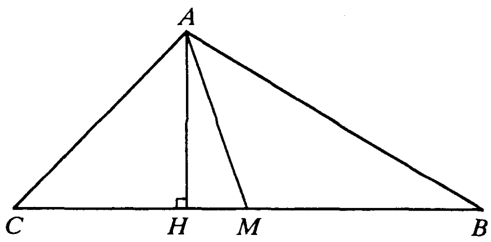
Skitsér grafen for f og tangenten i P.

Grafen, tangenten i P og linjen med ligningen $x=3$ afgrænser en punktmængde.

Beregn arealet af denne punktmængde.

VEND!

3. I en trekant ABC er $\angle C = 45°$. På siden BC ligger punkterne M og H. Punktet M er midtpunkt for BC, og punktet H er bestemt ved, at $\angle AHC$ er ret. Endvidere er $|AH| = 35$, $|AM| = 37$, og $\angle AMC$ er spids.



Beregn $|HM|$, $|HC|$ og $|MC|$.

Beregn sider og vinkler i trekant ABC.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} - 3e^x + 2} \ .$$

Undersøg $f(x)$ for x gående mod $-\infty$, for x gående mod ∞ og for x gående mod 0.

Angiv en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

5. En stokastisk variabel X har følgende sandsynlighedsfordeling:

t	0	50	100	1000
$P(X=t)$	0,75	0,13	0,10	0,02

Bestem middelværdi og spredning for X.

En stokastisk variabel Y er givet ved

$$Y = 2X + 5 \ .$$

Bestem middelværdi og spredning for Y.

6. For en vilkårlig værdi af tallet t er to punkter P_t og Q_t bestemt ved

$$P_t\,(\cos t, \sin t) \quad \text{og} \quad Q_t\,(3 + \sin t, \cos t) \ .$$

Midtpunktet af linjestykket P_tQ_t betegnes M_t.

Bestem en parameterfremstilling for den punktmængde, som M_t gennemløber, når tallet t gennemløber intervallet $[0;2\pi]$.

Vis, at punktmængden er en del af en ret linje, og bestem en ligning for denne linje.

Tegn punktmængden i et koordinatsystem.

7. I et koordinatsystem er et parallelogram bestemt ved, at to af dets sider ligger på linjerne med ligningerne

$$y = x+7 \qquad \text{og} \qquad y = -2x-8 \ ,$$

og at en vinkelspids ligger i punktet $A(-3,10)$.
Koordinatsættene til punkterne inden for eller på randen af parallelogrammet udgør en mængde M.
En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = 100-5x+8y \ .$$

Bestem maksimum og minimum for f i mængden M.

8. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er to parabler $\mathscr{P}_1$ og $\mathscr{P}_2$ givet ved

$$\mathscr{P}_1\colon y = x^2 \qquad \text{og} \qquad \mathscr{P}_2\colon\ y = \tfrac{1}{4}x^2 \ .$$

Parablen $\mathscr{P}_1$ kan afbildes på parablen $\mathscr{P}_2$ ved en ret affinitet med førsteaksen som affinitetsakse.

Bestem forvandlingstallet for denne rette affinitet.

Parablen $\mathscr{P}_1$ kan også afbildes på parablen $\mathscr{P}_2$ ved en ret affinitet med andenaksen som affinitetsakse og positivt forvandlingstal.

Bestem dette forvandlingstal.

Endelig kan parablen $\mathscr{P}_1$ afbildes på parablen $\mathscr{P}_2$ ved en multiplikation om O.

Bestem multiplikationsfaktoren.

9. I mængden $M = \{1,2,3,4,5\}$ er en komposition $*$ givet ved kompositionstavlen

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	5	1	2	4
4	4	3	5	1	2
5	5	4	2	3	1

Gør rede for, at $(M,*)$ har et neutralt element, og at alle elementer i $(M,*)$ er invertible.

Løs ligningen

$$(2*3)*x = 2*(3*x) \ .$$

Undersøg, om $(M,*)$ er en gruppe.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2-9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986 **86-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Tirsdag den 13. maj 1986 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 3 og 4 .... ca. 15 points
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 25 points

1. I et koordinatsystem i planen har en linje l ligningen

$$x+2y-6=0\ ,$$

og en linje m har parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 1-t \end{aligned}\ , \qquad t\in\mathbf{R}\,.$$

Gør rede for, at l og m er parallelle, og bestem afstanden mellem dem.

VEND!

2. Udklippet nedenfor er fra BP's nyhedstjeneste, september 1984.

> I 1970 blev investering i en datamaskine kun anset for rentabel, hvis virksomheden havde 1000 medarbejdere.
> I 1975 blev den også rentabel i virksomheder med 100 medarbejdere.
> I 1980 blev den rentabel i virksomheder med 10 medarbejdere.
> I 1985 vil det formodentlig være rentabelt, at hver medarbejder har sin datamat.
> Og der er ingen grund til, at udbredelsen skulle stoppe der.

Det antal medarbejdere, en virksomhed skal have, for at det er rentabelt at investere i en datamaskine, er en funktion af antallet af år efter 1970.

Bestem på baggrund af udklippets oplysninger en forskrift for denne funktion.

I hvilket år blev det rentabelt for en virksomhed med 200 medarbejdere at investere i en datamaskine?

3. I en såkaldt neutronkilde kan man ved neutronbestråling af et ikke-naturligt radioaktivt stof fremstille kunstigt radioaktive isotoper af stoffet.
Under bestrålingen er den mængde af den radioaktive isotop, der findes i neutronkilden, en voksende funktion af tiden.
Om den funktion M, der for et bestemt stof angiver mængden $M(t)$ af den radioaktive isotop til tiden t, antages, at

$$\frac{dM}{dt} = 1 - 0{,}29\,M \ ,$$

samt at $M(0) = 0$.

Bestem en forskrift for M, og bestem $M_\infty = \lim_{t \to \infty} M(t)$.
Bestem det tidspunkt t_0, hvor $M(t_0) = 0{,}95 \cdot M_\infty$.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{2x-6} + \sqrt{9-x} \ .$$

Bestem funktionens størsteværdi.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Det oplyses, at $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Undersøg f og dens graf med hensyn til nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og ekstrema.

Tegn grafen for f.

Bevis, at der for vilkårlige positive tal a og b gælder, at

$$f(a) = f(b) \quad \Leftrightarrow \quad a^b = b^a \ .$$

Bestem for et vilkårligt positivt tal a antallet af positive løsninger til ligningen

$$a^x = x^a \quad .$$

6a. I en æske ligger otte batterier, hvoraf de to er opbrugte. For at fjerne disse to tages batterierne op et for et og afprøves, indtil begge opbrugte batterier er fundet. Dette kræver fra 2 til 7 afprøvninger, idet batterierne lægges til side, efterhånden som de er blevet afprøvet.

Bestem sandsynligheden for, at de opbrugte batterier er fundet efter

a) 2 afprøvninger . b) 3 afprøvninger .

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver antallet af afprøvninger.

Bestem sandsynlighedsfordelingen for X.

Bestem middelværdien for X.

Bestem det mindste antal afprøvninger t, for hvilket

$$P(X \leq t) \geq \tfrac{1}{2} \ .$$

VEND!

6b. Når man med et instrument vil måle en fysisk størrelse f, der afhænger af tiden t, definerer man størrelsens »root mean square«-værdi f_{rms} som

$$f_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2\, dt} \quad ,$$

hvor T er integrationstiden i det instrument, der anvendes ved målingen. (Integrationstiden angiver, hvor længe instrumentet er om at reagere på forandringer af den fysiske størrelse, som måles.)
En vibration er en mekanisk svingning. Vibrationen i en bestemt type maskine har en acceleration a givet ved

$$a(t) = A\sin(6t) \quad ,$$

hvor A er et positivt tal. (Accelerationen måles i m/s^2 og tiden i s.)

Bestem perioden for funktionen a (accelerationens periode).

Til måling af vibrationens acceleration anvendes et accelerometer.

Gør rede for, at når integrationstiden er lig med accelerationens periode, så er accelerationens »root mean square«-værdi a_{rms} bestemt ved

$$a_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{2}}{2} A \quad .$$

Styrken L_a af en vibration angives i decibel (dB) og er bestemt ved

$$L_a = 20 \log \frac{a_{\text{rms}}}{a_0} \quad ,$$

hvor $a_0 = 10^{-6}$.
For en maskine af den omtalte type er $A = 0{,}18$.

Bestem vibrationens styrke L_a for denne maskine.

For områder med erhvervsbebyggelse er den vejledende officielle grænseværdi for en vibrations styrke 85 dB.

Bestem de værdier af A, for hvilke vibrationsstyrken for den omtalte type maskine ikke overskrider 85 dB.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986 **86-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 12. maj 1986 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

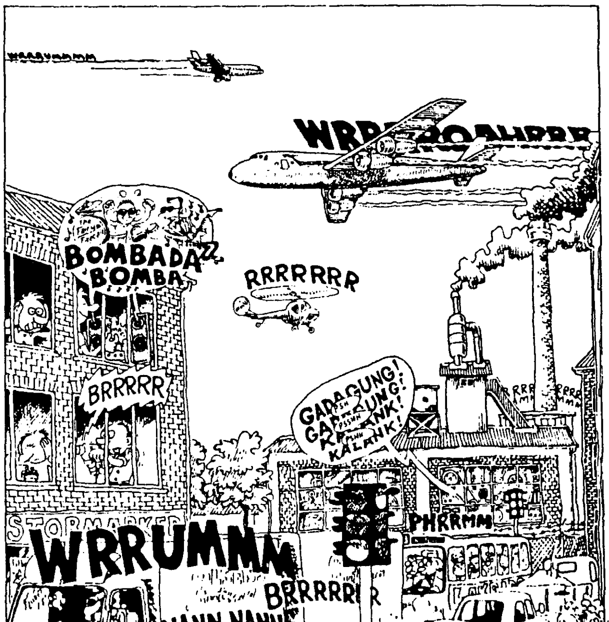
hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 7	ca. 15 points
opgave 6	ca. 25 points

1. Den viste figur med tekst stammer fra en pjece udarbejdet af arbejdstilsynet og miljøstyrelsen.
Ifølge teksten er halvdelen af alle danske industriarbejdere udsat for støj, som kan give høreskader.
På tilfældig måde vælges 18 danske industriarbejdere.

Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

1) Blandt de 18 valgte arbejdere er der ingen, der er udsat for støj, som kan give høreskader.

2) Blandt de 18 valgte arbejdere er mere end halvdelen udsat for støj, som kan give høreskader.



– Halvdelen af befolkningen har for megen støj i deres bolig.
Halvdelen af danske industriarbejdere er udsat for støj, som kan give høreskader.

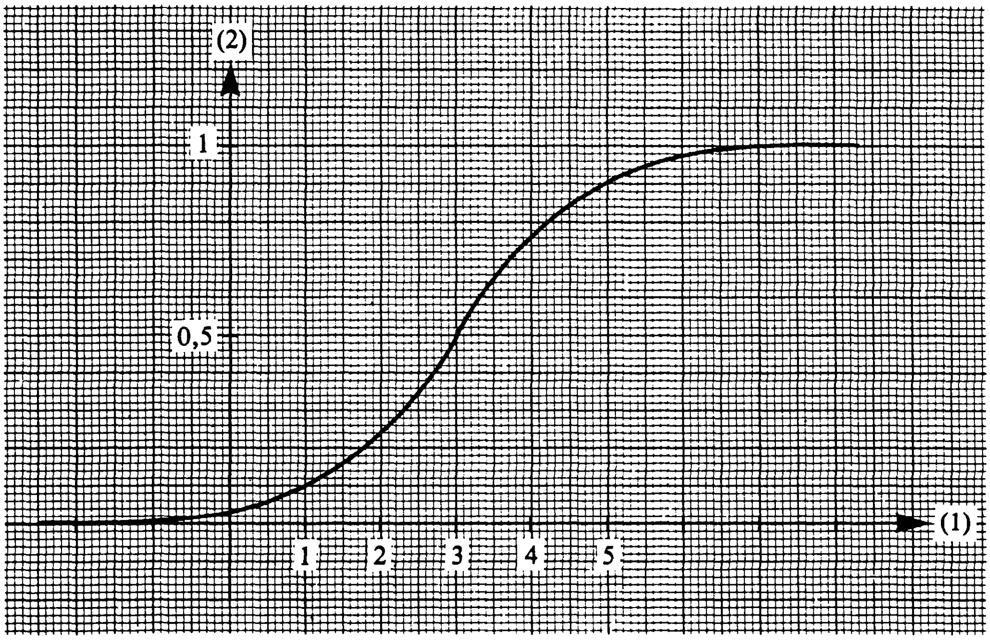
VEND!

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+8} \quad .$$

Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter og fortegn.

3. En stokastisk variabel X er normalfordelt.
Fordelingsfunktionen for X har i et sædvanligt koordinatsystem følgende graf:



Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(X \leqq 1) \,, \quad P(X>4) \quad \text{og} \quad P(1<X<4) \ .$$

Bestem middelværdi og spredning for X.

4. I en brochure fra et fjernvarmeselskab var der følgende eksempler på sammenhængen mellem det opvarmede areal og olieforbruget i et hus:

Ved fortsat oliefyring	Opvarmet areal **85 m²**	Opvarmet areal **125 m²**	Opvarmet areal **170 m²**
			
	Olieforbrug 2000 l/år	Olieforbrug 2775 l/år	Olieforbrug 4000 l/år

Gør rede for, at der med tilnærmelse gælder, at olieforbruget vokser eksponentielt med det opvarmede areal.

En sådan eksponentiel beskrivelse af sammenhængen kan tænkes at være rimelig for arealer mellem 50 m^2 og 200 m^2.

Bestem olieforbruget, når det opvarmede areal er 155 m^2.

Bestem en forskrift for en eksponentielt voksende funktion f, således at $f(x)$ med tilnærmelse angiver olieforbruget, når det opvarmede areal er x.

5. Punkterne $A(2,3)$ og $B(10,9)$ er endepunkter for en diameter i en cirkel $\mathscr{C}$.

Bestem en ligning for $\mathscr{C}$.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem cirklens centrum og står vinkelret på diameteren AB.

Bestem koordinatsættet til hvert af endepunkterne for den diameter i $\mathscr{C}$, der er vinkelret på AB.

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^2+x+5}{x} .$$

Undersøg f med hensyn til definitionsmængde, fortegn og monotoniforhold.

Bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

Tegn grafen.

Angiv funktionens værdimængde.

Grafen og linjen med ligningen $y=7$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

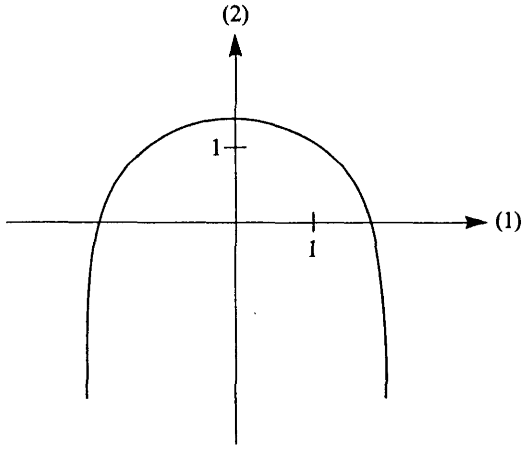
Beregn dette areal.

VEND!

7a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(4-x^2) \ .$$

Figuren til højre viser grafen for f.



Bestem definitionsmængden for f.

Bestem en ligning for hver af de tangenter til grafen, hvis røringspunkter har førstekoordinat henholdsvis -1 og 1.

De to tangenter danner sammen med koordinatsystemets førsteakse en trekant.

Beregn vinklerne i denne trekant.

7b. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2(1-x)^9 \ , \qquad x \in [0;1] \ .$$

Bestem størsteværdien for f.

7c. Ved undersøgelse af en bils benzinforbrug foretages testkørsler, hvor man måler benzinforbruget ved at køre en bestemt strækning med konstant fart. Tabellen nedenfor viser resultatet af tre testkørsler med en SAAB 99, årgang 1983.

Fart (km pr. time)	Benzinforbrug (liter pr. 100 km)
70	5,90
90	7,36
110	9,12

Ifølge teoretiske beregninger er benzinforbruget en lineær funktion af farten i anden potens. Med $f(v)$ betegnes benzinforbruget ved farten v.

Indtegn sammenhørende værdier af v^2 og $f(v)$ i et koordinatsystem, og gør rede for, at der med tilnærmelse gælder

$$f(v) = a \cdot v^2 + b \ .$$

Bestem konstanterne a og b.

Beregn det forventede benzinforbrug ved farten 100 km pr. time.

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-4
Udkast til ny
bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Mandag den 12. maj 1986 kl. 9.00-13.00

Kun 6 af opgaverne 2-9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 2-9 .... ca. 15 points

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = |3x-12|-6 \ .$$

Tegn grafen for f.

Løs grafisk hver af ulighederne

1) $f(x) \leqq 3$.

2) $|f(x)| \leqq 3$.

2. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^{2,7} \quad , \quad x \in \mathbf{R}_+ \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,1)$.

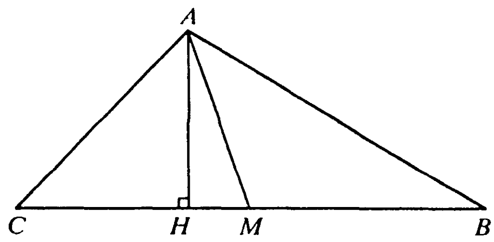
Skitsér grafen for f og tangenten i P.

Grafen, tangenten i P og linjen med ligningen $x=3$ afgrænser en punktmængde.

Beregn arealet af denne punktmængde.

VEND!

3. I en trekant ABC er $\angle C = 45°$. På siden BC ligger punkterne M og H. Punktet M er midtpunkt for BC, og punktet H er bestemt ved, at $\angle AHC$ er ret. Endvidere er $|AH| = 35$, $|AM| = 37$, og $\angle AMC$ er spids.



Beregn $|HM|$, $|HC|$ og $|MC|$.

Beregn sider og vinkler i trekant ABC.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x} - 3e^x + 2} .$$

Undersøg $f(x)$ for x gående mod $-\infty$, for x gående mod ∞ og for x gående mod 0.

Angiv en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

5. En stokastisk variabel X har følgende sandsynlighedsfordeling:

t	0	50	100	1000
$P(X=t)$	0,75	0,13	0,10	0,02

Bestem middelværdi og spredning for X.

En stokastisk variabel Y er givet ved

$$Y = 2X + 5 .$$

Bestem middelværdi og spredning for Y.

6. For en vilkårlig værdi af tallet t er to punkter P_t og Q_t bestemt ved

$$P_t\,(\cos t, \sin t) \quad \text{og} \quad Q_t\,(3 + \sin t, \cos t) .$$

Midtpunktet af linjestykket P_tQ_t betegnes M_t.

Bestem en parameterfremstilling for den punktmængde, som M_t gennemløber, når tallet t gennemløber intervallet $[0;2\pi]$.

Vis, at punktmængden er en del af en ret linje, og bestem en ligning for denne linje.

Tegn punktmængden i et koordinatsystem.

7. I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(1,2,0) \quad \text{og} \quad B(3,4,5)$$

samt planen α med ligningen

$$3x-y+z=0 \ .$$

Bestem en ligning for den plan, som er vinkelret på α, og som indeholder punkterne A og B.

8. Ved en bestemt form for konkurrenceskydning har man 200 skud. Hvert skud kan maksimalt give 10 points, og rekorden er 1992 points.
En bestemt skytte vil i hvert skud med sikkerhed få 10 eller 9 points. Sandsynligheden for, at han får 10 points, er 90%, og det antages, at resultaterne af de enkelte skud er uafhængige.

Bestem sandsynligheden for, at han sætter ny rekord ved næste skydekonkurrence.

9. Det viste udklip er fra POLITIKEN og handler om inflationen (den procentvise prisstigning) i Israel i 1985.
Det fremgår af udklippet, at inflationen fra årets begyndelse til og med juli måned har været 102,5 procent.

Høj inflation i Israel

Inflationen i Israel var i juli på 27,5 pct. og har siden årets begyndelse været i alt 102,5 pct. Sidste år blev inflationen i Israel på årsbasis 445 pct.

Hvor mange procent har inflationen været fra årets begyndelse til og med juni måned?

Hvor stor har den gennemsnitlige månedlige inflation været i perioden fra årets begyndelse til og med juli måned?

Hvor stor måtte den gennemsnitlige månedlige inflation højst være i resten af 1985, hvis inflationen i 1985 på årsbasis ikke måtte overstige inflationen i 1984?

Husk, at kun 6 af opgaverne 2-9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-5
Udkast til ny
bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Tirsdag den 13. maj 1986 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 points
opgave 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(9,100)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet P.

VEND!

2. Det viste udklip er fra Jyllands-Posten den 27. november 1984 og viser en oversigt over den procentvise stigning i skønnet beskatningsgrundlag pr. indbygger i landets 275 kommuner.

Gør rede for, at disse procenttal med rimelighed kan opfattes som observationer af en normalfordelt stokastisk variabel X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Kommunerne fordelt efter den procentvise stigning i skønnet beskatningsgrundlag pr. indbygger

Procentvis stigning 1983-84	Antal kommuner
2.00- 2.99	4
3.00- 3.99	6
4.00- 4.99	32
5.00- 5.99	41
6.00- 6.99	72
7.00- 7.99	53
8.00- 8.99	30
9.00- 9.99	24
10.00-10.99	10
11.00-13.99	3
I alt	275

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{2x-6} + \sqrt{9-x} .$$

Bestem funktionens størsteværdi.

4. En bestemt planteart findes på sydsiden af en bakke med så stor hyppighed, at sandsynligheden for at finde planten inden for 1 m^2 kan sættes til 0,4.
En botaniker, der studerer forekomsten af planten, mener, at planten forekommer sjældnere på nordsiden.
Ved undersøgelse af 20 felter à 1 m^2 på nordsiden finder han, at planten forekommer i 4 af disse felter.

Hvad er sandsynligheden for at finde så få eller færre forekomster af den nævnte plante, hvis sandsynligheden for at finde den på nordsiden er den samme som for at finde den på sydsiden?

Beskriv en test, der på signifikansniveau 5% kan benyttes til at vurdere, om forekomsten på nordsiden er mindst lige så stor som på sydsiden.

5. I 1971 udgav den nordiske komité for bygningsbestemmelser et skrift (NKB-skrift nr. 17) med praktiske anvisninger vedrørende støj fra veje.
Figuren nedenfor, der stammer fra dette skrift, viser, at lydens effektivniveau i en given afstand fra en vejs midte afhænger af trafikmængden på vejen og af trafikkens middelhastighed.
Trafikmængden er angivet i støjækvivalent antal personbiler pr. døgn, idet de tunge køretøjer er omregnet til personbiler.

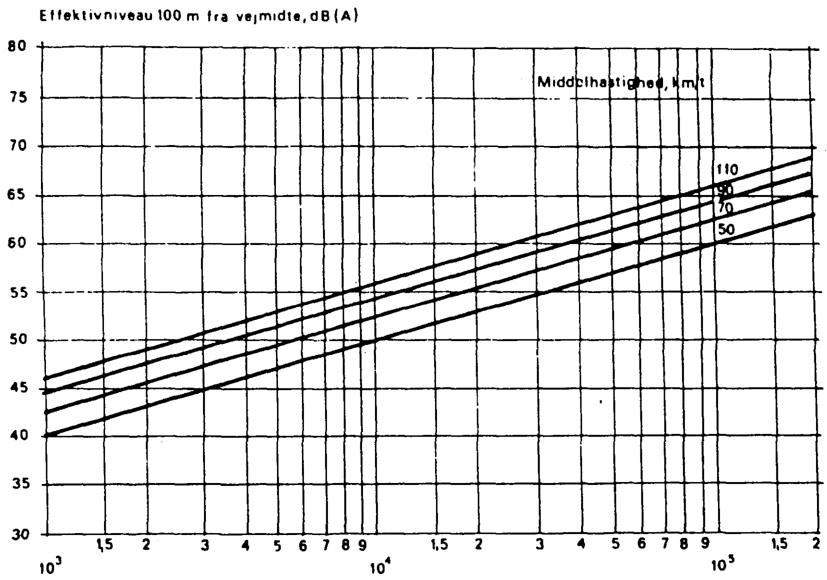


Fig. 2
Sammenhæng mellem lydens effektivniveau 100 m fra vejmidte og den støjækvivalente personbiltrafik pr. døgn ved forskellige middelhastigheder.

En kommune vil anlægge en ny vej gennem et boligområde. Man regner med, at trafikkens middelhastighed bliver 50 km/t.

Bestem en forskrift for den funktion, der angiver lydens effektivniveau 100 m fra vejmidten, målt i dB(A), som funktion af det støjækvivalente antal personbiler pr. døgn.

Beregn den maksimale trafikmængde, målt i støjækvivalent antal personbiler pr. døgn, der kan accepteres, når lydens effektivniveau i afstanden 100 m fra vejmidten ikke må overstige 55 dB(A).

I sin planlægning regner kommunen med 25000 støjækvivalente personbiler pr. døgn på den pågældende vej.

Beregn det effektivniveau, målt i dB(A), som man forventer i afstanden 100 m fra vejmidten.

VEND!

6a. Eksponentialfunktionen med grundtal 3 betegnes f.

Skitsér graferne for f og dens omvendte funktion f^{-1} i et koordinatsystem.

Grafen for f skærer andenaksen i et punkt A, og grafen for f^{-1} skærer førsteaksen i et punkt B.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet A og en ligning for tangenten til grafen for f^{-1} i punktet B.

Beregn vinklen mellem disse to tangenter.

To punkter C og D er bestemt ved

$$C(9, f^{-1}(9)) \quad \text{og} \quad D(2, f(2)) \ .$$

Linjen gennem A og B, graferne for f og f^{-1} samt linjen gennem C og D afgrænser en punktmængde.

Beregn arealet af denne punktmængde.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x + \ln x \quad , \quad x>0 \ .$$

Gør rede for, at f er en voksende funktion.

Skitsér grafen for f.

Grafen for f har en tangent, der går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Bestem en ligning for denne tangent.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem tangenten og andenaksen.

Funktionen har netop ét nulpunkt x_0.

Bestem x_0 med to betydende cifre.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-6
Udkast til ny
bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 12. maj 1986 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

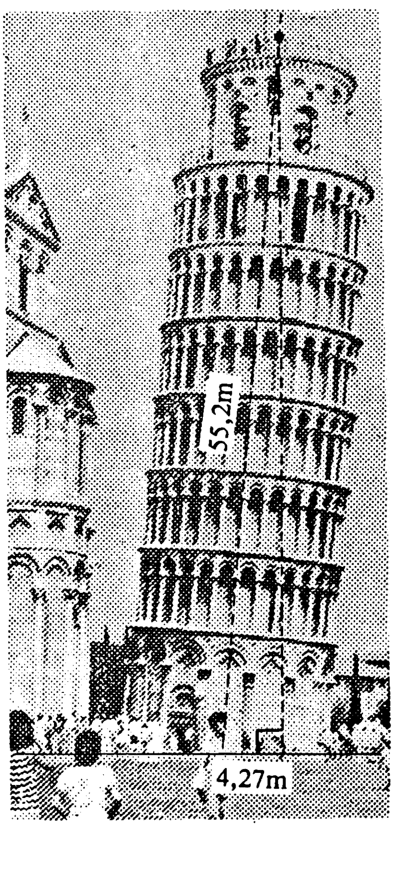
hver af opgaverne 1, 2 og 3 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 4, 5 og 7 .... ca. 15 points
opgave 6 .... ca. 25 points

1. Det skæve tårn i Pisa er 55,2 m højt og afviger 4,27 m fra lodlinjen (se figur).

   Beregn den spidse vinkel (hældningsvinklen), som tårnet danner med lodlinjen.

   Tårnet har ikke altid været så skævt som nu.

   Hvor meget afveg tårnet fra lodlinjen, da hældningsvinklen kun var 1,0°?



VEND!

2.

$$99. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

$$100. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

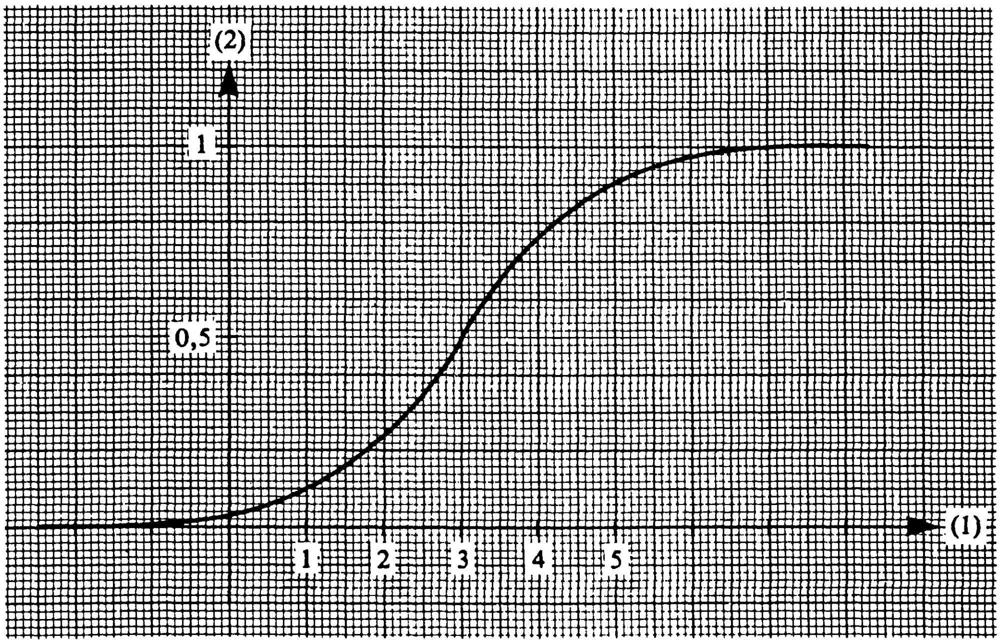
$$101. \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}$$

Ovenstående formler er en del af en integraltabel.

Benyt en af disse formler til at beregne den eksakte værdi af tallet

$$\int_1^4 \frac{3x}{\sqrt{1+2x}}\,dx\ .$$

3. En stokastisk variabel X er normalfordelt.
Fordelingsfunktionen for X har i et sædvanligt koordinatsystem følgende graf:



Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(X \leqq 1)\ ,\quad P(X>4) \quad \text{og} \quad P(1<X<4)\ .$$

Bestem middelværdi og spredning for X.

4. Undersøgelse af en metallegering, der korroderer (nedbrydes) under påvirkning af den atmosfæriske luft, har vist, at tykkelsen af det korroderede metal (korrosionslaget), målt i mm, er en funktion af tiden, angivet i måneder.
Denne funktion er for $t \geqq 1$ givet ved

$$f(t) = b \cdot t^a \ ,$$

hvor a og b er konstanter.

Bestem a og b, når det oplyses, at tykkelsen af korrosionslaget efter 3 måneder er 0,22 mm og efter 10 måneder er 0,60 mm.

Hvilken tykkelse har laget efter 5 års forløb?

Hvor mange måneder vil forløbe, før laget er 2 mm tykt?

5. I 1978 blev der for perioden fra 1. januar 1978 til 1. januar 1992 udarbejdet to forskellige prognoser for befolkningsudviklingen i Sorø kommune:

Prognose 1 (amtets regionplanoplæg):
Befolkningstallet vil vokse med 3,47%.

Prognose 2 (kommunens oplæg til regionplan):
Befolkningstilvæksten bliver gennemsnitlig 1,17% om året.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise befolkningstilvækst, der svarer til amtets prognose.

Halvvejs henne i prognoseperioden, den 1. januar 1985, var befolkningstallet i Sorø faldet med 1,74% siden 1. januar 1978.

Hvor stor skal den gennemsnitlige årlige procentvise befolkningstilvækst være i resten af prognoseperioden, hvis kommunens skøn skal holde stik?

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^4 - 4x^2 \ .$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Grafen for f og førsteaksen afgrænser i fjerde kvadrant en punktmængde.

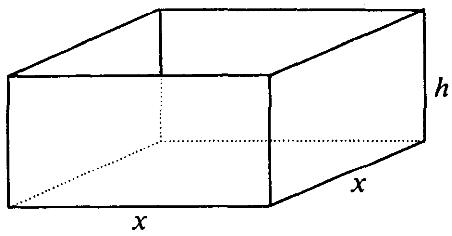
Beregn arealet af denne punktmængde.

Løs ligningen $f(x) = -3$.

VEND!

7a. En virksomhed ønsker at fremstille en kasse med rumfang 4 dm^3. Kassen skal være uden låg, og dens bund skal være kvadratisk.
Da kassen skal forsølves indvendig, skal den dimensioneres, så dens indvendige overflade bliver mindst mulig.

Bestem bundens sidelængde og kassens højde.



7b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\ , \quad x>0\ .$$

Beregn $f'(1)$ og $f'(8)$.

Grafen for f har en tangent i hvert af punkterne $A(1,1)$ og $B(8,2)$.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem disse to tangenter.

7c. Et bryggeri har udviklet en ny type lyst øl og hævder, at der ikke er smagsforskel på dette lyse øl og bryggeriets sædvanlige pilsnerøl.
For at undersøge denne påstand arrangeres en prøvesmagning, hvor 20 prøvesmagere hver får udleveret 3 glas, hvoraf det ene indeholder lyst øl og de to andre pilsnerøl. Prøvesmagernes opgave er at udpege det glas, der indeholder lyst øl.
Prøvesmagningen viste, at 10 af de 20 prøvesmagere kunne udpege det glas, der indeholdt lyst øl.

Beregn sandsynligheden for, at 10 eller flere af prøvesmagerne udpeger glasset med lyst øl, hvis der ikke er smagsforskel, og det derfor er tilfældigt, hvilket glas de udpeger.

Prøvesmagningen kan opfattes som en test af hypotesen:

Der er ingen smagsforskel på det lyse øl og pilsnerøllet.

Testen skal være højresidet, og signifikansniveauet vælges til 5%.

Bestem den kritiske mængde, og afgør, om resultatet af prøvesmagningen giver anledning til at forkaste hypotesen.

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1986 **86-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 19. august 1986 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 points
opgave 6	ca. 20 points
opgave 5	ca. 25 points

1. Løs ligningen

$$\sin 2x = \cos^2 x \ .$$

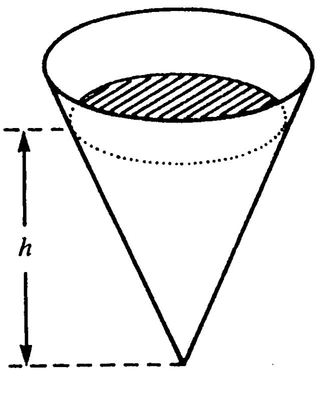
2. En tragt som vist på figuren indeholder væske. Væskehøjden i tragten er 25 cm.
På et tidspunkt åbnes for en ventil i bunden af tragten, hvorved væsken løber ud.
Under udløbet er væskehøjden h, målt i cm, fastlagt ved

$$\frac{dh}{dt} = -k \cdot h^{-\frac{3}{2}} \ ,$$

hvor tiden t måles i sekunder, og hvor k er en konstant, hvis værdi bl. a. afhænger af væskens viskocitet og ventilåbningens størrelse.
Det antages, at k har værdien 20.

Bestem en forskrift for h som funktion af t.

Hvor lang tid er væsken om at løbe ud af tragten?



VEND!

3. Bestem hvert af tallene

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \ .$$

4. Til et eksperiment er knyttet en stokastisk variabel X, der har nedenstående sandsynlighedsfordeling.

t	1	2	3
$P(X=t)$	0,2	0,5	0,3

Beregn middelværdi og spredning for X.

Eksperimentet udføres to gange, og resultaterne er indbyrdes uafhængige. Den stokastiske variabel Y angiver den mindste af de værdier, som X antager ved de to udførelser af eksperimentet.

Bestem sandsynlighedsfordelingen for Y.

Beregn middelværdien for Y.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \ .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

Bestem de to punkter på grafen, som har størst afstand til asymptoten.

Beregn arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x=3$.

6a. I mængden $M =]1;\infty[$ er en komposition $*$ givet ved

$$a*b = \frac{ab-1}{a+b-2} \quad , \quad a, b \in M \ .$$

Løs ligningen

$$x*x = 4 \ .$$

Vis, at for ethvert $a \in M$ har ligningen

$$x*x = a$$

netop én løsning.

Vis, at funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

er en isomorfi af $(M,*)$ på $(\mathbf{R}_+,+)$.

6b. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{v}$. Firkant $ABCD$ er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{v} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = 2\boldsymbol{v}+2\hat{\boldsymbol{v}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AD} = \hat{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v} \ .$$

Beregn vinklerne i firkant $ABCD$.

Vis, at arealet af trekant ACD er dobbelt så stort som arealet af trekant ABC.

Skæringspunktet mellem firkantens diagonaler kaldes M.

Bestem tallene s og t, således at

$$\overrightarrow{AM} = s\boldsymbol{v}+t\hat{\boldsymbol{v}} \ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1986 **86-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK–FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 20. august 1986 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 points
opgave 3	ca. 15 points
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1. I visse kemiske processer aftager koncentrationen af et af de reagerende stoffer eksponentielt. Koncentrationen $c(t)$ (målt i mol pr. liter) til tidspunktet t (målt i sekunder) er da bestemt ved

$$c(t) = c_0 \, \mathrm{e}^{-kt} \ , \quad t \geqq 0 \ ,$$

hvor c_0 er begyndelseskoncentrationen, og k er en konstant, der afhænger af den temperatur, ved hvilken processen forløber.
For et bestemt stof i en sådan proces er k bestemt ved

$$\ln k = 37{,}58 - \frac{12250}{T+273} \ ,$$

hvor T betegner temperaturen (målt i °C).

Beregn halveringstiden for koncentrationen, når processen forløber ved

1) 0°C. 2) 20°C.

2. I et koordinatsystem er to vektorer bestemt ved

$$a\begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

hvor t er et tal.

Bestem tallet t, således at vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er 45°.

VEND!

3. En cirkel har ligningen

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0 \ .$$

Bestem cirklens centrum og radius.

Bestem de tal c, for hvilke det gælder, at linjen med ligningen

$$3x-4y+c=0$$

er tangent til cirklen.

4. En kaninavler ved, at et bestemt kaninpar får unger, hvis pelse kan have 4 forskellige farver:

sort , blå (bæver) , chokolade (Havanna) og lilla.

Sandsynligheden for, at en kaninunges pels har en bestemt farve, fremgår af nedenstående tabel.

farve	sort	blå (bæver)	chokolade (Havanna)	lilla
sandsynlighed	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

I det følgende antages, at en kaninunges pelsfarve er uafhængig af de andre ungers pelsfarve. Det antages endvidere, at kaninparret får et kuld på 7 unger.

Bestem sandsynligheden for, at

1) alle ungerne i kuldet har sort pelsfarve.

2) netop 4 af ungerne i kuldet har sort pelsfarve.

3) alle ungerne i kuldet har samme pelsfarve.

Bestem det mest sandsynlige antal kaninunger med sort pelsfarve i kuldet.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \ .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

Bestem integralet

$$I(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt \ .$$

Bestem $\lim_{x\to\infty} I(x)$.

6a. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x,y)$ bevæger sig i planen, således at der til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= \sqrt{3}\sin t - \cos t \end{aligned} \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi \quad .$$

Bestem banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Bestem de punkter på banekurven, hvori hastighedsvektoren er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Vis, at for $t = \frac{\pi}{3}$ og for $t = \frac{5\pi}{6}$ er vektoren $\overrightarrow{OP}$ vinkelret på hastighedsvektoren i P.

Tegn banekurven.

6b. En virksomhed fremstiller borde og stole. Virksomhedens produktion foregår i fire afdelinger A, B, C og D. I A fremstilles halvfabrikata til borde og i B halvfabrikata til stole. Afdeling C er en samlehal, hvor borde og stole samles, og D er et lakereri, hvor borde og stole sprøjtemales. Om de enkelte afdelingers årlige kapacitet gælder:

A : Der kan fremstilles halvfabrikata til 25000 borde.
B : Der kan fremstilles halvfabrikata til 20000 stole.
C : Samling af et bord beslaglægger $\frac{1}{30000}$ af den årlige kapacitet, og samling af en stol beslaglægger $\frac{1}{25000}$ af den årlige kapacitet.
D : Sprøjtning af et bord beslaglægger $\frac{1}{24000}$ af den årlige kapacitet, og sprøjtning af en stol beslaglægger $\frac{1}{30000}$ af den årlige kapacitet.

Virksomheden kan afsætte alle sine varer, og et bord giver virksomheden en indtjening på 250 kr., mens en stol giver en indtjening på 300 kr.

På hvilke måder kan produktionen tilrettelægges for at give virksomheden størst mulig årlig indtjening?

Bestem den størst mulige årlige indtjening.

Hvorledes skulle produktionen tilrettelægges for at give virksomheden størst mulig årlig indtjening, hvis indtjeningen på et bord var den samme som indtjeningen på en stol?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1986 **86-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN
MATEMATIK

Tirsdag den 19. august 1986 kl. 9.00-13.00

Af opgaverne 7a, 7b og 7c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 4 og 7 .... ca. 15 points
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 20 points

1. I et koordinatsystem er to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ bestemt ved

$$\boldsymbol{a}\binom{5-t}{2} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\binom{4}{t+1} \quad ,$$

hvor t er et tal.

For hvilke tal t gælder, at

1) $\boldsymbol{a}$ er vinkelret på $\boldsymbol{b}$? 2) $\boldsymbol{a}$ er parallel med $\boldsymbol{b}$?

2. I vedproducerende skovbrug er langsigtet planlægning nødvendig, idet f. eks. en bøg fældes, når den er 90–120 år.
I en redegørelse fra 1983 skriver skovstyrelsen til miljøministeriet, at arealet af de private bøgeskove er aftaget siden 1930'erne. Styrelsen forventer, at dette areal i fremtiden vil blive reduceret med 0,9% pr. år, hvis udviklingen fra årene før 1983 fortsætter.
I det følgende antages, at skovstyrelsens forudsigelse holder.

Hvor mange procent vil arealet af private bøgeskove være reduceret med i år 2083 sammenlignet med arealet i 1983?

I hvilket år vil arealet af private bøgeskove være halvt så stort som i 1983?

VEND!

3. En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 0,4 og spredning 0,2.

Bestem $P(X > 0{,}3)$ og $P(0{,}2 < X < 0{,}5)$.

Bestem $P(X > 0{,}5 \mid X < 0{,}7)$.

4. I et koordinatsystem har en parabel ligningen

$$y = x^2 \ .$$

Bestem en ligning for tangenten t til parablen i punktet $P(1,1)$.

En cirkel har ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0 \ .$$

Bestem centrum og radius for cirklen.

Vis, at parabeltangenten t også er tangent til cirklen.

5. To funktioner f og F er bestemt ved

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 , \quad x > -1$$

$$F(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} - 2\ln(x+1) , \quad x > -1 \ .$$

Vis, at F er en stamfunktion til f.

Beregn hvert af tallene

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 F(x)\,dx \ .$$

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot 3^x + 5 \ .$$

Grafen for f skærer koordinatsystemets andenakse i et punkt P.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet P.

Vis, at grafen for f har en tangent, hvis hældningskoefficient er 4.

Beregn et gradtal for en af vinklerne mellem de to tangenter.

7a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3-3x^2-36x \ , \quad x \in [-5; 5] \ .$$

Bestem funktionens værdimængde.

7b. Et eksperiment består i at kaste med to sædvanlige terninger.
To hændelser A og B er bestemt ved

A: De to øjental er forskellige, og deres differens er lige.

B: Begge terninger viser mindst 3.

Undersøg, om A og B er uafhængige.

7c. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x+3$$

$$g(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}x+3 & \text{for} \quad x \leqq 6 \\ ax+b & \text{for} \quad x > 6 \end{cases} \ ,$$

hvor a og b er tal.

Bestem tallene a og b, således at funktionen g er kontinuert, og uligheden

$$f(x) \leqq g(x)$$

har løsningsmængden $L = [0;10]$.

Husk, at kun én af opgaverne 7a, 7b og 7c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-11
Udkast til ny
bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

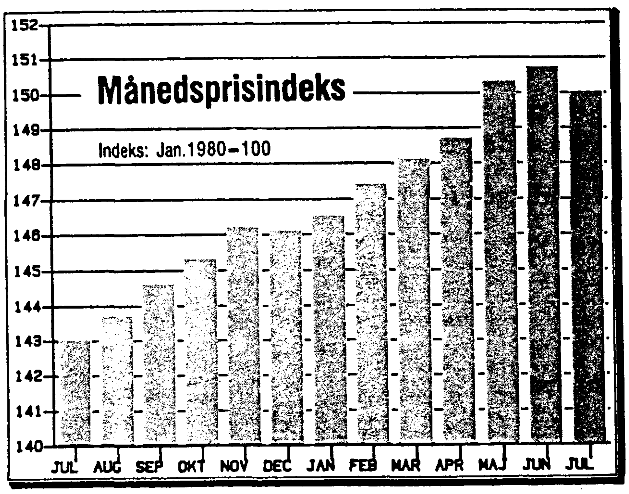
Tirsdag den 19. august 1986 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 points
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 points
opgave 6	ca. 20 points
opgave 5	ca. 25 points

1. Nedenstående udklip stammer fra Berlingske Tidende d. 20. august 1985. Udklippet viser, hvorledes månedsprisindekset har udviklet sig fra juli 1984 til juli 1985.



Sådan har månedsprisindekset bevæget sig måned for måned det sidste år

Bestem den gennemsnitlige månedlige procentvise stigning i månedsprisindekset i perioden fra juli 1984 til juli 1985.

Antag nu, at månedsprisindekset for januar 1985 sættes til 100.

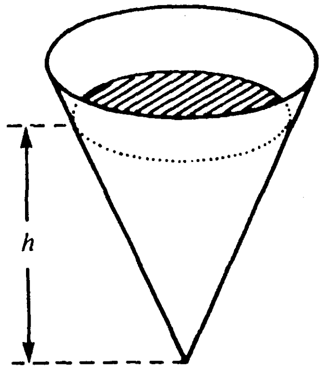
Hvad bliver da månedsprisindekset for juli 1985?

VEND!

2. En tragt som vist på figuren indeholder væske. Væskehøjden i tragten er 25 cm.
På et tidspunkt åbnes for en ventil i bunden af tragten, hvorved væsken løber ud.
Under udløbet er væskehøjden h, målt i cm, fastlagt ved

$$\frac{dh}{dt} = -k \cdot h^{-\frac{3}{2}} ,$$

hvor tiden t måles i sekunder, og hvor k er en konstant, hvis værdi bl. a. afhænger af væskens viskocitet og ventilåbningens størrelse.
Det antages, at k har værdien 20.



Bestem en forskrift for h som funktion af t.

Hvor lang tid er væsken om at løbe ud af tragten?

3. Bestem hvert af tallene

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} \quad \text{og} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$$

4. Til et eksperiment er knyttet en stokastisk variabel X, der har nedenstående sandsynligheds-fordeling.

t	1	2	3
$P(X=t)$	0,2	0,5	0,3

Beregn middelværdi og spredning for X.

Eksperimentet udføres to gange, og resultaterne er indbyrdes uafhængige. Den stokastiske variabel Y angiver den mindste af de værdier, som X antager ved de to udførelser af eksperimentet.

Bestem sandsynlighedsfordelingen for Y.

Beregn middelværdien for Y.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

Bestem de to punkter på grafen, som har størst afstand til asymptoten.

Beregn arealet af den punktmængde, der afgrænses af grafen, førsteaksen og linjen med ligningen $x = 3$.

6a. Gør rede for, at ligningen

$$e^x = 3x$$

har netop to løsninger.

Bestem den mindste af løsningerne med 5 decimaler.

6b. I en orienteret plan er givet en vektor v. Firkant $ABCD$ er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = v \quad , \quad \overrightarrow{AC} = 2v + 2\hat{v} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AD} = \hat{v} - v \ .$$

Beregn vinklerne i firkant $ABCD$.

Vis, at arealet af trekant ACD er dobbelt så stort som arealet af trekant ABC.

Skæringspunktet mellem firkantens diagonaler kaldes M.

Bestem tallene s og t, således at

$$\overrightarrow{AM} = sv + t\hat{v} \ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-12
Udkast til ny
bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 20. august 1986 kl. 9.00–13.00

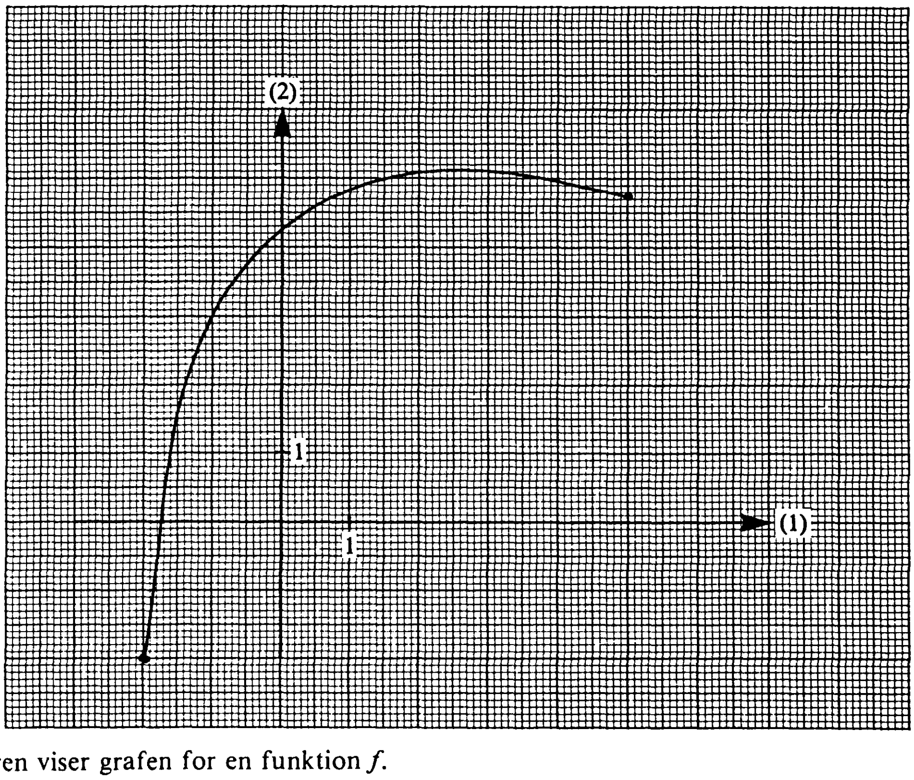
Til opgavesættet hører et bilag.

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 points
opgave 3	ca. 15 points
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 points
opgave 6	ca. 25 points

1.



Figuren viser grafen for en funktion f.

Bestem ved hjælp af figuren $f(-1)$ og $f'(-1)$.

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = (f(x))^3 \ .$$

Bestem $g'(-1)$.

VEND!

2. I et koordinatsystem er to vektorer bestemt ved

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

hvor t er et tal.

Bestem tallet t, således at vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er 45°.

3. En cirkel har ligningen

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0 \ .$$

Bestem cirklens centrum og radius.

Bestem de tal c, for hvilke det gælder, at linjen med ligningen

$$3x-4y+c=0$$

er tangent til cirklen.

4. I rummet er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En plan α har ligningen

$$4x+y-2z=0 \ .$$

Beregn vinklen mellem planen α og linjen gennem punktet O og punktet $P(1,2,2)$.

Bestem koordinatsættet til det punkt Q i planen α , der har mindst afstand til punktet P.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \ .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

Bestem integralet

$$I(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt \ .$$

Bestem $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$.

6a. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x,y)$ bevæger sig i planen, således at der til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= \sqrt{3}\sin t - \cos t \end{aligned} \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi \quad .$$

Bestem banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Bestem de punkter på banekurven, hvori hastighedsvektoren er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Vis, at for $t = \frac{\pi}{3}$ og for $t = \frac{5\pi}{6}$ er vektoren $\overrightarrow{OP}$ vinkelret på hastighedsvektoren i P.

Tegn banekurven.

6b. Vandstanden i en bestemt havn varierer med tidevandet. Man taler om flod, når vandstanden er højest, og ebbe, når vandstanden er lavest.
Vandstanden, målt i meter, er en funktion af tiden, målt i timer. For et bestemt døgn er denne funktion givet ved

$$f(t) = 2{,}75 + 0{,}70\cos(0{,}503t) \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 24 \quad .$$

Skitsér grafen for f.

Hvor stor er forskellen mellem vandstanden ved flod og vandstanden ved ebbe?

Hvor lang tid går der fra flod til næste flod?

Den fart, hvormed vandstanden ændrer sig, er givet ved $|f'(t)|$.

På hvilke tidspunkter i det pågældende døgn er denne fart størst?

Beregn for tidsrummet fra ebbe til flod den gennemsnitsfart, hvormed vandstanden ændrer sig.

På hvilke tidspunkter mellem ebbe og flod er farten lig med gennemsnitsfarten?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1986

MATEMATISK LINJE

86-8-13
Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

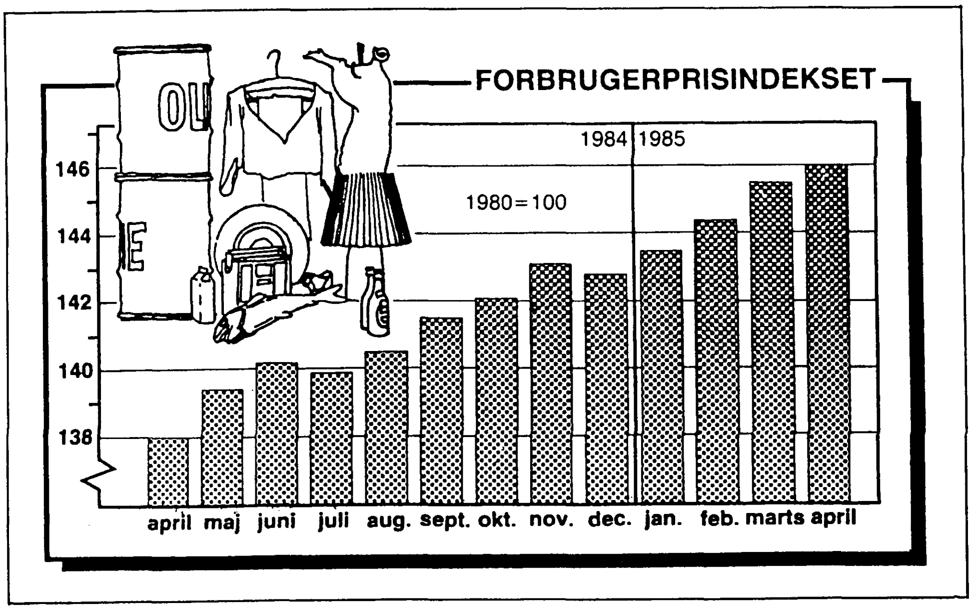
Tirsdag den 19. august 1986 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointsfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2 .... ca. 10 points
hver af opgaverne 3, 4, 5 og 6 ..... ca. 15 points
opgave 7 .... ca. 20 points

1.



Det viste udklip er fra Jyllands-Posten den 29. maj 1985 og illustrerer udviklingen i forbrugerprisindekset i perioden april 1984 til april 1985.

Bestem den gennemsnitlige månedlige procentvise stigning i forbrugerprisindekset i denne periode.

Bestem forbrugerprisindekset for april 1987 under forudsætning af, at den gennemsnitlige procentvise månedlige stigning er uændret.

VEND!

2.

274. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$

275. $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$

276. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4x - x)$

277. $\int \sin x\cos^m x\,dx = -\frac{\cos^{m+1}x}{m+1}$

278. $\int \sin^m x\cos x\,dx = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}$

279. $\int \cos^m x\sin^n x\,dx$

$$= \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x\sin^n x\,dx$$

Ovenstående formler er en del af en integraltabel.

Beregn ved hjælp af en af disse formler tallet

$$\int_{0,1}^{0,9} \sin x\cos^4 x\,dx\ .$$

3. Et eksperiment består i at kaste med seks sædvanlige terninger på én gang.

Bestem sandsynligheden for at få et ulige antal seksere.

4. Løs hver af følgende ligninger:

1) $8-x^2 = 2x$.

2) $8-(\log x)^2 = 2\log x$.

3) $8-2^{2x} = 2^{x+1}$.

5. I en trekant ABC med arealet 30 er

$$\angle A = 39^\circ \quad \text{og} \quad |AC| = 12\ .$$

Beregn $|AB|$ og $|BC|$.

Beregn $\angle B$ og $\angle C$.

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{x^2-2x+9} \quad , \quad x \in [-10;10] \quad .$$

Bestem værdimængden for f.

7a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2 \cdot 3^x + 5 \quad .$$

Grafen for f skærer koordinatsystemets andenakse i et punkt P.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet P.

Vis, at grafen for f har en tangent, hvis hældningskoefficient er 4.

Beregn et gradtal for en af vinklerne mellem de to tangenter.

7b. Funktionerne f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \quad , \quad x \in [-1;4]$$

$$g(x) = 2^x \quad , \quad x \in [-1;4] \quad .$$

Udfyld en tabel som nedenstående.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$						
$g(x)$						

Tegn i samme koordinatsystem grafen for f og grafen for g.

Ligningen $f(x) = g(x)$ har tre løsninger.

Bestem med tre decimaler den løsning, der ligger i intervallet $[-1;0]$.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987 **87-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Tirsdag den 12. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 15 point
opgave 8 .... ca. 25 point

1. Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \ .$$

2. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2}{y}$$

den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(0,-1)$.

Bestem en ligning for grafens tangent i punktet P.

3. I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$A(2,2) \ , \quad B(3,3) \quad \text{og} \quad C(5,1) \ .$$

Beregn sider og vinkler i trekant ABC.

En linje l gennem punktet A deler trekant ABC i to trekanter, hvis arealer er lige store.

Bestem en ligning for linjen l.

4. **Mønttelefonerne har det bedre end deres rygte. Faktisk virker 93% af de ca. 3.000 offentlige mønttelefoner, der står i 01, 02 og 03 området, altid i dag.**

(*ktas-annonce,* 1986)

ktas
MØNTTELEFONER

Som det fremgår af det viste udklip, oplyste telefonselskabet **ktas**, at 93% af selskabets mønttelefoner altid virker. I det følgende antages det derfor, at sandsynligheden for, at en mønttelefon virker, er 0,93. Det forudsættes desuden, at det, at en mønttelefon virker, er uafhængig af, at andre mønttelefoner virker.
I en by har **ktas** opstillet 20 mønttelefoner.

Bestem sandsynligheden for, at

1) ingen af byens mønttelefoner er defekte.
2) mindst to af byens mønttelefoner er defekte.
3) mindst to af byens mønttelefoner er defekte, når det oplyses, at der er mindst én defekt mønttelefon.

5. Antallet af radioaktive atomer i en given mængde radioaktivt stof kan beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion N af tiden t, og kan derfor angives ved

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}, \quad t \geqq 0 ,$$

hvor N_0 og k er positive tal.
I udklippet, der stammer fra pjecen »Fødevarer og radioaktivitet«, Miljøstyrelsen 1986, gives et eksempel, hvor 1 liter mælk på måletidspunktet ($t = 0$) udviser en aktivitet på 100 becquerel cæsium-137. Det betyder, idet t måles i sekunder, at

$$|N'(0)| = 100 .$$

Beregn på grundlag af udklippets oplysninger et skøn over, hvor mange cæsium-137 atomer 1 liter af mælken indeholder på måletidspunktet (1 år sættes til $3{,}156 \cdot 10^7$ sekunder).

Bequerel:
En måleenhed for mængden – aktiviteten – af et givet radioaktivt stof. En becquerel svarer til, at der hvert sekund er netop en atomkerne, som omdannes og udsender stråling. Er der f. eks. i mælk målt 100 becquerel cæsium-137 pr. liter, betyder det, at der i denne liter mælk hvert sekund er 100 cæsium-137 atomkerner, som omdannes og udsender stråling.

Cæsium-137:
Radioaktivt stof med en halveringstid på 30 år.

Halveringstid:
Den tid, der går, før antallet af radioaktive atomer i en given mængde radioaktivt stof er faldet til det halve. Halveringstiden er en karakteristisk og uforanderlig egenskab ved ethvert radioaktivt stof. Den kan strække sig fra brøkdele af et sekund hos nogle stoffer til millioner af år hos andre.

6. Gør rede for, at der for ethvert tal x gælder, at

$$e^{2x} - 3x - \tfrac{8}{9} > 0 \ .$$

7. For ethvert tal a er en potensfunktion f givet ved

$$f(x) = x^a, \quad x>0 \ .$$

1) Bestem a, når det oplyses, at $f(2x) = 5 \cdot f(x)$.

2) Bestem a, når det oplyses, at $f(x)$ øges med 20%, når x øges med 10%.

8. En funktion f er bestemt ved, at

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} - \tfrac{1}{2}x \ , \quad x \geqq 0 \ .$$

Undersøg monotoniforholdene for f.

Vis, at

$$f(x) - \tfrac{1}{2}x = \frac{16}{x + \sqrt{x^2 + 16}} \ , \quad x \geqq 0 \ ,$$

og gør rede for, at grafen for f har en asymptote.

Tegn grafen for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 3 \quad \wedge \quad 0 \leqq y \leqq f(x)\} \ .$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere punktmængden M om førsteaksen.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987 **87-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 13. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. Om to hændelser A og B i et sandsynlighedsfelt (U,P) gælder, at

$$P(A \mid B) = \tfrac{1}{2}\ , \quad P(A \mid \complement B) = \tfrac{1}{5} \quad \text{og} \quad P(A) = \tfrac{1}{3}\ .$$

Bestem $P(B)$.

2. En cirkel er i et koordinatsystem givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0\ .$$

Bestem en ligning for hver af de to cirkeltangenter, der går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

3. En fabrikant skal for at opnå en ønsket farve på sin produktion af sodavand tilsætte to farvestoffer, A og B. Den størst tilladte tilsætning af farvestoffet A er 25 mg/l og af farvestoffet B 100 mg/l.
For at opnå den rette farvenuance skal mængden af B være mindst dobbelt så stor og højst fem gange så stor som mængden af A. For at opnå en tilstrækkelig kraftig farve skal den samlede mængde af de to farvestoffer være mindst 110 mg/l.
Prisen på farvestoffet A er 61,00 kr. pr. 25 g, og prisen på farvestoffet B er 42,70 kr. pr. 25 g.

Undersøg, hvor meget af farvestoffet A og hvor meget af farvestoffet B fabrikanten skal tilsætte pr. liter, når ovennævnte betingelser skal være opfyldt, og udgiften til farvestof skal være mindst mulig.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{8}{x} , \quad x \in \mathrm{R}_+ \ .$$

Vis, at f har en omvendt funktion f^{-1}.

Bestem hvert af tallene $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(\frac{7}{2})$ og $(f^{-1})'(\frac{7}{2})$.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin x + \cos x \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

Bestem funktionens fortegn og dens værdimængde.

Skitsér grafen for f.

Grafen for f afgrænser i første kvadrant sammen med koordinatsystemets akser en punktmængde M, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

6a. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O.
En afbildning f af planen på sig selv er bestemt ved

$$f(x,y) = (3x - 4y + 10 \ , \ 4x + 3y + 10) \ .$$

Afbildningen f har netop ét fikspunkt C.

Bestem koordinatsættet til punktet C.

Afbildningen f er sammensat af en drejning om C i positiv omløbsretning og en multiplikation ud fra C med positiv multiplikationsfaktor.

Bestem drejningsvinklen og multiplikationsfaktoren.

Ved afbildningen f føres linjen l med ligningen $y = x$ over i en linje l_1.

Bestem en ligning for l_1.

Bestem en ligning for den linje l_2, for hvilken $f(l_2) = l$.

6b.

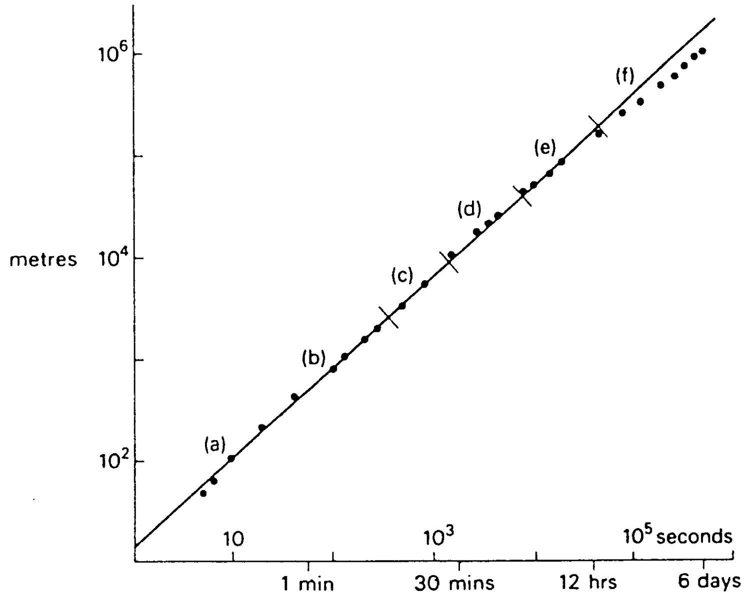


Fig. 6.3 Records for male runners, 50 yards to 623 miles, at 26 August 1965. Distance in metres plotted against time in seconds, both on logarithmic scales. Note approximate rectilinearity. Small letters correspond with the lines of Fig. 6.1. Line drawn by eye (Lloyd 1966)

Kilde: Maths at work, red. af G. Howson.

Figuren viser mandlige løberes rekordtider på forskellige distancer. Tiderne er målt i sekunder og distancerne i meter. Rekordtiderne stammer fra august 1965, hvor tiden på 100 m var 10,0 s, og tiden på 5000 m var 804,2 s.

Bestem en forskrift for den funktion f, der beskriver løbets distance som funktion af den opnåede rekordtid for tider under 10^4 s.

Ved lignende undersøgelser i 1981, hvor både mandlige og kvindelige løberes rekordtider, henholdsvis t_m og t_k, som funktion af løbets distance y blev opgjort, fandt man

for mandlige løbere: $\log t_m = -1{,}2682 + 1{,}1243 \log y$
for kvindelige løbere: $\log t_k = -1{,}2374 + 1{,}1306 \log y$.

(Løbedistancen y måles i meter og rekordtiderne t_m og t_k i sekunder.)

Benyt dette til at bestemme de kvindelige løberes rekordtider som funktion af de mandlige løberes for året 1981.

Det antages, at den samme funktion beskriver sammenhængen mellem kvindelige og mandlige løberes rekordtider i 1965.

Bestem under denne antagelse rekordtiden på 100 m for kvinder i 1965?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987 **87-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 11. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 15 point
opgave 8 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje l bestemt ved

$$\mathscr{P}:\ y = -\tfrac{1}{2}x^2 - 6x - 16$$
$$l:\ y = 2x + 14\ .$$

Tegn $\mathscr{P}$ og l.

Løs uligheden

$$-\tfrac{1}{2}x^2 - 6x - 16 \leqq 2x + 14\ .$$

Parablen $\mathscr{P}$ skærer førsteaksen i to punkter. Det af de to punkter, der har den største førstekoordinat, kaldes A.

Beregn afstanden fra A til l.

2. I et koordinatsystem er givet to vektorer

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}.$$

Beregn vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

Bestem tallet t, således at vektoren $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ står vinkelret på $\boldsymbol{b}$.

3. I en reklame for en bestemt type luftfilter står der, at det er i stand til at tilbageholde 80% af de mikroorganismer, der er i luften.

   Hvor mange procent af luftens mikroorganismer tilbageholdes, når man anvender 2 lag af denne type filter?

   Hvor mange lag af denne type filter kræves, når man vil tilbageholde mindst 99,9% af luftens mikroorganismer?

4. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x - 12}{x - 2} .$$

   Grafen for f har en skrå asymptote.

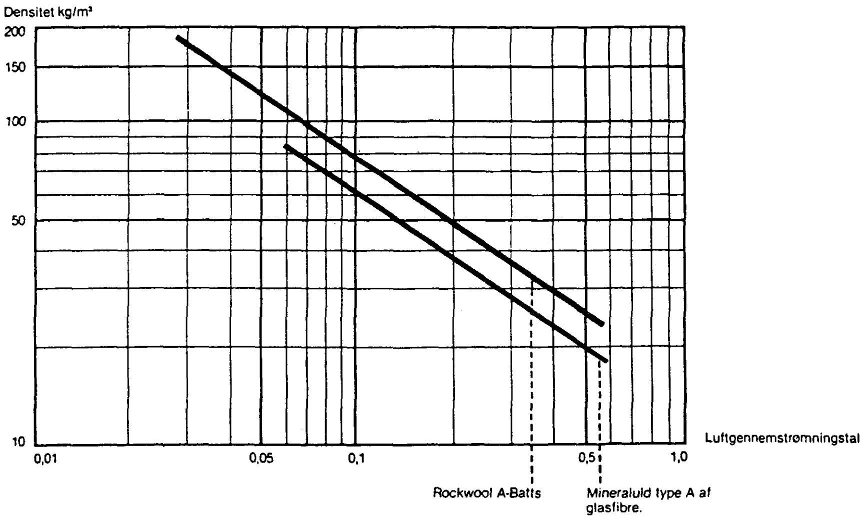
   Bestem en ligning for denne.

   Vis, at det for enhver tangent til grafen gælder, at tangentens hældningskoefficient er større end hældningskoefficienten for den skrå asymptote.

5. Beregn hvert af tallene

$$\int_3^8 \sqrt{x+1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^3 x^2\sqrt{x^3+3}\,dx .$$

6. I forbindelse med lydisolering af tagkonstruktioner har isoleringsmaterialets luftgennemstrømningstal afgørende betydning.
   Nedenstående figur findes i en produktbeskrivelse fra firmaet Rockwool.



   Bestem en forskrift for den funktion, der for »Mineraluld type A af glasfibre« angiver densiteten som funktion af luftgennemstrømningstallet.

7. En bestemt type margarine sælges i 400-grams pakninger. Afvejningen sker på en automatisk vægt.
Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver den faktiske vægt af margarinen i en pakke. Det oplyses, at X er normalfordelt. Ved indstilling på vægten kan middelværdien af X ændres, hvorimod X har en fast spredning på 4 g. Vægten indstilles, så middelværdien af X er 405 g.

Bestem sandsynligheden for, at en forbruger får en pakke margarine, som indeholder mindre end 400 g.

For at undgå reklamationer vil fabrikanten indstille den automatiske vægt, så sandsynligheden for at få en pakke med mindre end 400 g bliver 2%.

Hvilken middelværdi skal vægten da indstilles til?

8. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0{,}12x^2 - 0{,}01x^3 \ .$$

Bestem nulpunkter, fortegn og monotoniforhold for f.

Tegn grafen for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde i første kvadrant.

Beregn arealet af denne punktmængde.

Grafen for f har netop to tangenter med hældningskoefficient 0,45.

Bestem en ligning for hver af disse.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-4

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 12. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 . . . . ca. 15 point
opgave 8 . . . . ca. 25 point

1. Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \ .$$

2. Den årlige værdistigning af en byggegrund har i de første tre år af en tiårsperiode været henholdsvis 14%, 2% og 10%.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise værdistigning i disse tre år.

Over hele tiårsperioden påregnes en gennemsnitlig årlig procentvis værdistigning på 9%.

Hvilken gennemsnitlig årlig procentvis værdistigning skal da opnås i de sidste syv år?

I tiårsperioden forventes byggeprisindekset at stige fra 120 til 250.

Undersøg, om den påregnede procentvise stigning af byggegrundsværdien i tiårsperioden er større end den forventede procentvise stigning i byggeprisindekset i samme periode.

3. I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$A(2,2)\ ,\quad B(3,3)\quad \text{og}\quad C(5,1)\ .$$

Beregn sider og vinkler i trekant ABC.

En linje l gennem punktet A deler trekant ABC i to trekanter, hvis arealer er lige store.

Bestem en ligning for linjen l.

4. **Mønttelefonerne har det bedre end deres rygte. Faktisk virker 93% af de ca. 3.000 offentlige mønttelefoner, der står i 01, 02 og 03 området, altid i dag.**

(*ktas-annonce*, 1986)

ktas
MØNTTELEFONER

Som det fremgår af det viste udklip, oplyste telefonselskabet **ktas**, at 93% af selskabets mønttelefoner altid virker. I det følgende antages det derfor, at sandsynligheden for, at en mønttelefon virker, er 0,93. Det forudsættes desuden, at det, at en mønttelefon virker, er uafhængig af, at andre mønttelefoner virker.
I en by har **ktas** opstillet 20 mønttelefoner.

Bestem sandsynligheden for, at

1) ingen af byens mønttelefoner er defekte.
2) mindst to af byens mønttelefoner er defekte.
3) mindst to af byens mønttelefoner er defekte, når det oplyses, at der er mindst én defekt mønttelefon.

5. Antallet af radioaktive atomer i en given mængde radioaktivt stof kan beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion N af tiden t, og kan derfor angives ved

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}, \quad t \geqq 0 \ ,$$

hvor N_0 og k er positive tal.
I udklippet, der stammer fra pjecen »Fødevarer og radioaktivitet«, Miljøstyrelsen 1986, gives et eksempel, hvor 1 liter mælk på måletidspunktet ($t = 0$) udviser en aktivitet på 100 becquerel cæsium-137. Det betyder, idet t måles i sekunder, at

$$|N'(0)| = 100 \ .$$

Beregn på grundlag af udklippets oplysninger et skøn over, hvor mange cæsium-137 atomer 1 liter af mælken indeholder på måletidspunktet (1 år sættes til $3{,}156 \cdot 10^7$ sekunder).

Bequerel:
En måleenhed for mængden – aktiviteten – af et givet radioaktivt stof. En becquerel svarer til, at der hvert sekund er netop en atomkerne, som omdannes og udsender stråling. Er der f. eks. i mælk målt 100 becquerel cæsium-137 pr. liter, betyder det, at der i denne liter mælk hvert sekund er 100 cæsium-137 atomkerner, som omdannes og udsender stråling.

Cæsium-137:
Radioaktivt stof med en halveringstid på 30 år.

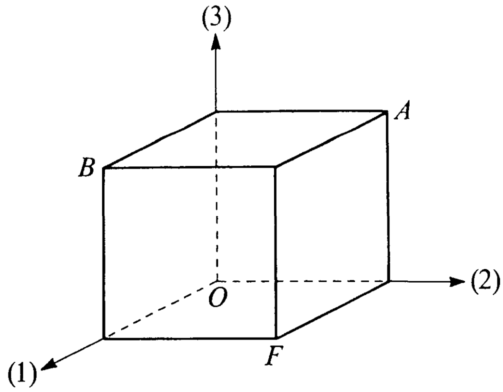
Halveringstid:
Den tid, der går, før antallet af radioaktive atomer i en given mængde radioaktivt stof er faldet til det halve. Halveringstiden er en karakteristisk og uforanderlig egenskab ved ethvert radioaktivt stof. Den kan strække sig fra brøkdele af et sekund hos nogle stoffer til millioner af år hos andre.

6. Figuren viser en terning med kantlængde 1 i et koordinatsystem i rummet.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder hjørnespidserne $O(0,0,0)$, $A(0,1,1)$ og $B(1,0,1)$.

Projektionen af hjørnespidsen $F(1,1,0)$ på planen α betegnes P.

Bestem koordinatsættet til punktet P.



7. For ethvert tal a er en potensfunktion f givet ved

$$f(x) = x^a, \quad x>0 \ .$$

1) Bestem a, når det oplyses, at $f(2x) = 5 \cdot f(x)$.

2) Bestem a, når det oplyses, at $f(x)$ øges med 20%, når x øges med 10%.

8. En funktion f er bestemt ved, at

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} - \tfrac{1}{2}x \ , \quad x \geqq 0 \ .$$

Undersøg monotoniforholdene for f.

Vis, at

$$f(x) - \tfrac{1}{2}x = \frac{16}{x + \sqrt{x^2 + 16}} \ , \quad x \geqq 0 \ ,$$

og gør rede for, at grafen for f har en asymptote.

Tegn grafen for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 3 \quad \wedge \quad 0 \leqq y \leqq f(x)\} \ .$$

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere punktmængden M om førsteaksen.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-5

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 13. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4 ...	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. I et koordinatsystem i planen er givet to punkter

$$A(-1,3) \quad \text{og} \quad B(3,4) \ .$$

Bestem en ligning for den linje l, der går gennem A og B.

Beregn afstanden fra punktet $P(8,1)$ til linjen l.

Beregn et gradtal for vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{PB}$.

2. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x\sqrt{2x - x^2} \ .$$

Bestem definitionsmængden og værdimængden for f.

3. Et mejeri har anskaffet en ny maskine, der skal fylde sødmælk på literkartoner. Maskinen er indstillet, således at den mælkemængde, der fyldes i en karton, er normalfordelt med middelværdi 1005 ml og spredning 5 ml.

Undersøg, om den pågældende maskine kan leve op til mejeriets krav om, at mindst 95% af kartonerne skal indeholde mindst 1000 ml sødmælk.

På mejeriet indstilles maskinen nu, så netop 95% af de påfyldte kartoner indeholder mindst 1000 ml sødmælk.

Hvilken middelværdi er maskinen da blevet indstillet til, når spredningen uændret er 5 ml?

Af en dags produktion udtages tilfældigt 20 kartoner.

Bestem sandsynligheden for, at mindst én af disse kartoner indeholder mindre end 1000 ml sødmælk.

4. Når man fylder luft i et bildæk, forbinder man dækkets ventil med en beholder, der indeholder komprimeret luft. I det følgende antages, at lufttrykket i beholderen er konstant under påfyldningen.
Dæktrykket p, målt i kPa, kan beskrives som en funktion af tiden t, målt i sekunder. Under påfyldningen vokser dæktrykket på en sådan måde, at den hastighed, hvormed det vokser, er proportional med trykforskellen mellem beholder og dæk. Proportionalitetsfaktoren har værdien 0,02 (denne størrelse afhænger blandt andet af bildækkets volumen og af luftmodstanden i ventilen), og lufttrykket i beholderen er 1000 kPa.

Opskriv den differentialligning, der beskriver, hvorledes dæktrykket p under påfyldningen ændrer sig som funktion af tiden t.

Hvor lang tid varer det at fylde et fladt dæk, det vil sige et dæk med trykket 1 atmosfære = 101 kPa, til trykket 190 kPa?

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin x + \cos x \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

Bestem funktionens fortegn og dens værdimængde.

Skitsér grafen for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser en punktmængde M i første kvadrant, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

6a. En sygdomsepidemi er brudt ud i en befolkning. Antallet af smittede i befolkningen beskrives ved en funktion S af tiden t, hvor t angives i uger. Det oplyses, at

$$S(0) = 20\,000 \quad \text{og} \quad S'(0) = 3920 \ .$$

Det antages, at S opfylder følgende to betingelser:

1) Grafen for S er en logistisk kurve, hvilket betyder, at funktionen S tilfredsstiller differentialligningen

$$S'(t) = S(t)\,(b - aS(t)) \ ,$$

hvor a og b er positive tal.

2) Antallet S_∞ af smittede i hele sygdomsperioden bliver 1 000 000, hvilket betyder, at

$$S_\infty = \lim_{t \to \infty} S(t) = 1\,000\,000 \ .$$

Bestem tallene a og b.

Bestem en forskrift for S.

Bestem det tidspunkt t_1, hvor antallet $S(t_1)$ af smittede er 95% af S_∞.

6b.

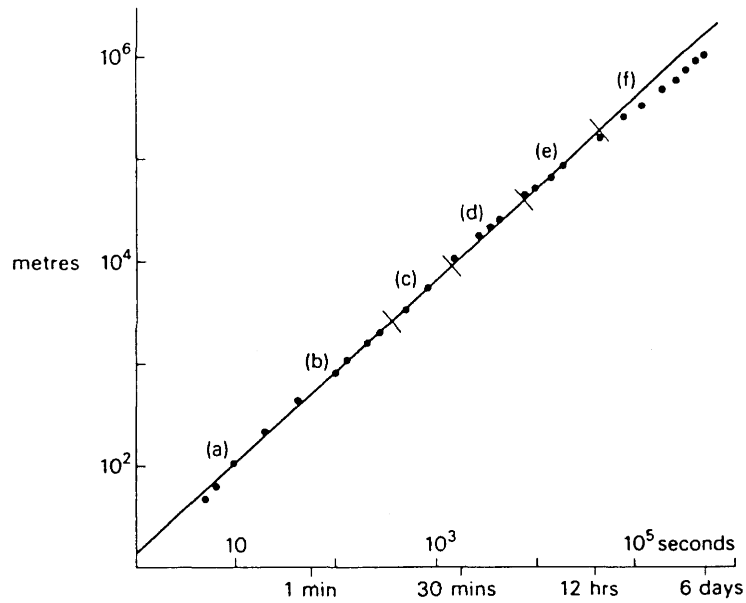


Fig. 6.3 Records for male runners, 50 yards to 623 miles, at 26 August 1965. Distance in metres plotted against time in seconds, both on logarithmic scales. Note approximate rectilinearity. Small letters correspond with the lines of Fig. 6.1. Line drawn by eye (Lloyd 1966)

Kilde: Maths at work, red. af G. Howson.

Figuren viser mandlige løberes rekordtider på forskellige distancer. Tiderne er målt i sekunder og distancerne i meter. Rekordtiderne stammer fra august 1965, hvor tiden på 100 m var 10,0 s, og tiden på 5000 m var 804,2 s.

Bestem en forskrift for den funktion f, der beskriver løbets distance som funktion af den opnåede rekordtid for tider under 10^4 s.

Ved lignende undersøgelser i 1981, hvor både mandlige og kvindelige løberes rekordtider, henholdsvis t_m og t_k, som funktion af løbets distance y blev opgjort, fandt man

for mandlige løbere:	$\log t_m = -1{,}2682 + 1{,}1243 \log y$
for kvindelige løbere:	$\log t_k = -1{,}2374 + 1{,}1306 \log y.$

(Løbedistancen y måles i meter og rekordtiderne t_m og t_k i sekunder.)

Benyt dette til at bestemme de kvindelige løberes rekordtider som funktion af de mandlige løberes for året 1981.

Det antages, at den samme funktion beskriver sammenhængen mellem kvindelige og mandlige løberes rekordtider i 1965.

Bestem under denne antagelse rekordtiden på 100 m for kvinder i 1965?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-6

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Mandag den 11. maj 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 15 point
opgave 8 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje l bestemt ved

$$\mathscr{P}: \; y = -\tfrac{1}{2}x^2 - 6x - 16$$
$$l: \; y = 2x + 14 \; .$$

Tegn $\mathscr{P}$ og l.

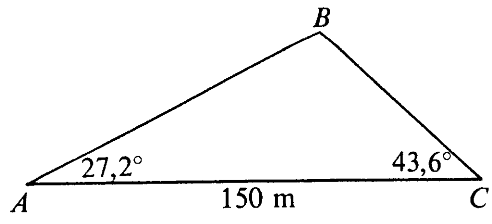
Løs uligheden

$$-\tfrac{1}{2}x^2 - 6x - 16 \leqq 2x + 14 \; .$$

Parablen $\mathscr{P}$ skærer førsteaksen i to punkter. Det af de to punkter, der har den største førstekoordinat, kaldes A.

Beregn afstanden fra A til l.

2. En ballon svæver over en vandret mark i punktet B. Fra to punkter A og C på marken måles vinklen mellem vandret og sigtelinjen til B. Afstanden mellem A og C er 150 m, og gradtallene for de nævnte vinkler er vist på figuren.



Hvor højt er ballonen oppe?

3. I en reklame for en bestemt type luftfilter står der, at det er i stand til at tilbageholde 80% af de mikroorganismer, der er i luften.

   Hvor mange procent af luftens mikroorganismer tilbageholdes, når man anvender 2 lag af denne type filter?

   Hvor mange lag af denne type filter kræves, når man vil tilbageholde mindst 99,9% af luftens mikroorganismer?

4. Af de akademiingeniører, der fik deres eksamen i 1986, var 24,7% fra kemiretningen, de øvrige fra maskin-, bygnings- eller elektroretningen.
   Blandt årgangens akademiingeniører var 21,0% kvinder. Fra maskin-, bygnings- og elektroretningen var kun 9,0% kvinder.

   Hvor mange procent af kemiingeniørerne var kvinder?

   Hvor stor en procentdel af de kvindelige akademiingeniører fra årgangen var ikke kemiingeniører?

5. I en elektrisk kreds er strømstyrken $I(t)$ til tiden t givet ved

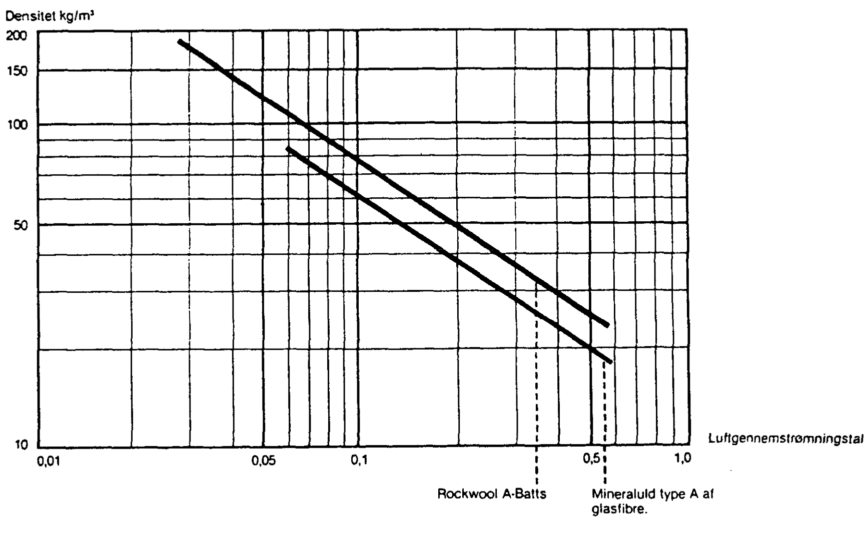
$$I(t) = 4{,}2 + 2{,}5\sin(50\pi t)\ ,\quad t \geqq 0\ ,$$

   (I måles i ampere og t i sekunder).

   Angiv strømstyrken til tiden $t = 0$ samt den største og den mindste strømstyrke.

   Hvornår er strømstyrken første gang 6,0 ampere?

6. I forbindelse med lydisolering af tagkonstruktioner har isoleringsmaterialets luftgennemstrømningstal afgørende betydning.
   Nedenstående figur findes i en produktbeskrivelse fra firmaet Rockwool.



   Bestem en forskrift for den funktion, der for »Mineraluld type A af glasfibre« angiver densiteten som funktion af luftgennemstrømningstallet.

7. En bestemt type margarine sælges i 400-grams pakninger. Afvejningen sker på en automatisk vægt.
Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver den faktiske vægt af margarinen i en pakke. Det oplyses, at X er normalfordelt. Ved indstilling på vægten kan middelværdien af X ændres, hvorimod X har en fast spredning på 4 g. Vægten indstilles, så middelværdien af X er 405 g.

Bestem sandsynligheden for, at en forbruger får en pakke margarine, som indeholder mindre end 400 g.

For at undgå reklamationer vil fabrikanten indstille den automatiske vægt, så sandsynligheden for at få en pakke med mindre end 400 g bliver 2%.

Hvilken middelværdi skal vægten da indstilles til?

8. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0{,}12x^2 - 0{,}01x^3 \ .$$

Bestem nulpunkter, fortegn og monotoniforhold for f.

Tegn grafen for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde i første kvadrant.

Beregn arealet af denne punktmængde.

Grafen for f har netop to tangenter med hældningskoefficient 0,45.

Bestem en ligning for hver af disse.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987 **87-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Onsdag den 19. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 10 point
hver af opgaverne 2–9 . . . . ca. 15 point

1. Løs uligheden

$$\frac{1}{x-2} > 2 - \frac{3}{x} .$$

2. Figuren viser en skitse af grafen for funktionen f bestemt ved

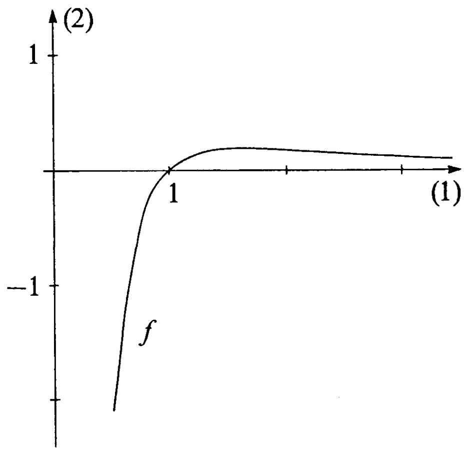
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} , \quad x > 0 .$$

Beregn størsteværdien for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq e^2 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af M.



3. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længde 3.
En vektor $\boldsymbol{b}$ er bestemt ved

$$\boldsymbol{b} = \tfrac{3}{2}\boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{a}} \ .$$

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

Beregn vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Beregn længden af projektionen af $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{b}$.

4. I et koordinatsystem i planen er to linjer l og m bestemt ved

$$\begin{aligned} l&: \quad 5x - y + 7 = 0 \\ m&: \quad 3x + 4y + 24 = 0 \ . \end{aligned}$$

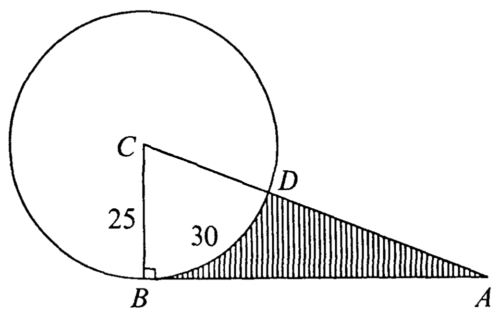
En ret affinitet med førsteaksen som affinitetsakse og positivt forvandlingstal k afbilder l og m på to linjer, der står vinkelret på hinanden.

Bestem forvandlingstallet k.

5. Figuren viser en cirkel og en trekant. Buestykket $\widehat{BD}$ har længden 30, og cirklens radius er 25.

Beregn $\angle BCD$.

Beregn arealet af den skraverede punktmængde.



6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin 2x + \sin x + 3 \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

Bestem en ligning for grafens tangent i det punkt, der har førstekoordinaten π.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen, hvori der er en tangent med hældningskoefficient 1.

7. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)$$

den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(1,2)$.

Bestem desuden den løsning, hvis graf i det punkt, der har førstekoordinat 1, har en tangent med hældningskoefficient 3.

8.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Ugens vindertal	7	38	45	3	18	8	37	47	49	15

Figuren ovenfor viser en Lotto-plade, der indgik i en konkurrence, som et ugeblad afholdt i 1986. Alle Lotto-pladerne i konkurrencen indeholder tallene fra 1 til 49, og på hver plade er der rundt om 7 af tallene trykt en cirkel. De 7 tal kaldes pladens Lotto-numre.

Hvor mange forskellige Lotto-plader kan der laves?

På den viste plade er netop 2 af de 7 Lotto-numre ulige.

Hvor mange forskellige Lotto-plader med netop 2 ulige Lotto-numre kan der laves?

Nederst på figuren ses de såkaldte vindertal for en bestemt uge. Der er gevinst på en Lotto-plade, hvis samtlige 7 Lotto-numre optræder blandt de 10 vindertal.

Beregn sandsynligheden for, at der i den pågældende uge er gevinst på en tilfældigt valgt Lotto-plade.

VEND!

9.

Graviditet: Rutinescanning giver flere problemer end det løser

Nogle få hospitaler har forsøgsmæssigt kørt med 2 eller 3 rutine-scanninger gennem graviditeten, for at opdage væksthæmmede børn. I Skandinavien regner man med at 4% af fostrene er væksthæmmede. Det vil sige, blandt 1000 gravide kvinder har ca. 40 et væksthæmmet foster, mens 960 har normale fostre.

- ca. 2 kvinder vil få at vide, at alt er normalt, selv om deres foster er væksthæmmet.
- ca. 38 kvinder vil få stillet den korrekte diagnose, at deres foster er væksthæmmet.
- ca. 96 vil få at vide, at deres foster er væksthæmmet, selv om det ikke fejler noget.

Det viste udklip er fra Information d. 2. oktober 1986. Af udklippet fremgår, at scanning af gravide kvinder for at afsløre, om fosteret er væksthæmmet, er en metode, som er behæftet med en vis usikkerhed.
Erfaringerne viser, at sandsynligheden er

1) 0,04 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster.
2) 0,002 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster, og scanningen viser et normalt foster.
3) 0,038 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster, og scanningen viser et væksthæmmet foster.
4) 0,096 for, at en gravid kvinde har et normalt foster, og scanningen viser et væksthæmmet foster.

Bestem sandsynligheden for, at scanningen af en gravid kvinde viser, at hendes foster er væksthæmmet.

Bestem sandsynligheden for, at en gravid kvinde, hvis scanning har vist et væksthæmmet foster, har et normalt foster.

Bestem sandsynligheden for, at en gravid kvinde ved scanningen får stillet en korrekt diagnose.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987 **87-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Torsdag den 20. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 4	ca. 25 point

1. I et koordinatsystem i planen er en linje l og en cirkel C bestemt ved

$$l: \quad x + y - 4 = 0$$
$$C: \quad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0 \ .$$

Tegn linjen l og cirklen C.

Gør rede for, at linjen l er tangent til cirklen C.

2. Om en homomorfi $f\colon (\mathrm{R}_+, \cdot) \curvearrowright (\mathrm{R}, +)$ gælder, at $f(2) = 7$.
Bestem $f(4)$, $f(8)$, $f(\frac{1}{2})$ og $f(\sqrt{2})$.

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x \ , \quad x \in \mathrm{R} \ .$$

Bestem værdimængden for f.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \ln(f(x)) \ .$$

Bestem definitionsmængden og værdimængden for g.

4. Når en væske, der strømmer gennem et rør, passerer en ventil, sker der et trykfald i væsken. Figuren nedenfor, der stammer fra bogen »Støj fra installationer« (Statens Byggeforskningsinstitut, 1970), viser for en bestemt aftapningsventil, hvorledes trykfaldet Δp (målt i kp/cm^2) afhænger af vandstrømmen V (målt i l/min).

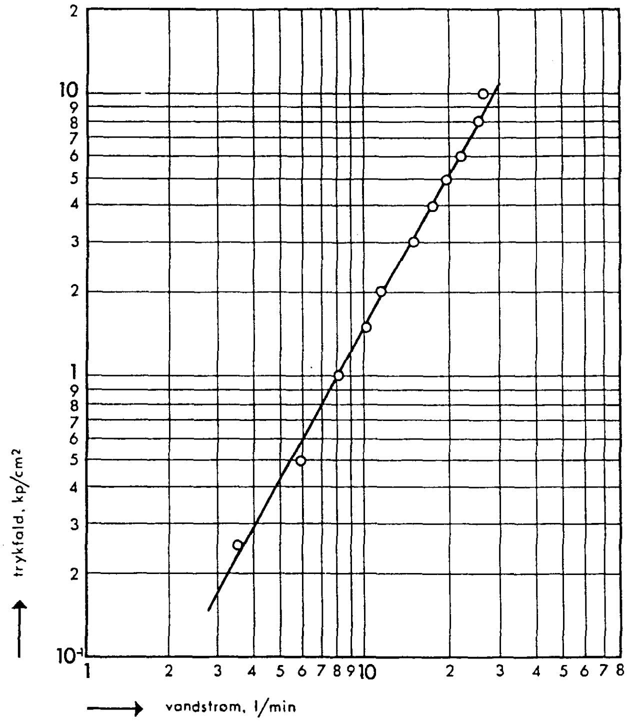


Fig. 3.3. Trykfald som funktion af vandstrøm for aftapningsventil.

Bestem en forskrift for den funktion, hvis graf er vist på figuren.

Målinger har vist, at den støj, der frembringes ved væskens passage af den pågældende aftapningsventil, afhænger af væskens trykfald over ventilen. Støjniveauet L (målt i dB(A)) kan udtrykkes ved

$$L = 37{,}6 + 26{,}5 \log(\Delta p) \ .$$

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes støjniveauet L afhænger af vandstrømmen V.

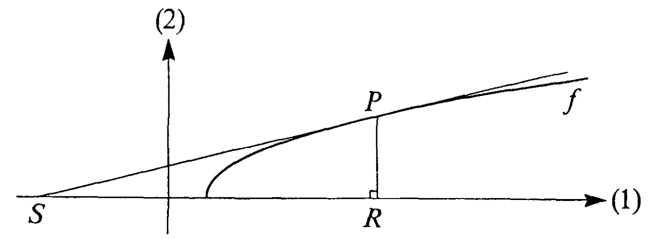
Ifølge Bygningsreglementet 1982 (BR-82) må brugsvandsinstallationer i beboelsesbygninger ikke frembringe et støjniveau, der overstiger 35 dB(A).

Hvor hurtigt kan man aftappe 50 liter vand fra en hane, der er forsynet med en aftapningsventil af den nævnte type, når man skal overholde bestemmelserne i BR-82?

5a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{ax - b} \ ,$$

hvor a og b er positive tal.
Med P betegnes et vilkårligt punkt med positiv andenkoordinat på grafen for f. Projektionen af P på førsteaksen kaldes R, og skæringspunktet mellem tangenten til grafen i P og førsteaksen kaldes S.



Vis, at grafen for f deler trekant PRS i to punktmængder om hvilke det gælder, at arealet af den ene er dobbelt så stort som arealet af den anden.

5b. I en krukke er der n sorte og $2n$ røde kugler, $n \geqq 2$.

På tilfældig måde og samtidigt udtages 2 kugler.

Bestem, udtrykt ved n, sandsynligheden for hændelsen
A: Den ene kugle er sort, og den anden er rød.

På tilfældig måde og samtidigt udtages 3 kugler.

Bestem, udtrykt ved n, sandsynligheden for hændelsen
B: To af kuglerne er sorte, og den tredje er rød.

Vis, at sandsynligheden for A er en aftagende funktion af n, og at sandsynligheden for B er en voksende funktion af n.

5c. En skøjteløber gennemløber en ellipseformet bane med centrum O og halvakser på 18 m og 13,5 m. Bevægelsen kan i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O beskrives ved, at hun til tiden t (målt i sekunder) befinder sig i punktet P_t, hvor

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 18\cos\left(\frac{1}{3}t\right) \\ 13{,}5\sin\left(\frac{1}{3}t\right) \end{pmatrix} , \quad t \geqq 0 \ .$$

Hvor mange sekunder er hun om at gennemløbe banen?

Bestem stedvektor, hastighedsvektor og accelerationsvektor for bevægelsen til tiden $t = \pi$.

Vis, at farten (længden af hastighedsvektoren) kan skrives som en funktion af $\cos\left(\frac{1}{3}t\right)$, og benyt dette til at bestemme den maksimale fart.

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987 **87-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 18. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 15 point
opgave 8 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er en linje l fastlagt ved, at den går gennem punktet $P(-2,-1)$ og er parallel med vektoren $\boldsymbol{a}(3,-2)$. En linje m har vektoren $\boldsymbol{b}(4,9)$ som normalvektor og skærer førsteaksen i punktet $Q(-2,0)$.

   Beregn en af vinklerne mellem l og m.

   Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{x + \ln x} \quad , \quad x \in [1; 10] \ .$$

   Bestem værdimængden for f.

3. For malkekøer af rød dansk malkerace gælder, at smørfedtydelsen pr. år målt i kg er normalfordelt med middelværdi 250 kg og spredning 38 kg.

Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt malkeko af denne race har en smørfedtydelse på mere end 320 kg pr. år.

Hvilken procentdel af malkekøerne af rød dansk malkerace må forventes at give smørfedtydelser på mellem 240 og 280 kg pr. år?

En landmand overtager en gård med en besætning på 100 malkekøer af rød dansk malkerace, der alle vides at ligge i den bedste fjerdedel med hensyn til smørfedtydelse.

Hvad er da den mindste årlige smørfedtydelse, han kan forvente at få fra denne besætning?

4. Beregn hvert af integralerne

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx \ .$$

5. En kortbunke består af hjerterkortene fra et almindeligt spil kort. Et hjerterkort, hvis værdi er

knægt, dame, konge eller es,

kaldes et honnørkort.
Fra hjerterbunken udtages samtidigt og på tilfældig måde 3 kort.

Beregn sandsynligheden for hver af følgende hændelser:

A: De 3 kort er hjerter 2, hjerter 3 og hjerter 4.

B: Netop 2 af kortene er honnørkort.

C: Ét af de 3 kort er hjerter konge.

6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x-2}{5x^2 - 11x + 2} \ .$$

Grafen for f har en vandret og en lodret asymptote.

Bestem en ligning for hver af disse.

7. For ethvert tal a er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold.

Tegn grafen for f, når $a = 0$.

Bestem de tal a, for hvilke funktionen har netop tre nulpunkter.

8. Ved dyrkning af korn er halm et overskudsprodukt, der kan nedmuldes. Halmen pløjes ned, og når den omsættes, tilføres jorden de stoffer, som halmen indeholder.
Mængden af uomsat halm kan fra et vist tidspunkt ($t = 0$) beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion f, således at $f(t)$ angiver mængden af uomsat halm, målt i kg (tørstof), til tiden t, målt i år. Det betyder, at

$$f(t) = b\,\mathrm{e}^{-kt}\ , \quad t \geqq 0\ ,$$

hvor k kaldes omsætningens hastighedskonstant.

På lerholdige jorde i Højer er halveringstiden for den eksponentielle udvikling bestemt til 8,7 år.

Bestem omsætningens hastighedskonstant.

For grovsandede jorde i Jyndevad har man beregnet k til 0,432.

Bestem halveringstiden for mængden af uomsat halm på disse jorde.

I Jyndevad sker omsætningen det første år efter nedpløjningen, således at der er 30% uomsat halm tilbage efter dette år. I tiden herefter kan mængden af uomsat halm beregnes efter den givne forskrift $f(t)$.
Et efterår nedpløjes 3200 kg halm (tørstof) på en mark i Jyndevad.

Beregn hvor mange kg halm (tørstof), der stadig er uomsat 4 år efter denne nedpløjning.

Kilde: Tidsskrift for planteavl, bind 90, *hæfte* 2.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-11

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Onsdag den 19. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 point
hver af opgaverne 2–9 .... ca. 15 point

1. Løs uligheden

$$\frac{1}{x-2} > 2 - \frac{3}{x} .$$

2. Figuren viser en skitse af grafen for funktionen f bestemt ved

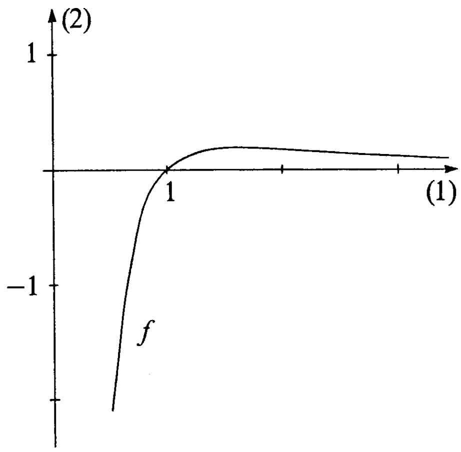
$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} , \quad x > 0 .$$

Beregn størsteværdien for f.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq e^2 \ \wedge \ 0 \leqq y \leqq f(x)\} .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af M.



3. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længde 3.
En vektor $\boldsymbol{b}$ er bestemt ved

$$\boldsymbol{b} = \tfrac{3}{2}\boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{a}} \ .$$

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

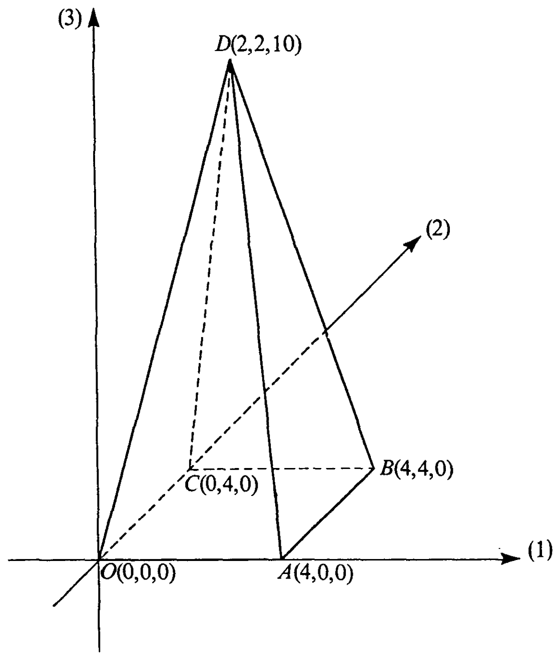
Beregn vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Beregn længden af projektionen af $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{b}$.

4. Figuren viser en pyramide $OABCD$ i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O.

Bestem den vinkel, som en af pyramidens sideflader danner med grundfladen $OABC$.

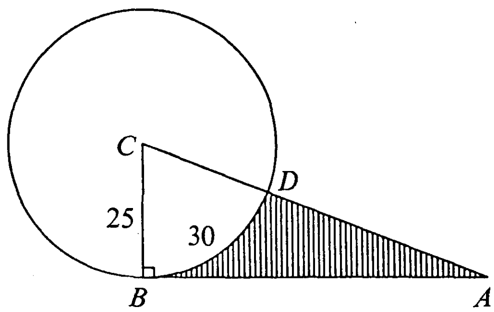
Bestem en ligning for den kugle, der indeholder alle pyramidens hjørnespidser O, A, B, C og D.



5. Figuren viser en cirkel og en trekant. Buestykket $\overset{\frown}{BD}$ har længden 30, og cirklens radius er 25.

Beregn $\angle BCD$.

Beregn arealet af den skraverede punktmængde.



6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin 2x + \sin x + 3 \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

Bestem en ligning for grafens tangent i det punkt, der har førstekoordinaten π.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen, hvori der er en tangent med hældningskoefficient 1.

7. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)(y - 1)$$

den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(1,2)$.

Bestem desuden den løsning, hvis graf i det punkt, der har førstekoordinat 1, har en tangent med hældningskoefficient 3.

8.

Et af de mest sikre

Med de nævnte forudsætninger kommer man til, at man i år 2002 har fået et overskud på 18.035 kr.

...

Imidlertid skal man huske, at penge ikke er det samme værd i år 2002 som i dag. Derfor bør man faktisk omsætte alle de penge man får ud af investeringen til 1986-kroner. Det giver det resultat, at projektet giver et overskud pr. anpart på 7.657 1986-kroner.

Udklippet er fra Berlingske Tidende, september 1986, og omhandler et reklamemateriale for nogle investeringsforslag.
Det anføres, at en investering foretaget i 1986 forventes at føre til et overskud på 18 035 kr. i år 2002, men at dette overskud i 1986-kroner kun vil være 7657 kr.

Bestem på grundlag af denne vurdering det forventede prisindeks for år 2002, når prisindeks for 1986 sættes til 100.

Den forventede udvikling i prisindeks fra 1986 til år 2002 svarer til et procentvis fald i kronens købekraft i samme periode.

Hvor stort er dette procentvise fald?

Hvilket gennemsnitligt årligt procentvis fald i kronens købekraft svarer dette til?

VEND!

9.

Graviditet: Rutinescanning giver flere problemer end det løser

Nogle få hospitaler har forsøgsmæssigt kørt med 2 eller 3 rutine-scanninger gennem graviditeten, for at opdage væksthæmmede børn. I Skandinavien regner man med at 4% af fostrene er væksthæmmede. Det vil sige, blandt 1000 gravide kvinder har ca. 40 et væksthæmmet foster, mens 960 har normale fostre.

- ca. 2 kvinder vil få at vide, at alt er normalt, selv om deres foster er væksthæmmet.

- ca. 38 kvinder vil få stillet den korrekte diagnose, at deres foster er væksthæmmet.

- ca. 96 vil få at vide, at deres foster er væksthæmmet, selv om det ikke fejler noget.

Det viste udklip er fra Information d. 2. oktober 1986. Af udklippet fremgår, at scanning af gravide kvinder for at afsløre, om fosteret er væksthæmmet, er en metode, som er behæftet med en vis usikkerhed.
Erfaringerne viser, at sandsynligheden er

1) 0,04 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster.

2) 0,002 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster, og scanningen viser et normalt foster.

3) 0,038 for, at en gravid kvinde har et væksthæmmet foster, og scanningen viser et væksthæmmet foster.

4) 0,096 for, at en gravid kvinde har et normalt foster, og scanningen viser et væksthæmmet foster.

Bestem sandsynligheden for, at scanningen af en gravid kvinde viser, at hendes foster er væksthæmmet.

Bestem sandsynligheden for, at en gravid kvinde, hvis scanning har vist et væksthæmmet foster, har et normalt foster.

Bestem sandsynligheden for, at en gravid kvinde ved scanningen får stillet en korrekt diagnose.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-12

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Torsdag den 20. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 4	ca. 25 point

1. I et koordinatsystem i planen er en linje l og en cirkel C bestemt ved

$$l:\quad x + y - 4 = 0$$
$$C:\quad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0\ .$$

Tegn linjen l og cirklen C.

Gør rede for, at linjen l er tangent til cirklen C.

2. Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses det, at $f(10) = 20$, og at fordoblingskonstanten er 5.

Bestem en forskrift for f.

Løs ligningen

$$f(x) = 2500\ .$$

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x - x\ ,\quad x \in \mathrm{R}\ .$$

Bestem værdimængden for f.

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \ln(f(x))\ .$$

Bestem definitionsmængden og værdimængden for g.

4. Når en væske, der strømmer gennem et rør, passerer en ventil, sker der et trykfald i væsken. Figuren nedenfor, der stammer fra bogen »Støj fra installationer« (Statens Byggeforskningsinstitut, 1970), viser for en bestemt aftapningsventil, hvorledes trykfaldet Δp (målt i kp/cm^2) afhænger af vandstrømmen V (målt i l/min).

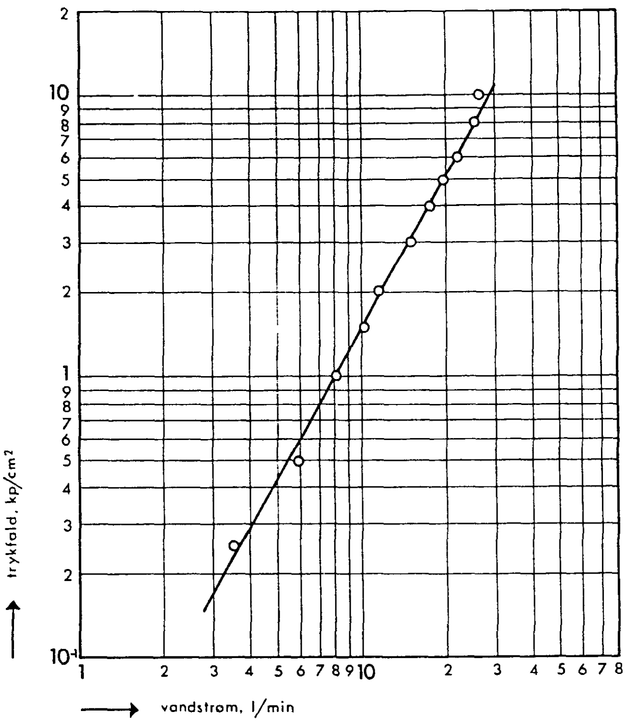


Fig. 3.3. Trykfald som funktion af vandstrøm for aftapningsventil.

Bestem en forskrift for den funktion, hvis graf er vist på figuren.

Målinger har vist, at den støj, der frembringes ved væskens passage af den pågældende aftapningsventil, afhænger af væskens trykfald over ventilen. Støjniveauet L (målt i dB(A)) kan udtrykkes ved

$$L = 37{,}6 + 26{,}5 \log(\Delta p) \ .$$

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes støjniveauet L afhænger af vandstrømmen V.

Ifølge Bygningsreglementet 1982 (BR-82) må brugsvandsinstallationer i beboelsesbygninger ikke frembringe et støjniveau, der overstiger 35 dB(A).

Hvor hurtigt kan man aftappe 50 liter vand fra en hane, der er forsynet med en aftapningsventil af den nævnte type, når man skal overholde bestemmelserne i BR-82?

5a. På en virksomhed afvejes og pakkes te i 200-grams pakninger. Dette foregår automatisk på to maskiner, A og B.
Der holdes løbende kontrol med de to maskiners funktion, og nedenstående tabel viser den procentvise fordeling af pakkernes vægt for hver af de to maskiner.

Vægt (gram)	198–200	200–202	202–204	204–206	206–208	over 208
A	7%	13%	22%	28%	18%	12%
B	10%	20%	32%	23%	12%	3%

Gør rede for, at for hver af de to maskiner kan en pakkes vægt antages at være normalfordelt.

Bestem for hver af de to maskiner middelværdien for en pakkes vægt.

Maskine A afvejer og pakker 60% af pakkerne.

Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt pakke fra virksomheden vejer mere end 205 g.

Hvilken procentdel af tepakkerne må forventes at veje mellem 200 g og 205 g?

5b. Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver antallet af seksere ved 10 kast med en terning.

Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(X \leqq 2) \quad \text{og} \quad P(X > 4) \ ,$$

idet det forudsættes, at terningen er symmetrisk.

Det påstås imidlertid, at sandsynligheden for at få en sekser ved et kast med terningen er større end $\frac{1}{6}$.
For at undersøge dette nærmere kastes terningen 50 gange, og der registreres i alt 12 seksere.

Undersøg, om man på baggrund heraf på signifikansniveau 5% kan forkaste hypotesen:

Sandsynligheden for at få en sekser ved et kast med terningen er højst $\frac{1}{6}$.

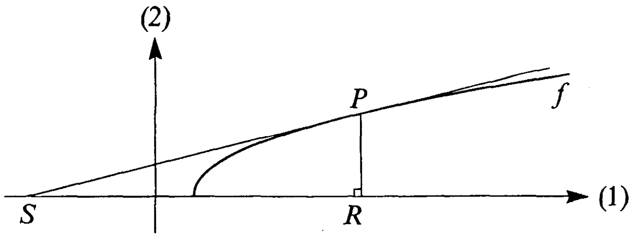
Angiv testens kritiske mængde.

VEND!

5c. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{ax - b} \, ,$$

hvor a og b er positive tal.
Med P betegnes et vilkårligt punkt med positiv andenkoordinat på grafen for f. Projektionen af P på førsteaksen kaldes R, og skæringspunktet mellem tangenten til grafen i P og førsteaksen kaldes S.



Vis, at grafen for f deler trekant PRS i to punktmængder om hvilke det gælder, at arealet af den ene er dobbelt så stort som arealet af den anden.

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1987

MATEMATISK LINJE

87-8-13

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 18. august 1987 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 15 point
opgave 8 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er en linje l fastlagt ved, at den går gennem punktet $P(-2,-1)$ og er parallel med linjen med ligningen $y = -\frac{2}{3}x$. En linje m står vinkelret på linjen med ligningen $y = \frac{9}{4}x$ og skærer førsteaksen i punktet $Q(-2,0)$.

   Beregn en af vinklerne mellem l og m.

   Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{x + \ln x} \quad , \quad x \in [1; 10] \; .$$

   Bestem værdimængden for f.

3. For malkekøer af rød dansk malkerace gælder, at smørfedtydelsen pr. år målt i kg er normalfordelt med middelværdi 250 kg og spredning 38 kg.

Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt malkeko af denne race har en smørfedtydelse på mere end 320 kg pr. år.

Hvilken procentdel af malkekoerne af rød dansk malkerace må forventes at give smørfedtydelser på mellem 240 og 280 kg pr. år?

En landmand overtager en gård med en besætning på 100 malkekøer af rød dansk malkerace, der alle vides at ligge i den bedste fjerdedel med hensyn til smørfedtydelse.

Hvad er da den mindste årlige smørfedtydelse, han kan forvente at få fra denne besætning?

4. Beregn hvert af integralerne

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 \sqrt{4x+1}\,dx\ .$$

5. Ved massefremstilling af et bestemt produkt er sandsynligheden 10% for, at en vareenhed er defekt.

Bestem sandsynligheden for, at

1) en stikprøve på 10 vareenheder indeholder højst 1 defekt.

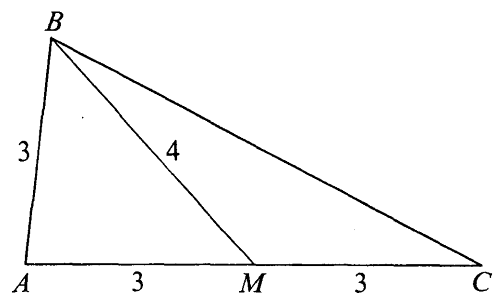
2) en stikprøve på 50 vareenheder indeholder højst 5 defekte.

3) en stikprøve på 500 vareenheder indeholder højst 50 defekte.

6. Figuren viser en trekant ABC, hvor

$$|AB| = |AM| = |MC| = 3 \quad \text{og} \quad |BM| = 4\ .$$

Beregn vinklerne A, B og C i trekant ABC samt længden af siden BC.



7. For ethvert tal a er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a\ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold.

Tegn grafen for f, når $a = 0$.

Bestem de tal a, for hvilke funktionen har netop tre nulpunkter.

8. Ved dyrkning af korn er halm et overskudsprodukt, der kan nedmuldes. Halmen pløjes ned, og når den omsættes, tilføres jorden de stoffer, som halmen indeholder.
Mængden af uomsat halm kan fra et vist tidspunkt ($t = 0$) beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion f, således at $f(t)$ angiver mængden af uomsat halm, målt i kg (tørstof), til tiden t, målt i år. Det betyder, at

$$f(t) = b\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad t \geqq 0,$$

hvor k kaldes omsætningens hastighedskonstant.

På lerholdige jorde i Højer er halveringstiden for den eksponentielle udvikling bestemt til 8,7 år.

Bestem omsætningens hastighedskonstant.

For grovsandede jorde i Jyndevad har man beregnet k til 0,432.

Bestem halveringstiden for mængden af uomsat halm på disse jorde.

I Jyndevad sker omsætningen det første år efter nedpløjningen, således at der er 30% uomsat halm tilbage efter dette år. I tiden herefter kan mængden af uomsat halm beregnes efter den givne forskrift $f(t)$.
Et efterår nedpløjes 3200 kg halm (tørstof) på en mark i Jyndevad.

Beregn hvor mange kg halm (tørstof), der stadig er uomsat 4 år efter denne nedpløjning.

Kilde: Tidsskrift for planteavl, bind 90, *hæfte* 2.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1988 **88-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Onsdag den 11. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

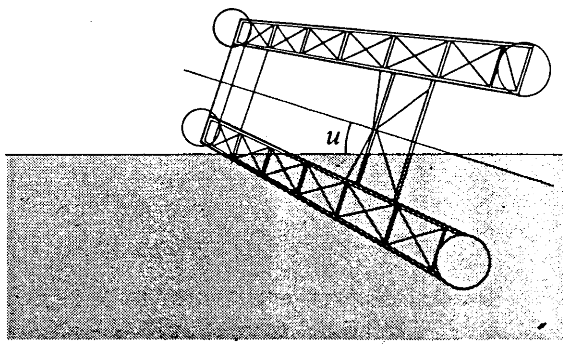
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3, 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 30 point

1. Løs uligheden

$$\sqrt{3x+1} < 2x \ .$$

2. Figuren viser en olieproduktionsplatform under søsætningen. Vinklen mellem platformens symmetriakse og havoverfladen er betegnet med u.
Til tiden $t=0$ er vinklen $u=0$.
I løbet af de første 2 minutter vokser vinklen u til en maksimal værdi, hvorefter platformen falder til ro.
I en model for platformens bevægelse i de første 2 minutter, går man ud fra, at vinkelhastigheden $\frac{du}{dt}$, målt i radian/minut, er bestemt ved



$$\frac{du}{dt} = \frac{\pi}{8}(-t^2+2t) \ , \qquad 0 \leqq t \leqq 2 \ .$$

Bestem u som funktion af t.

Tegn grafen for u som funktion af t.

3. I et firma foretages kvalitetskontrol af store varepartier på følgende måde:

   Først udtages på tilfældig måde en stikprøve på 50 enheder fra varepartiet.

   Hvis antallet af defekte enheder i stikprøven er 5 eller derunder, godkendes varepartiet til salg.

   Hvis antallet af defekte enheder i stikprøven overstiger 5, udtages på tilfældig måde en ny stikprøve på 50 enheder.

   Hvis antallet af defekte enheder i den ny stikprøve er 5 eller derunder, godkendes varepartiet til salg.

   Hvis antallet af defekte enheder i den ny stikprøve overstiger 5, kasseres varepartiet.

   Et vareparti indeholder 20% defekte enheder.

   Bestem sandsynligheden for, at varepartiet godkendes til salg på grundlag af den første stikprøve.

   Bestem sandsynligheden for, at varepartiet godkendes til salg.

4. To tal S og T er givet ved

$$S = \int_2^5 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$$

$$T = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx \ .$$

   Vis, at den eksakte værdi af S er $\ln 5$, og at den eksakte værdi af T er $\ln 3$.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2+8x+16 & \text{for} \quad -6 \leqq x \leqq -2 \\ x^2 & \text{for} \quad -2 < x \leqq 2 \ . \end{cases}$$

   Tegn grafen for f.

   For ethvert tal a er en linje l_a bestemt ved

$$l_a\colon \quad y = a(x-6) \ .$$

   Vis, at linjen l_a går gennem punktet $P(6,0)$.

   Bestem de værdier af a, for hvilke linjen l_a og grafen for f har netop

   1) 2 fællespunkter.

   2) 4 fællespunkter.

6a. Når man vil lydisolere en massiv murstensvæg ved hjælp af en forsatsvæg, har resonansfrekvensen for den fremkomne dobbeltvæg afgørende betydning for den lydisolerende virkning. Hvis den massive murstensvæg har massen M_0 kg/m^2 og forsatsvæggen massen m kg/m^2, og hvis afstanden mellem væggene er 10 cm, kan dobbeltvæggens resonansfrekvens f, målt i Hz, beregnes af formlen

$$(*) \qquad f = 187{,}5\sqrt{\frac{M_0+m}{M_0 m}}\,.$$

(*Kilde*: *»Bygningers lydisolering« af Jørgen Kristensen*).

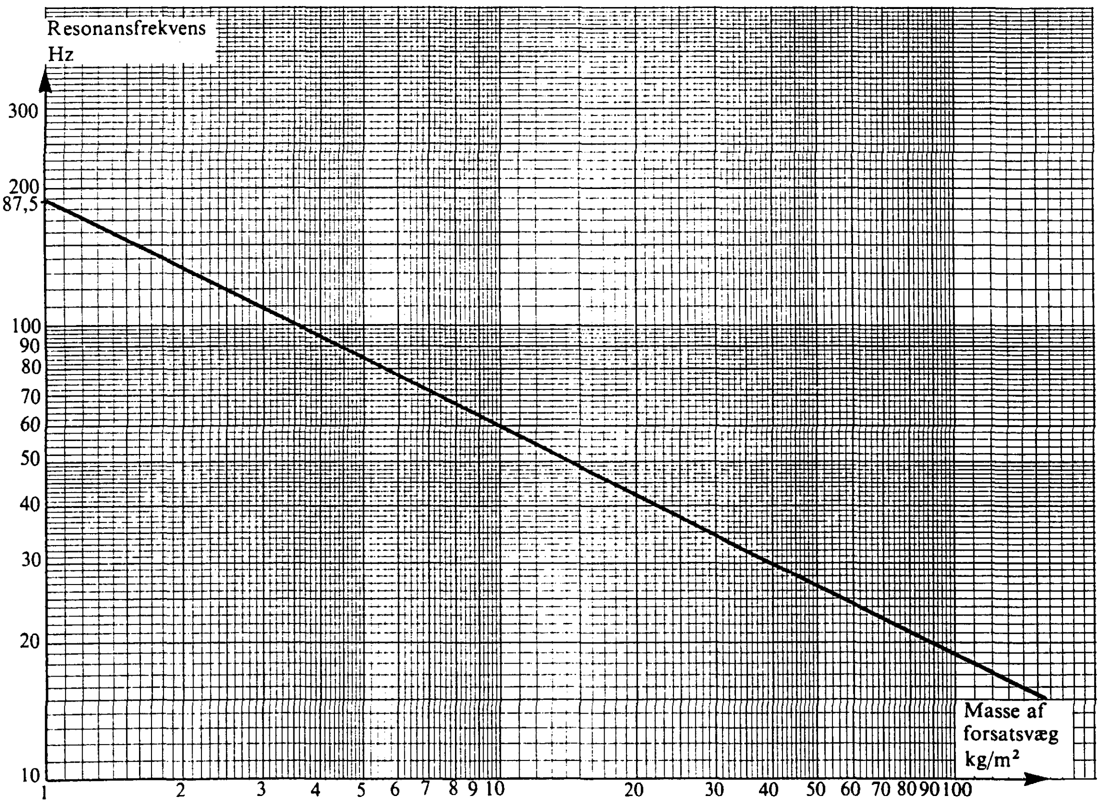
Vis, at f er en aftagende funktion af m.

Skitsér grafen for den funktion, der angiver resonansfrekvensen f som funktion af forsatsvæggens masse m, når den massive murstensvæg har massen $M_0 = 400$ kg/m^2.

I »Bygningers lydisolering« oplyses, at resonansfrekvensen helst skal ligge under 90 Hz.

Beregn, hvor stor massen m af en forsatsvæg skal være, når den sammen med en murstensvæg med masse $M_0 = 400$ kg/m^2 skal udgøre en dobbeltvæg med en resonansfrekvens på 90 Hz.

Hvis forsatsvæggens masse m ligger væsentligt under murstensvæggens masse M_0, kan resonansfrekvensen ifølge »Bygningers lydisolering« aflæses på en figur som nedenstående.



Gør rede for, at den på figuren indtegnede linje er graf for funktionen

$$g(m) = 187{,}5\sqrt{\frac{1}{m}}\,.$$

Vis, at hvis forsatsvæggens masse m er 20% af murstensvæggens masse M_0, så ligger den værdi, man får ved at aflæse resonansfrekvensen på figuren, mindre end 10% under den værdi, man får ved at beregne resonansfrekvensen f af formlen $(*)$.

6b. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 4 \\ y &= \tfrac{1}{9}t^3 - t \end{aligned}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser og til hvert af de punkter, hvori tangenten er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven, idet det oplyses, at den er symmetrisk om koordinatsystemets førsteakse.

Kurven har et dobbeltpunkt P, det vil sige et punkt, der svarer til to forskellige værdier af tallet t.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem kurvens to tangenter i punktet P.

Kurven afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1988 **88-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Fredag den 13. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–7 .... ca. 20 point

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

2. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længde 6.
Firkant $ABCD$ er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AD} = -\boldsymbol{a}+\tfrac{2}{3}\hat{\boldsymbol{a}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{BC} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\tfrac{5}{3}\hat{\boldsymbol{a}}\ .$$

Angiv $\overrightarrow{DC}$ udtrykt ved $\boldsymbol{a}$ og $\hat{\boldsymbol{a}}$.

Beregn $\angle A$ og $\angle D$ i firkant $ABCD$.

Beregn arealet af firkant $ABCD$.

3. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = e^{2x} \quad \text{og} \quad g(x) = e^{x-k} \ ,$$

hvor k er et positivt tal.

Skitsér i samme koordinatsystem graferne for f og g, når tallet k har værdien 3.

For enhver værdi af tallet k afgrænser graferne for f og g sammen med koordinatsystemets andenakse i en anden kvadrant en punktmængde, der har et areal. Arealet af denne punktmængde betegnes $A(k)$.

Bestem $A(k)$.

Bestem $\lim_{k \to \infty} A(k)$.

4. En brancheforening har 50 medlemmer. Hvert medlem ejer ét eksemplar af en bestemt type kostbart værktøj. Medlemmerne beslutter at lave en gensidig forsikringsordning. De vil indbetale penge til en fælles pulje, der kan give ejeren erstatning, hvis værktøjet ødelægges. Erfaringen viser, at sandsynligheden er 10% for, at det pågældende værktøj ødelægges inden for et år. Hvis værktøjet ødelægges, skal ejeren have udbetalt en erstatningssum på 10 000 kr.
Det beløb, som de tilsammen skal indbetale til fællespuljen, fastsættes til erstatningsbeløbet for et ødelagt værktøj ganget med middelværdien af antallet af ødelagte værktøjer inden for et år.

Beregn på dette grundlag størrelsen af fællespuljen.

Bestem sandsynligheden for, at antallet af ødelagte værktøjer det første år bliver så stort, at pengene i fællespuljen ikke slår til.

Nogle af de pågældende ejere ønsker at sikre, at sandsynligheden er højst 20% for, at beløbet i fællespuljen ikke slår til.

Beregn på dette grundlag den mindste størrelse, som fællespuljen kan have.

5. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -2x \cdot y^2 \ , \quad y > 0$$

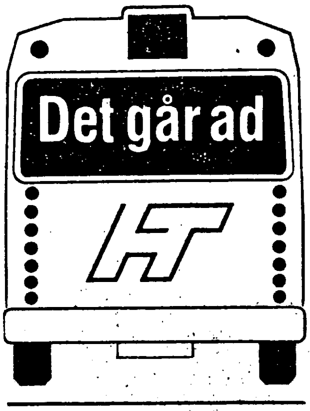
den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(0,2)$.

Tegn grafen for denne løsning.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel, der dannes af grafens tangenter i de to punkter, hvis førstekoordinater er henholdsvis -1 og 1.

6. I en artikelserie i Berlingske Tidende om HT (Hovedstadens Trafikselskab) kunne man den 31. juli 1987 læse følgende:

...
»Erfaringen viser, at hver gang taksterne stiger 10 procent, mister vi tre procent af kunderne,« oplyser HT's økonomichef Jens Møller.
...



Kunderne flygter fra HT. Derfor mangler der penge i kassen, og derfor stiger billetprisen med op til 19 procent næste år. HT er i en urimelig konkurrencesituation overfor privatbilismen, siger forsker.

Det antages, at antallet af passagerer i HT som funktion af den gennemsnitlige billettakst kan beskrives ved en funktion f af typen

$$f(x) = b \cdot x^a \ .$$

Bestem tallet a ud fra udklippets oplysninger om sammenhængen mellem takststigning og fald i passagerantal.

Hvor stor en procentdel af passagererne må HT forvente at miste, hvis taksterne stiger med 19%?

Hvor mange procent vil HT's billetindtægt stige med, hvis taksterne stiger med 19%?

7. I mængden $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ defineres en kommutativ og associativ komposition $*$ ved, at

$$x * y \text{ er det sidste ciffer i produktet } x \cdot y \ .$$

Ved denne definition er f.eks. $4 * 8 = 2$.

Opstil en kompositionstavle for $(C, *)$.

Gør rede for, at der er et neutralt element i $(C, *)$, og angiv de elementer i $(C, *)$, der har et inverst element.

Løs for $x \in C$ ligningerne

$$1) \quad x * 4 = 6 \ .$$

$$2) \quad x * x = 4 \ .$$

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1988 **88-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 10. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4 .... ca. 15 point
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 20 point

1. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - x + 2$$
$$g(x) = \tfrac{1}{3}x + 3 \ .$$

Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

Tegn graferne for f og g, og løs uligheden $f(x) \leqq g(x)$.

2. Ved sortering af en ærtehøst inddeler man ærterne efter størrelse i tre kategorier, fine, mellemfine og store.
Man går ud fra, at diameteren af en ært kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 9,4 mm og spredning 1,3 mm.

Bestem ved hjælp af normalfordelingspapir hvor mange procent af ærterne, der har en diameter mindre end 7,0 mm.

Man foretager inddelingen i de tre kategorier, så man får 30% fine og 45% mellemfine ærter.

Mellem hvilke grænser ligger diameterstørrelsen på de mellemfine ærter?

3. I et koordinatsystem er to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ givet ved

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} .$$

Bestem vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $2\boldsymbol{a}$ og $3\boldsymbol{b}$.

Vis, at vektoren $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ er vinkelret på $\boldsymbol{b}$.

4. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x-\tfrac{1}{2}\ln x \ , \quad x > 0 \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold og dens mindsteværdi.

Beregn

$$\int_1^e f(x)dx \ .$$

5.

TOVVÆRK
3-slået polyester tovværk multifilament. Kvalitet 10452 højeste brudstyrke og speciel god slidstyrke, UV-stabiliseret.

diameter i mm	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
brudstyrke i kg	250	400	600	750	1000	1550	2250	3200	4000	4700	6000	7100	8600	10000

Tabellen viser for såkaldt 3-slået polyester tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter (målt i mm) og tovværkets brudstyrke (målt i kg).

Vis, at brudstyrken som funktion af diameteren med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

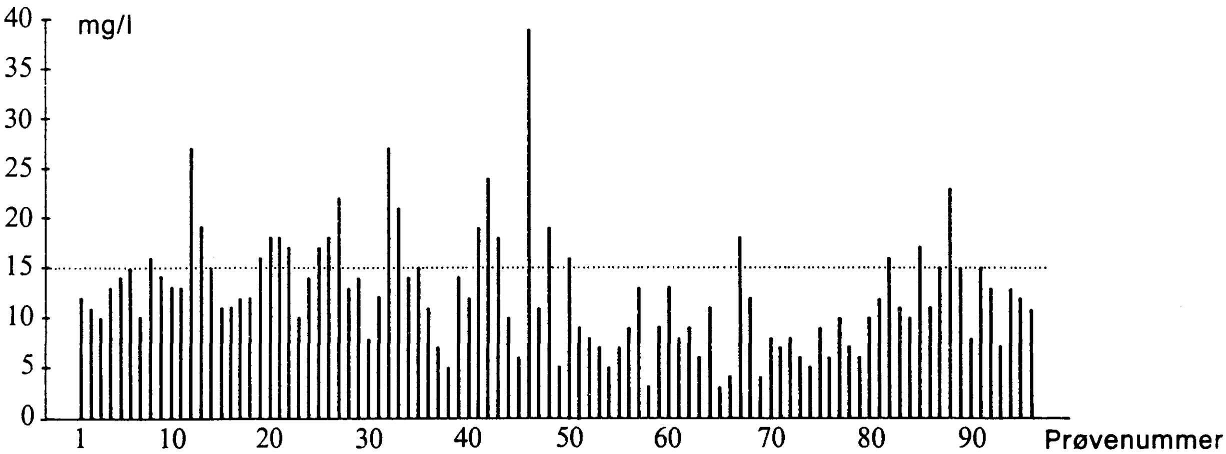
$$f(x) = b \cdot x^a \ ,$$

hvor $f(x)$ er brudstyrken, og x er diameteren.

Bestem tallene a og b.

Hvor mange gange så stor bliver tovværkets brudstyrke, når tovværkets diameter fordobles?

6a. Ved kontrol med overholdelse af udledningstilladelser for kommunale rensningsanlæg spiller valget af kontrolregel for vandkvalitetsbedømmelsen en stor rolle.



Analyseresultater fra 96 prøver.

Figuren viser analyseresultaterne af 96 prøver fra et kommunalt rensningsanlæg. Analyseresultaterne angiver det såkaldte 5-døgns biokemiske iltforbrug, målt i mg/l, for de udtagne prøver.
Af figuren fremgår, at i 22 ud af de 96 prøver var analyseresultatet over 15 mg/l. I det følgende antages derfor, at sandsynligheden for, at en tilfældigt udtaget prøve fra anlægget vil vise mere end 15 mg/l, er $\frac{22}{96}$.

En kontrolregel for vandkvalitetsbedømmelsen lyder:

»Ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver må overskride kravværdien 15 mg/l.«

Beregn sandsynligheden for, at ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver fra det kommunale rensningsanlæg overskrider kravværdien 15 mg/l.

Hvad ville sandsynligheden for godkendelse af vandkvaliteten være, hvis kontrolreglen for vandkvalitetsbedømmelsen var:

»Højst 2 ud af 12 tilfældigt udtagne prøver må overskride kravværdien 15 mg/l.«?

Kravværdien tænkes ændret til 20 mg/l.

Hvad vil da sandsynligheden være for, at ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver fra det kommunale rensningsanlæg overskrider den nye kravværdi?

Kilde: Fastsættelse af udlederkrav til spildevandsanlæg, Vand og miljø, 4/1987.

6b. Det viste udklip stammer fra bogen »Principper for sterilisation og desinfektion« af Knud Skadhauge og viser strålingsresistensen af forskellige bakterier.

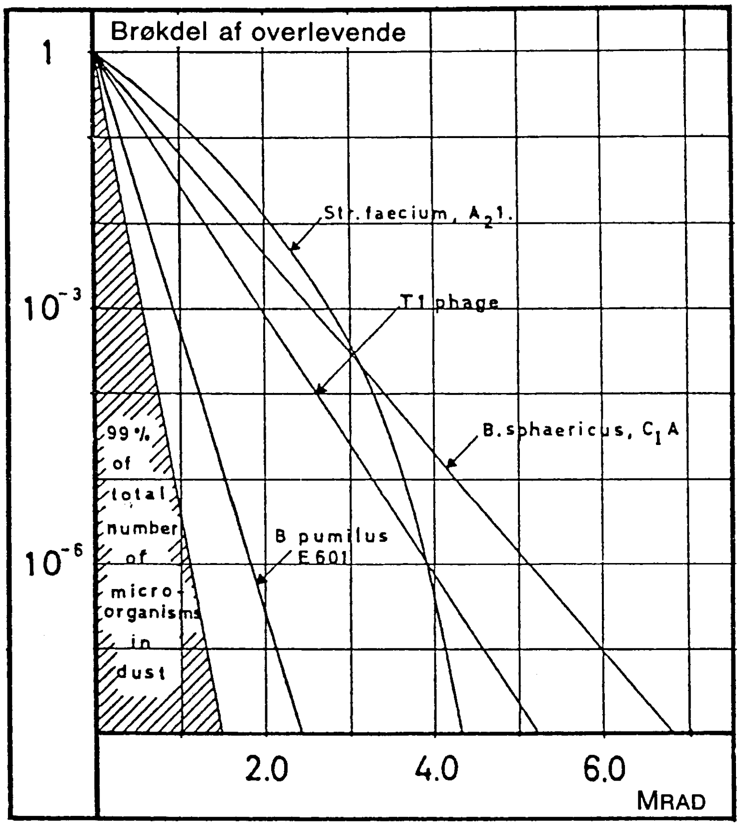


Fig. 15. Strålingsresistensen af forskellige bakterier. (fra: Ebba A. Christensen, USP. open Conference on Biological Indicators for Society Assurance, Arlington, Virginia, 1970)

Gør rede for, at brøkdelen af overlevende bakterier af arten B.sphaericus er en eksponentielt aftagende funktion af strålingsdosis, målt i Mrad, og bestem en forskrift for denne funktion.

Beregn halveringsdosis for B.sphaericus.

Beregn, hvilken strålingsdosis der er nødvendig for at reducere brøkdelen af overlevende B.sphaericus til $\frac{1}{500}$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-4

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 11. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

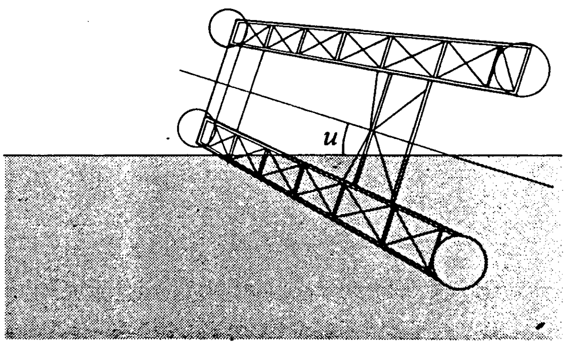
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3, 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 30 point

1. Løs uligheden

$$\sqrt{3x+1} < 2x \; .$$

2. Figuren viser en olieproduktionsplatform under søsætningen. Vinklen mellem platformens symmetriakse og havoverfladen er betegnet med u.
Til tiden $t=0$ er vinklen $u=0$.
I løbet af de første 2 minutter vokser vinklen u til en maksimal værdi, hvorefter platformen falder til ro.
I en model for platformens bevægelse i de første 2 minutter, går man ud fra, at vinkelhastigheden $\frac{du}{dt}$, målt i radian/minut, er bestemt ved



$$\frac{du}{dt} = \frac{\pi}{8}(-t^2+2t) \; , \qquad 0 \leqq t \leqq 2 \; .$$

Bestem u som funktion af t.

Tegn grafen for u som funktion af t.

3. I et firma foretages kvalitetskontrol af store varepartier på følgende måde:

Først udtages på tilfældig måde en stikprøve på 50 enheder fra varepartiet.

Hvis antallet af defekte enheder i stikprøven er 5 eller derunder, godkendes varepartiet til salg.

Hvis antallet af defekte enheder i stikprøven overstiger 5, udtages på tilfældig måde en ny stikprøve på 50 enheder.

Hvis antallet af defekte enheder i den ny stikprøve er 5 eller derunder, godkendes varepartiet til salg.

Hvis antallet af defekte enheder i den ny stikprøve overstiger 5, kasseres varepartiet.

Et vareparti indeholder 20% defekte enheder.

Bestem sandsynligheden for, at varepartiet godkendes til salg på grundlag af den første stikprøve.

Bestem sandsynligheden for, at varepartiet godkendes til salg.

4. To tal S og T er givet ved

$$S = \int_2^5 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$$

$$T = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx \ .$$

Vis, at den eksakte værdi af S er $\ln 5$, og at den eksakte værdi af T er $\ln 3$.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2+8x+16 & \text{for} \quad -6 \leqq x \leqq -2 \\ x^2 & \text{for} \quad -2 < x \leqq 2 \ . \end{cases}$$

Tegn grafen for f.

For ethvert tal a er en linje l_a bestemt ved

$$l_a: \quad y = a(x-6) \ .$$

Vis, at linjen l_a går gennem punktet $P(6,0)$.

Bestem de værdier af a, for hvilke linjen l_a og grafen for f har netop

1) 2 fællespunkter.

2) 4 fællespunkter.

6a. Når man vil lydisolere en massiv murstensvæg ved hjælp af en forsatsvæg, har resonansfrekvensen for den fremkomne dobbeltvæg afgørende betydning for den lydisolerende virkning. Hvis den massive murstensvæg har massen M_0 kg/m^2 og forsatsvæggen massen m kg/m^2, og hvis afstanden mellem væggene er 10 cm, kan dobbeltvæggens resonansfrekvens f, målt i Hz, beregnes af formlen

$$(*) \qquad f = 187{,}5\sqrt{\frac{M_0+m}{M_0 m}}\,.$$

(*Kilde*: *»Bygningers lydisolering« af Jørgen Kristensen*).

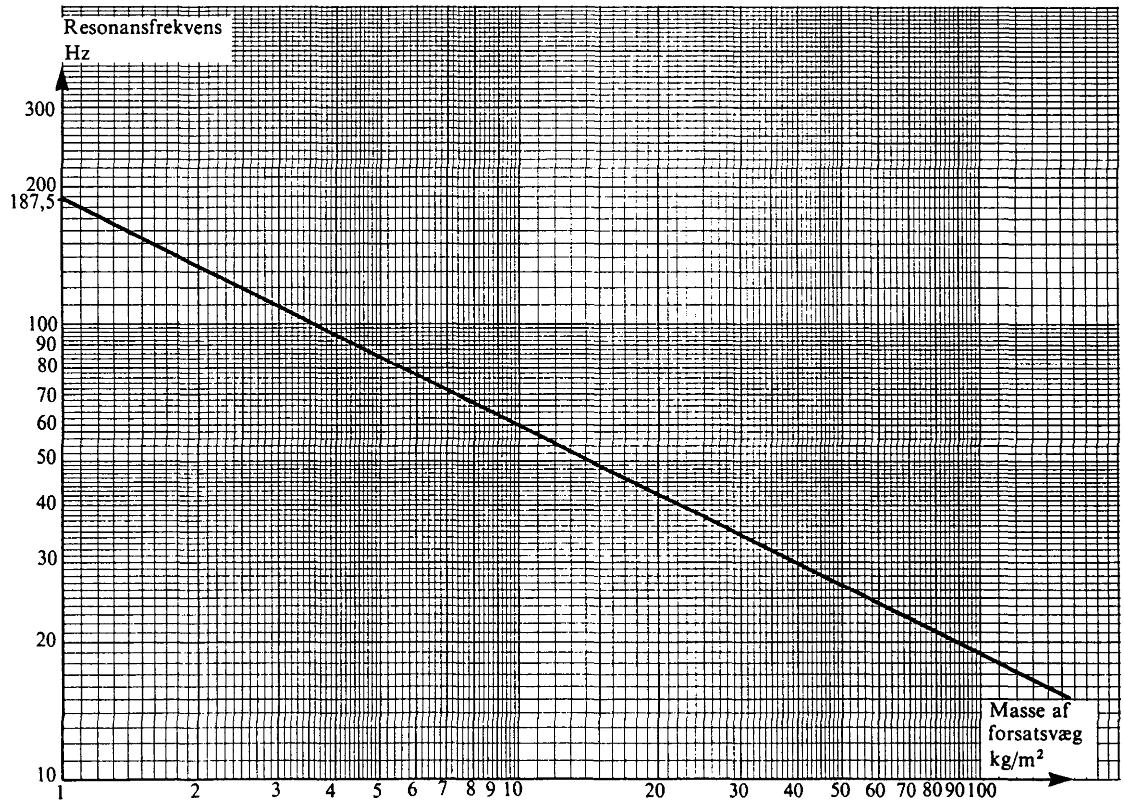
Vis, at f er en aftagende funktion af m.

Skitsér grafen for den funktion, der angiver resonansfrekvensen f som funktion af forsatsvæggens masse m, når den massive murstensvæg har massen $M_0 = 400$ kg/m^2.

I »Bygningers lydisolering« oplyses, at resonansfrekvensen helst skal ligge under 90 Hz.

Beregn, hvor stor massen m af en forsatsvæg skal være, når den sammen med en murstensvæg med masse $M_0 = 400$ kg/m^2 skal udgøre en dobbeltvæg med en resonansfrekvens på 90 Hz.

Hvis forsatsvæggens masse m ligger væsentligt under murstensvæggens masse M_0, kan resonansfrekvensen ifølge »Bygningers lydisolering« aflæses på en figur som nedenstående.



Gør rede for, at den på figuren indtegnede linje er graf for funktionen

$$g(m) = 187{,}5\sqrt{\frac{1}{m}}\,.$$

Vis, at hvis forsatsvæggens masse m er 20% af murstensvæggens masse M_0, så ligger den værdi, man får ved at aflæse resonansfrekvensen på figuren, mindre end 10% under den værdi, man får ved at beregne resonansfrekvensen f af formlen $(*)$.

6b. I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne

$$A(8,14,0)\ ,\quad B(-30,-10,20)\quad \text{og}\quad C(15,0,0)\ .$$

Beregn vinkel A i trekant ABC.

Beregn arealet af trekant ABC.

Med l betegnes projektionen af koordinatsystemets førsteakse på den plan, der indeholder trekant ABC.

Bestem en parameterfremstilling for linjen l.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen l og linjen gennem A og B.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-5

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Fredag den 13. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–7 .... ca. 20 point

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \; .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

2. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længde 6.
Firkant $ABCD$ er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AD} = -\boldsymbol{a} + \tfrac{2}{3}\hat{\boldsymbol{a}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{BC} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a} + \tfrac{5}{3}\hat{\boldsymbol{a}} \; .$$

Angiv $\overrightarrow{DC}$ udtrykt ved $\boldsymbol{a}$ og $\hat{\boldsymbol{a}}$.

Beregn $\angle A$ og $\angle D$ i firkant $ABCD$.

Beregn arealet af firkant $ABCD$.

3. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = e^{2x} \quad \text{og} \quad g(x) = e^{x-k} \ ,$$

hvor k er et positivt tal.

Skitsér i samme koordinatsystem graferne for f og g, når tallet k har værdien 3.

For enhver værdi af tallet k afgrænser graferne for f og g sammen med koordinatsystemets andenakse i en anden kvadrant en punktmængde, der har et areal. Arealet af denne punktmængde betegnes $A(k)$.

Bestem $A(k)$.

Bestem $\lim\limits_{k \to \infty} A(k)$.

4. En brancheforening har 50 medlemmer. Hvert medlem ejer ét eksemplar af en bestemt type kostbart værktøj. Medlemmerne beslutter at lave en gensidig forsikringsordning. De vil indbetale penge til en fælles pulje, der kan give ejeren erstatning, hvis værktøjet ødelægges. Erfaringen viser, at sandsynligheden er 10% for, at det pågældende værktøj ødelægges inden for et år. Hvis værktøjet ødelægges, skal ejeren have udbetalt en erstatningssum på 10 000 kr.
Det beløb, som de tilsammen skal indbetale til fællespuljen, fastsættes til erstatningsbeløbet for et ødelagt værktøj ganget med middelværdien af antallet af ødelagte værktøjer inden for et år.

Beregn på dette grundlag størrelsen af fællespuljen.

Bestem sandsynligheden for, at antallet af ødelagte værktøjer det første år bliver så stort, at pengene i fællespuljen ikke slår til.

Nogle af de pågældende ejere ønsker at sikre, at sandsynligheden er højst 20% for, at beløbet i fællespuljen ikke slår til.

Beregn på dette grundlag den mindste størrelse, som fællespuljen kan have.

5. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -2x \cdot y^2 \ , \quad y > 0$$

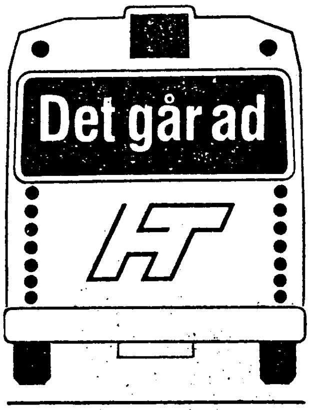
den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(0,2)$.

Tegn grafen for denne løsning.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel, der dannes af grafens tangenter i de to punkter, hvis førstekoordinater er henholdsvis -1 og 1.

6. I en artikelserie i Berlingske Tidende om HT (Hovedstadens Trafikselskab) kunne man den 31. juli 1987 læse følgende:

...
»Erfaringen viser, at hver gang taksterne stiger 10 procent, mister vi tre procent af kunderne,« oplyser HT's økonomichef Jens Møller.
...



Kunderne flygter fra HT. Derfor mangler der penge i kassen, og derfor stiger billetprisen med op til 19 procent næste år. HT er i en urimelig konkurrencesituation overfor privatbilismen, siger forsker.

Det antages, at antallet af passagerer i HT som funktion af den gennemsnitlige billettakst kan beskrives ved en funktion f af typen

$$f(x) = b \cdot x^a \ .$$

Bestem tallet a ud fra udklippets oplysninger om sammenhængen mellem takststigning og fald i passagerantal.

Hvor stor en procentdel af passagererne må HT forvente at miste, hvis taksterne stiger med 19%?

Hvor mange procent vil HT's billetindtægt stige med, hvis taksterne stiger med 19%?

7. For en bestemt type dåseøl gælder det, at vægten af en dåseøl er normalfordelt med middelværdi 345 g og spredning 5 g.

Bestem sandsynligheden for, at en dåseøl vejer over 350 g.

Dåseøllene forhandles i pakninger med 6 øl i hver.

Beregn sandsynligheden for, at der i en pakning er netop 2 dåseøl, der vejer over 350 g.

Med X betegnes den stokastiske variabel, som angiver, hvor mange af dåseøllene i en pakning, der vejer over 350 g.

Beregn middelværdi og spredning for X.

Bestem den værdi af X, som har størst sandsynlighed.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–7 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-6

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 10. maj 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4 .... ca. 15 point
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 20 point

1. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - x + 2$$
$$g(x) = \tfrac{1}{3}x + 3\ .$$

Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

Tegn graferne for f og g, og løs uligheden $f(x) \leqq g(x)$.

2. Ved sortering af en ærtehøst inddeler man ærterne efter størrelse i tre kategorier, fine, mellemfine og store.
Man går ud fra, at diameteren af en ært kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 9,4 mm og spredning 1,3 mm.

Bestem ved hjælp af normalfordelingspapir hvor mange procent af ærterne, der har en diameter mindre end 7,0 mm.

Man foretager inddelingen i de tre kategorier, så man får 30% fine og 45% mellemfine ærter.

Mellem hvilke grænser ligger diameterstørrelsen på de mellemfine ærter?

3. I trekant ABC er $\angle A = 100{,}1°$, $|AB| = 13{,}6$ og $|AC| = 13{,}0$.

Beregn $|BC|$, $\angle B$ og $\angle C$.

Beregn arealet af trekant ABC.

4. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x - \tfrac{1}{2}\ln x \ , \quad x > 0 \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold og dens mindsteværdi.

Beregn

$$\int_1^e f(x)dx \ .$$

5.

TOVVÆRK
3-slået polyester tovværk multifilament. Kvalitet 10452 højeste brudstyrke og speciel god slidstyrke, UV-stabiliseret.

diameter i mm	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
brudstyrke i kg	250	400	600	750	1000	1550	2250	3200	4000	4700	6000	7100	8600	10000

Tabellen viser for såkaldt 3-slået polyester tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter (målt i mm) og tovværkets brudstyrke (målt i kg).

Vis, at brudstyrken som funktion af diameteren med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

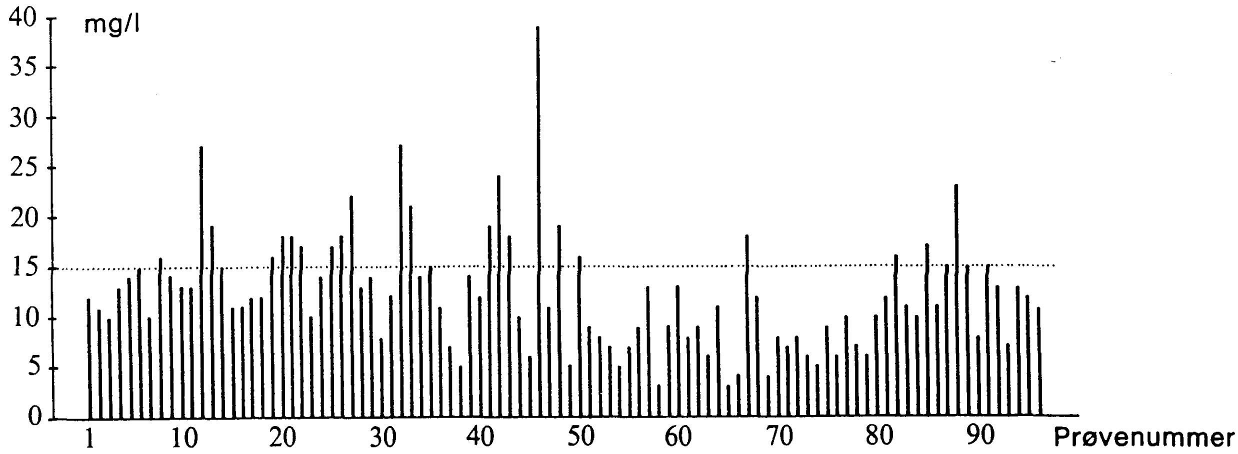
$$f(x) = b \cdot x^a \ ,$$

hvor $f(x)$ er brudstyrken, og x er diameteren.

Bestem tallene a og b.

Hvor mange gange så stor bliver tovværkets brudstyrke, når tovværkets diameter fordobles?

6a. Ved kontrol med overholdelse af udledningstilladelser for kommunale rensningsanlæg spiller valget af kontrolregel for vandkvalitetsbedømmelsen en stor rolle.



Analyseresultater fra 96 prøver.

Figuren viser analyseresultaterne af 96 prøver fra et kommunalt rensningsanlæg. Analyseresultaterne angiver det såkaldte 5-døgns biokemiske iltforbrug, målt i mg/l, for de udtagne prøver.
Af figuren fremgår, at i 22 ud af de 96 prøver var analyseresultatet over 15 mg/l. I det følgende antages derfor, at sandsynligheden for, at en tilfældigt udtaget prøve fra anlægget vil vise mere end 15 mg/l, er $\frac{22}{96}$.

En kontrolregel for vandkvalitetsbedømmelsen lyder:

»Ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver må overskride kravværdien 15 mg/l.«

Beregn sandsynligheden for, at ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver fra det kommunale rensningsanlæg overskrider kravværdien 15 mg/l.

Hvad ville sandsynligheden for godkendelse af vandkvaliteten være, hvis kontrolreglen for vandkvalitetsbedømmelsen var:

»Højst 2 ud af 12 tilfældigt udtagne prøver må overskride kravværdien 15 mg/l.«?

Kravværdien tænkes ændret til 20 mg/l.

Hvad vil da sandsynligheden være for, at ingen ud af 12 tilfældigt udtagne prøver fra det kommunale rensningsanlæg overskrider den nye kravværdi?

Kilde: *Fastsættelse af udlederkrav til spildevandsanlæg, Vand og miljø*, 4/1987.

6b. Nedenstående tabel stammer fra »Markedet for plantebeskyttelsesmidler«, en redegørelse fra Monopoltilsynet 1987.

Prisudviklingen for plantebeskyttelsesmidler, 1982–86

1982 = indeks 100	1982	1983	1984	1985	1986
Ukrudtsmidler	100	112	115	122	127
Svampemidler	100	114	124	135	136
Insektmidler	100	105	111	116	116
Vækstreg. midler	100	104	108	108	106

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i prisen på svampemidler i perioden 1982–1986.

Det oplyses, at udgifterne til plantebeskyttelsesmidler i 1985 var fordelt med 56% til ukrudtsmidler, 34% til svampemidler, 7% til insektmidler og 3% til vækstregulerende midler.

Beregn på grundlag heraf et samlet prisindeks for plantebeskyttelsesmidler for året 1985, når 1982 er basisår.

I 1983 brugte en landmand 5000 kr. på insektmidler. I 1985 anvendte han samme mængde insektmidler som i 1983.

Hvor mange kr. skulle han betale for insektmidler i 1985?

En anden landmand havde både i 1983 og i 1985 en udgift til insektmidler på 5000 kr. og havde altså nedsat sit forbrug af insektmidler.

Hvor mange procent udgjorde denne nedsættelse?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988 **88-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 17. august 1988 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 10 point
hver af opgaverne 2–9 . . . . ca. 15 point

1. Efter den nye gymnasieordning får eleverne en række fag, de skal vælge imellem. En skole tilbyder 3 to-årige og 4 et-årige højniveaufag samt 6 mellemniveaufag. En elev kan vælge

   enten 1 to-årigt højniveaufag og 1 et-årigt højniveaufag og 1 mellemniveaufag
   eller 2 et-årige højniveaufag og 2 mellemniveaufag.

   Hvor mange valgmuligheder ville den pågældende elev have, hvis der ikke stilledes yderligere krav til valg af fag?

2. Bestem den løsning f til differentialligningen

$$y'' = -4y \ ,$$

   for hvilken $f(0) = 4$ og $f'(0) = 6$.

   Bestem tallet c, således at funktionen $g = f + c$ er en løsning til differentialligningen

$$y'' = -4y + 8 \ .$$

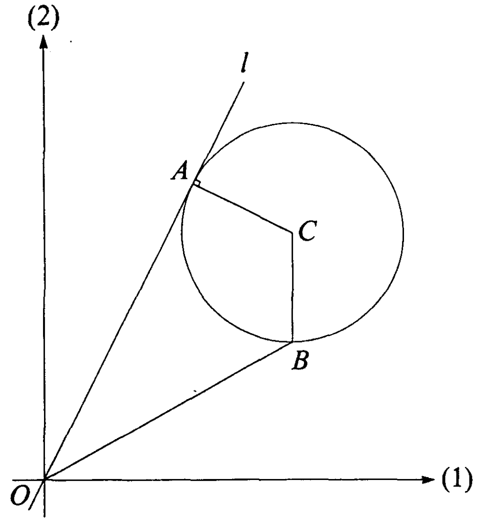
3. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x, y)$ bevæger sig i planen, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= t^2-4 \end{aligned} \,, \quad -\infty < t < \infty \,.$$

Gør rede for, at banekurven er en parabel, og tegn parablen.

Bestem de tidspunkter t, for hvilke vektoren $\overrightarrow{OP}$ er vinkelret på hastighedsvektoren i P.

4.



I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En cirkel har ligningen

$$x^2+y^2-10x-10y+45 = 0 \,.$$

Bestem centrum og radius for cirklen.

Linjen l gennem O er tangent til cirklen og rører denne i punktet A. Punktet B ligger på cirklen og har samme førstekoordinat som cirklens centrum C (se figur).

Beregn $\angle AOB$.

5. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}-1} \,, \quad x>0$$

og

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)-x \,, \quad x>0 \,.$$

Vis, at g er en stamfunktion til f.

Beregn den eksakte værdi af tallet

$$\int_1^2 f(x)\,dx \,.$$

6. Ved produktion af et stort antal enheder af en bestemt vare er sandsynligheden for, at en vareenhed er defekt, lig med p.

Angiv sandsynligheden $f(p)$ for, at netop 4 blandt 5 tilfældigt valgte vareenheder er defekte.

Bestem størsteværdien for funktionen f.

7. I et koordinatsystem i planen er to parabler $\mathscr{P}_1$ og $\mathscr{P}_2$ givet ved ligningerne

$$\mathscr{P}_1:\quad y = \tfrac{1}{2}x^2$$
$$\mathscr{P}_2:\quad y^2 = 4x\ .$$

Tegn de to parabler.

Parablerne afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

Vis, at arealet af M er $\frac{8}{3}$.

8. Teksten til højre stammer fra en annoncekampagne, hvor Rådet for Større Færdselssikkerhed informerede om fartgrænser.
Teksten omhandler den tidsbesparelse, man kan opnå ved at forøge gennemsnitsfarten med 10 km/t.

Bestem en forskrift for en funktion f, der angiver den tidsbesparelse, man opnår, hvis man over en strækning på 10 km forøger sin gennemsnitsfart fra x km/t til $(x+10)$ km/t.

Vis, at f i overensstemmelse med annonceteksten er aftagende.

Du sparer mindre, end du tror

På en 10 km tur igennem byen sparer man 2 minutter ved at øge gennemsnitsfarten fra 50 til 60 km/t. En gennemsnitsfart på 60 km/t kræver, at man på lange strækninger kører betydeligt hurtigere end 60 km/t.
Jo hurtigere man kører, desto mere tror man, der spares ved at sætte farten yderligere op. I virkeligheden er det lige omvendt. På en 10 km tur på motorvej sparer man 33 sekunder ved at øge gennemsnitsfarten fra 100 til 110 km/t. Højt regnet.

9. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad -1 < x < 1\ .$$

Vis, at f er en voksende funktion.

Bestem integralet

$$I(t) = \int_0^t f(x)dx\ , \quad 0 < t < 1\ .$$

Bestem $\lim_{t \to 1^-} I(t)$.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988 **88-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Torsdag den 18. august 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. I en plan er givet to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, hvor

$$|\boldsymbol{a}| = 2 \ , \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4 \quad \text{og} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 5 \ .$$

Bestem længden af vektoren $\boldsymbol{b}$.

Bestem et gradtal for vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} \ .$$

Vis, at

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \ .$$

Beregn den eksakte værdi af tallet

$$\int_1^2 f(x)\,dx \ .$$

3. I et koordinatsystem i planen er en hyperbel $\mathscr{H}$ givet ved ligningen

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1 \ .$$

Tegn hyperblen.

Ved spejling i linjen med ligningen $y = x$ afbildes hyperblen $\mathscr{H}$ på en hyperbel $\mathscr{H}_1$.

Bestem en ligning for $\mathscr{H}_1$, og tegn $\mathscr{H}_1$.

Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem de to hyperbler.

4. I en befolkning forekommer to sygdomme S_1 og S_2 i et sådant omfang, at

0,2% af befolkningen har begge sygdomme,
3,8% af befolkningen har sygdommen S_1, men ikke S_2,
4,8% af befolkningen har sygdommen S_2, men ikke S_1.

Fra befolkningen vælges tilfældigt en person. Med H_1 og H_2 betegnes hændelserne

H_1: personen har sygdommen S_1.
H_2: personen har sygdommen S_2.

Bestem $P(H_1)$ og $P(H_2)$, og vis, at hændelserne H_1 og H_2 er uafhængige.

Herefter vælges tilfældigt en person fra den del af befolkningen, der har mindst en af sygdommene S_1 og S_2. Med H'_1 og H'_2 betegnes hændelserne

H'_1: personen har sygdommen S_1.
H'_2: personen har sygdommen S_2.

Bestem $P(H'_1)$ og $P(H'_2)$, og undersøg, om hændelserne H'_1 og H'_2 er uafhængige.

5. En virksomhed fremstiller to produkter A og B. Hver enhed af de to produkter bearbejdes af tre maskiner I, II og III, som hver er i drift højst 48 timer om ugen.
Tabellen angiver for hvert af de to produkter, hvor mange timer en enhed af produktet skal bearbejdes af hver af de tre maskiner. Således skal en enhed af produkt A bearbejdes 3 timer af maskine I, 6 timer af maskine II og 5 timer af maskine III.

	Maskine I	Maskine II	Maskine III
Produkt A	3	6	5
Produkt B	4	2	3

Virksomheden har en fortjeneste på 2400 kr. ved salg af en enhed af produkt A, mens fortjenesten ved salg af en enhed af produkt B er 1500 kr.

Hvor stor skal den ugentlige produktion af A og B være for at give virksomheden størst mulig fortjeneste?

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}\,.$$

Undersøg funktionen og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

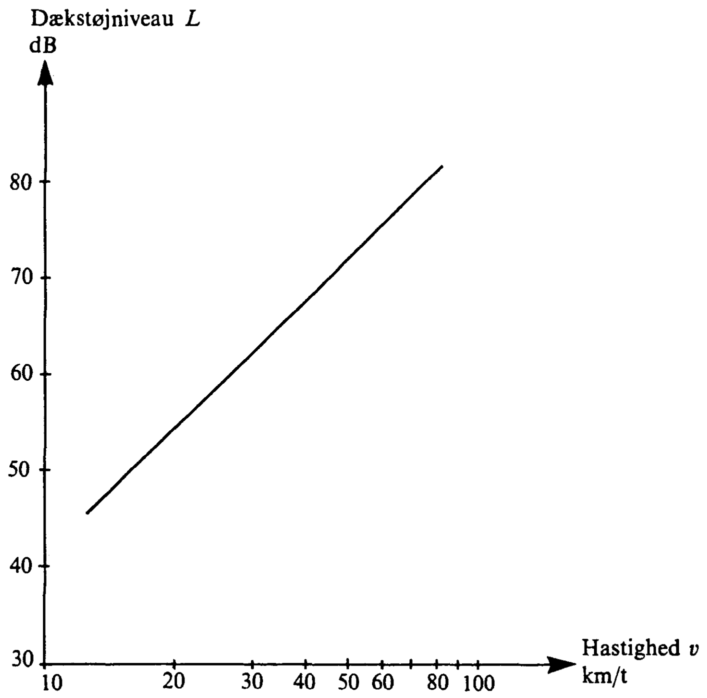
Tegn grafen for f.

Grafen for f indeholder to punkter P og Q med andenkoordinat 1. Grafens tangenter i punkterne P og Q danner sammen med linjen gennem P og Q en trekant.

Beregn arealet af denne trekant.

VEND!

6b. Hidtil er indsatsen for at sænke bilers støjniveau alene blevet foretaget af bilfabrikkerne, der specielt har koncentreret sig om motorens støj. Hvis yderligere sænkning skal være mulig, må andre støjkilder tages i betragtning, f.eks. bildækkenes støj.
Nedenstående figur viser sammenhængen mellem en personbils dækstøjniveau L (målt i dB) og bilens hastighed v (målt i km/t).



Bemærk, at førsteaksen er logaritmisk.

Det oplyses, at dækstøjniveauet er 62 dB ved hastigheden 30 km/t og 72 dB ved 50 km/t.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver dækstøjniveauet L som funktion af bilens hastighed v.

Beregn dækstøjniveauet for en hastighed på 100 km/t.

Sammenhængen mellem støjintensiteten I (målt i watt/m^2) og støjniveauet L (målt i dB) fra en støjkilde er givet ved

$$L = 60 + 10 \cdot \log I \ .$$

Personbilens motorstøjniveau er 72 dB ved hastigheder over 40 km/t.

Beregn støjintensiteten svarende til dette motorstøjniveau.

Personbilens samlede støjintensitet er summen af intensiteterne for motorstøjen og dækstøjen.

Beregn personbilens samlede støjniveau ved hastigheden 100 km/t.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988 **88-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

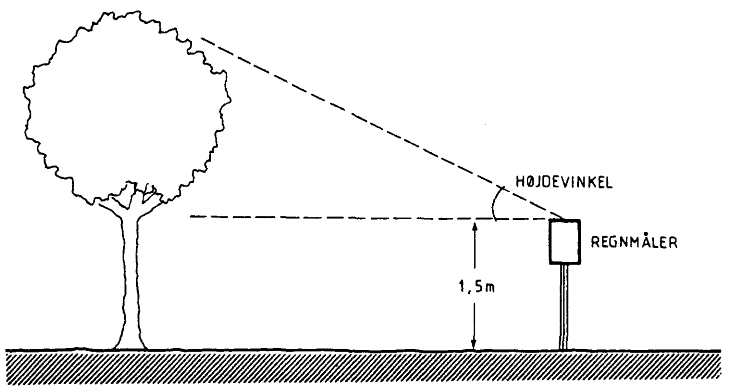
Tirsdag den 16. august 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a, 6b og 6c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 6 .... ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5 .... ca. 20 point

1.



Definition af højdevinkel for regnmåler i forhold til lægivende omgivelser.

Kilde: *Spildevandskomitéen, DIF.* 1980.

Ved placering af regnmålere forsøger man at mindske vindens indflydelse på regndråbernes baner ved hjælp af passende læforhold. Forsøg har vist, at de bedste læforhold opnås, hvis måleren placeres på steder omgivet af vegetation, således at højdevinklen (se figur) regnet fra regnmålerens overkant til toppen af træerne er mellem $15°$ og $30°$.

I hvilke afstande fra 15 m høje lægivende træer kan en regnmåler placeres, når højdevinklen skal være mellem $15°$ og $30°$?

En anden regnmåler er placeret i afstanden 10 m fra lægivende træer, og højdevinklen er målt til $25°$.

Bestem højden af de lægivende træer.

2. Et bestemt mærke kakaopulver sælges i 250-grams pakker. Man regner med, at vægten af en pakke er normalfordelt med middelværdi 260 g og spredning 10 g.

   Bestem sandsynligheden for, at en pakke vejer over 265 g.

   En kunde køber 5 pakker kakaopulver.

   Beregn sandsynligheden for, at mindst én af disse vejer over 265 g.

3. To funktioner f og g er givet ved

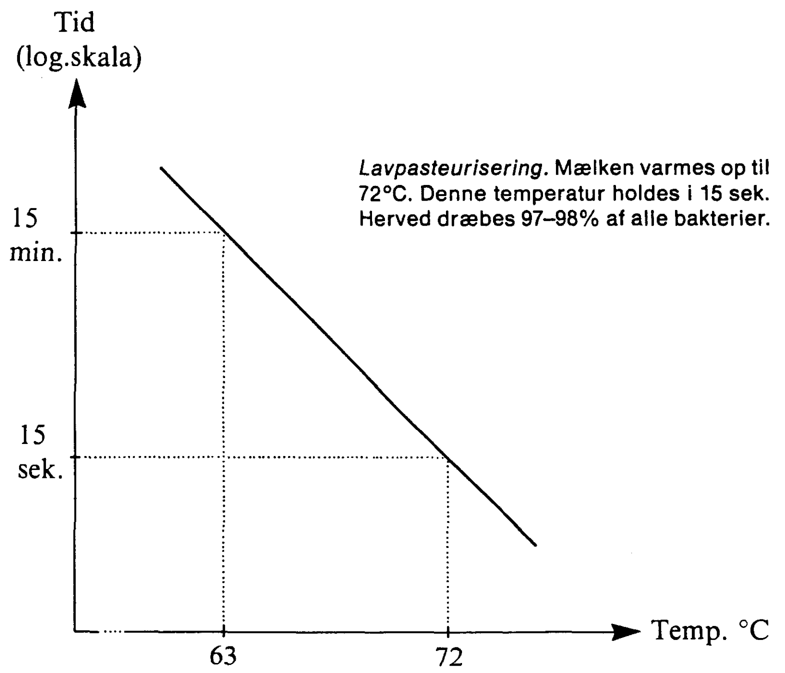
$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \ln x \ , \ x > 0 \ .$$

   Grafen for f har i punktet $A(1, f(1))$ en tangent t_1, og grafen for g har i punktet $B(1, g(1))$ en tangent t_2.

   Bestem en ligning for hver af disse tangenter.

   Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem tangenterne.

4.



Eks. på to temp. tidkombinationer, der giver samme effekt (lavpasteurisering). 63°C i 15 min. kan erstatte 72°C i 15 sek.
(Fra »Mejerilære« af E. Waagner Nielsen og Jens A. Ullum).

Ved varmebehandling, pasteurisering, af mælk dræbes bakterier i mælken. Ovenfor er metoden lavpasteurisering beskrevet, og figuren viser hvilke sammenhørende værdier af varmebehandlingstid og temperatur, der har samme effekt på mælken som lavpasteurisering. Det fremgår, at varmebehandlingstiden aftager eksponentielt med temperaturen for temperaturer mellem 63°C og 72°C.

Indtegn den viste graf i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, og bestem den temperatur, der kræves, hvis varmebehandlingstiden skal være 1 minut (60 sekunder).

Bestem en forskrift for den funktion, der angiver varmebehandlingstiden i sekunder som funktion af temperaturen i °C.

Hvor meget skal temperaturen øges, for at varmebehandlingstiden kan nedsættes til det halve?

5. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 14x + 14 \ , \quad x \in \mathrm{R}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x} \ , \quad x \geqq 0 \ .$$

Tegn i samme koordinatsystem graferne for f og g, og løs uligheden

$$f(x) \leqq g(x) \ .$$

De to grafer afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

6a. I et koordinatsystem har en cirkel $\mathscr{C}$ og en linje m ligningerne

$$\mathscr{C}\colon \ x^2 + y^2 = 1$$

$$m\colon \ y = 2x + \tfrac{2}{5} \ .$$

Linjen m skærer cirklen $\mathscr{C}$ i to punkter A og B.

Beregn koordinatsættet for hvert af punkterne A og B, når det oplyses, at A har negativ førstekoordinat.

Bestem en ligning for cirkeltangenten i punktet A.

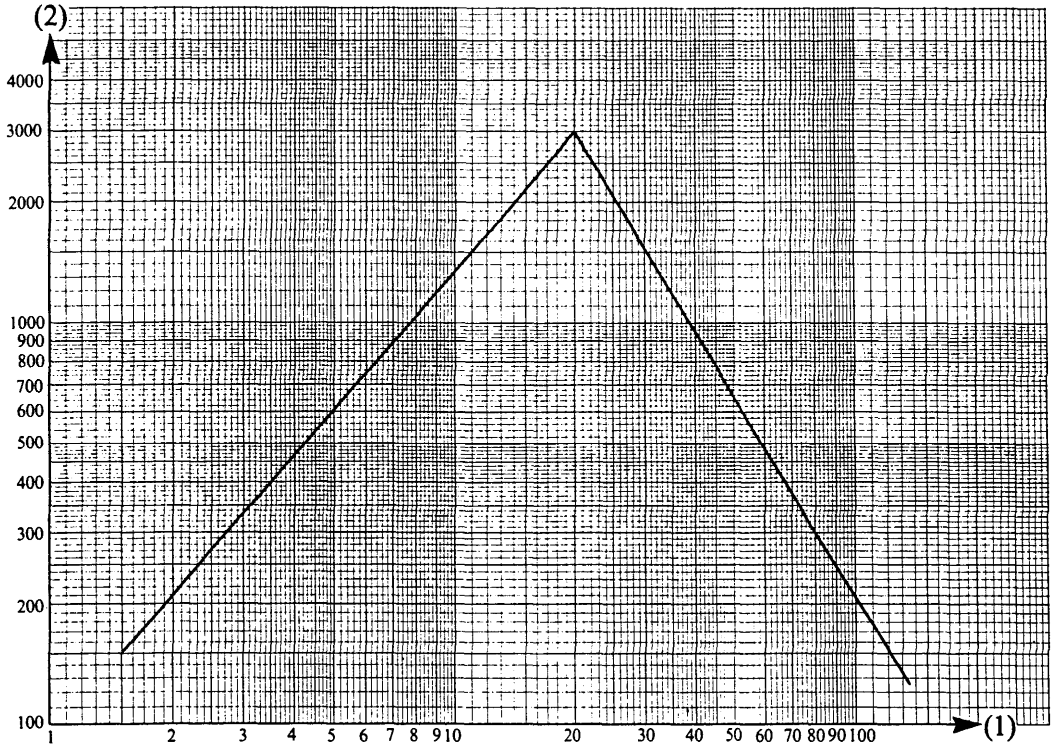
6b. I forbindelse med en influenza-epidemi regnes der med, at sandsynligheden for, at en voksen person får influenzaen, er 30%, med mindre vedkommende har haft influenza af samme type inden for det sidste år. I dette tilfælde er sandsynligheden kun 2% for at få influenzaen igen.
Inden for det sidste år har 15% af den voksne befolkning haft influenza af den pågældende type.

Beregn sandsynligheden for, at en voksen får denne influenza.

Beregn sandsynligheden for, at en voksen, der får influenzaen, har haft den en gang før inden for det sidste år.

VEND!

6c.



Figuren viser grafen for en funktion f med definitionsmængde R_+.

Bestem en forskrift for f.

Løs ligningen $f(x) = 0{,}5$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-11

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 17. august 1988 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 point
hver af opgaverne 2–9 .... ca. 15 point

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + \ln x \ , \quad x > 0 \ .$$

Funktionen har netop ét nulpunkt i intervallet]0;1].

Bestem dette nulpunkt (3 dec.).

2. Bestem den løsning f til differentialligningen

$$y'' = -4y \ ,$$

for hvilken $f(0) = 4$ og $f'(0) = 6$.

Bestem tallet c, således at funktionen $g = f + c$ er en løsning til differentialligningen

$$y'' = -4y + 8 \ .$$

3. I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x, y)$ bevæger sig i planen, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= t^2-4 \end{aligned} \quad , \quad -\infty < t < \infty \ .$$

Gør rede for, at banekurven er en parabel, og tegn parablen.

Bestem de tidspunkter t, for hvilke vektoren $\overrightarrow{OP}$ er vinkelret på hastighedsvektoren i P.

4. I trekant ABC er $\angle A = 40°$, $|AC| = 2|AB|$ og $|BC| = 5$.

Beregn $|AB|$, $|AC|$, $\angle B$ og $\angle C$.

5. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}-1} \ , \quad x>0$$

og

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)-x \ , \quad x>0 \ .$$

Vis, at g er en stamfunktion til f.

Beregn den eksakte værdi af tallet

$$\int_1^2 f(x)\,dx \ .$$

6. Ved produktion af et stort antal enheder af en bestemt vare er sandsynligheden for, at en vareenhed er defekt, lig med p.

Angiv sandsynligheden $f(p)$ for, at netop 4 blandt 5 tilfældigt valgte vareenheder er defekte.

Bestem størsteværdien for funktionen f.

7. I et koordinatsystem i rummet er to linjer l og m givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathrm{R}.$$

Linjerne l og m skærer hinanden i et punkt A.

Bestem koordinatsættet til punktet A.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem l og m.

Beregn afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt til den plan, der indeholder linjerne l og m.

8. Teksten til højre stammer fra en annoncekampagne, hvor Rådet for Større Færdselssikkerhed informerede om fartgrænser.
Teksten omhandler den tidsbesparelse, man kan opnå ved at forøge gennemsnitsfarten med 10 km/t.

Bestem en forskrift for en funktion f, der angiver den tidsbesparelse, man opnår, hvis man over en strækning på 10 km forøger sin gennemsnitsfart fra x km/t til $(x+10)$ km/t.

Vis, at f i overensstemmelse med annonceteksten er aftagende.

Du sparer mindre, end du tror

På en 10 km tur igennem byen sparer man 2 minutter ved at øge gennemsnitsfarten fra 50 til 60 km/t. En gennemsnitsfart på 60 km/t kræver, at man på lange strækninger kører betydeligt hurtigere end 60 km/t.
Jo hurtigere man kører, desto mere tror man, der spares ved at sætte farten yderligere op. I virkeligheden er det lige omvendt. På en 10 km tur på motorvej sparer man 33 sekunder ved at øge gennemsnitsfarten fra 100 til 110 km/t. Højt regnet.

9. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1 \ .$$

Vis, at f er en voksende funktion.

Bestem integralet

$$I(t) = \int_0^t f(x)dx \ , \quad 0 < t < 1 \ .$$

Bestem $\lim\limits_{t \to 1^-} I(t)$.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–9 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-12

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Torsdag den 18. august 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. I en plan er givet to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$, hvor

$$|\boldsymbol{a}| = 2 \ , \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4 \quad \text{og} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 5 \ .$$

Bestem længden af vektoren $\boldsymbol{b}$.

Bestem et gradtal for vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

2. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} \ .$$

Vis, at

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \ .$$

Beregn den eksakte værdi af tallet

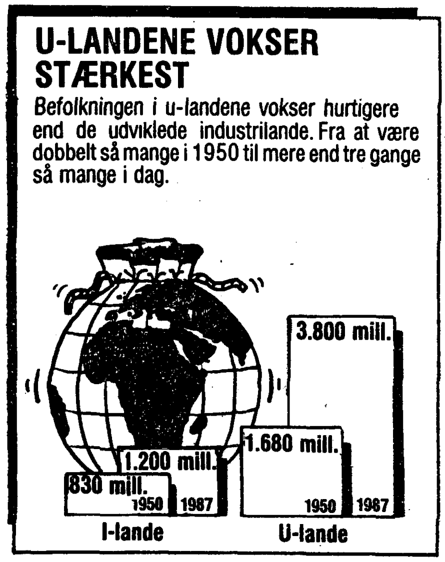
$$\int_1^2 f(x)dx \ .$$

3. I 1987 nåede Jordens befolkningstal 5 milliarder. Illustrationen stammer fra en artikel i Berlingske Tidende den 14. juni 1987 om denne begivenhed.

Bestem ved hjælp af illustrationens oplysninger den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i befolkningstallet i henholdsvis I-landene og U-landene i perioden 1950–87.

Det antages, at befolkningstallet i I- og U-landene fremover årligt vokser med de fundne procenter.

Hvornår vil da befolkningstallet i U-landene være fire gange så stort som i I-landene?



4. I en befolkning forekommer to sygdomme S_1 og S_2 i et sådant omfang, at

> 0,2% af befolkningen har begge sygdomme,
> 3,8% af befolkningen har sygdommen S_1, men ikke S_2,
> 4,8% af befolkningen har sygdommen S_2, men ikke S_1.

Fra befolkningen vælges tilfældigt en person. Med H_1 og H_2 betegnes hændelserne

> H_1: personen har sygdommen S_1.
> H_2: personen har sygdommen S_2.

Bestem $P(H_1)$ og $P(H_2)$, og vis, at hændelserne H_1 og H_2 er uafhængige.

Herefter vælges tilfældigt en person fra den del af befolkningen, der har mindst en af sygdommene S_1 og S_2. Med H'_1 og H'_2 betegnes hændelserne

> H'_1: personen har sygdommen S_1.
> H'_2: personen har sygdommen S_2.

Bestem $P(H'_1)$ og $P(H'_2)$, og undersøg, om hændelserne H'_1 og H'_2 er uafhængige.

5. I rummet er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En plan α er givet ved ligningen

$$2x+3y+z=6 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de tre punkter A, B og C, hvori planen skærer koordinatsystemets akser.

Beregn arealet af trekant ABC.

Bestem koordinatsættet til projektionen af begyndelsespunktet O på planen α.

6a. En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)^2} \ .$$

Undersøg funktionen og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

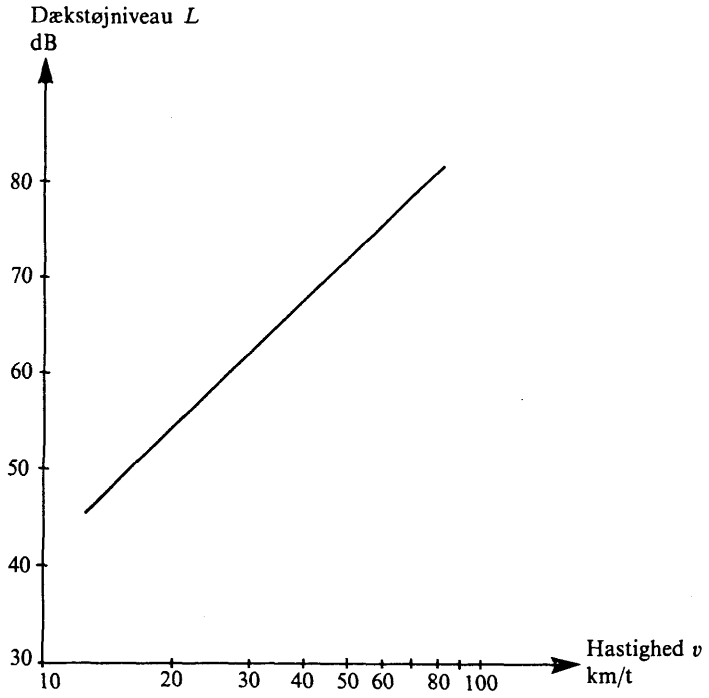
Tegn grafen for f.

Grafen for f indeholder to punkter P og Q med andenkoordinat 1. Grafens tangenter i punkterne P og Q danner sammen med linjen gennem P og Q en trekant.

Beregn arealet af denne trekant.

VEND!

6b. Hidtil er indsatsen for at sænke bilers støjniveau alene blevet foretaget af bilfabrikkerne, der specielt har koncentreret sig om motorens støj. Hvis yderligere sænkning skal være mulig, må andre støjkilder tages i betragtning, f.eks. bildækkenes støj.
Nedenstående figur viser sammenhængen mellem en personbils dækstøjniveau L (målt i dB) og bilens hastighed v (målt i km/t).



Bemærk, at førsteaksen er logaritmisk.

Det oplyses, at dækstøjniveauet er 62 dB ved hastigheden 30 km/t og 72 dB ved 50 km/t.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver dækstøjniveauet L som funktion af bilens hastighed v.

Beregn dækstøjniveauet for en hastighed på 100 km/t.

Sammenhængen mellem støjintensiteten I (målt i watt/m^2) og støjniveauet L (målt i dB) fra en støjkilde er givet ved

$$L = 60 + 10 \cdot \log I \ .$$

Personbilens motorstøjniveau er 72 dB ved hastigheder over 40 km/t.

Beregn støjintensiteten svarende til dette motorstøjniveau.

Personbilens samlede støjintensitet er summen af intensiteterne for motorstøjen og dækstøjen.

Beregn personbilens samlede støjniveau ved hastigheden 100 km/t.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1988

MATEMATISK LINJE

88-8-13

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

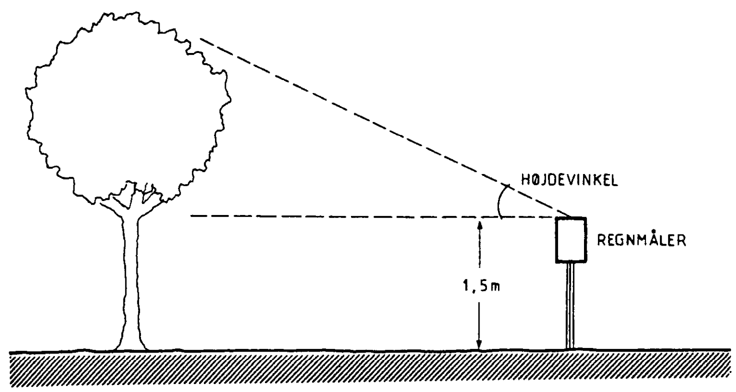
Tirsdag den 16. august 1988 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a, 6b og 6c må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 6 .... ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5 .... ca. 20 point

1.



Definition af højdevinkel for regnmåler i forhold til lægivende omgivelser.

Kilde: *Spildevandskomitéen, DIF.* 1980.

Ved placering af regnmålere forsøger man at mindske vindens indflydelse på regndråbernes baner ved hjælp af passende læforhold. Forsøg har vist, at de bedste læforhold opnås, hvis måleren placeres på steder omgivet af vegetation, således at højdevinklen (se figur) regnet fra regnmålerens overkant til toppen af træerne er mellem $15°$ og $30°$.

I hvilke afstande fra 15 m høje lægivende træer kan en regnmåler placeres, når højdevinklen skal være mellem $15°$ og $30°$?

En anden regnmåler er placeret i afstanden 10 m fra lægivende træer, og højdevinklen er målt til $25°$.

Bestem højden af de lægivende træer.

2. Et bestemt mærke kakaopulver sælges i 250-grams pakker. Man regner med, at vægten af en pakke er normalfordelt med middelværdi 260 g og spredning 10 g.

   Bestem sandsynligheden for, at en pakke vejer over 265 g.

   En kunde køber 5 pakker kakaopulver.

   Beregn sandsynligheden for, at mindst én af disse vejer over 265 g.

3. En funktion f er bestemt ved

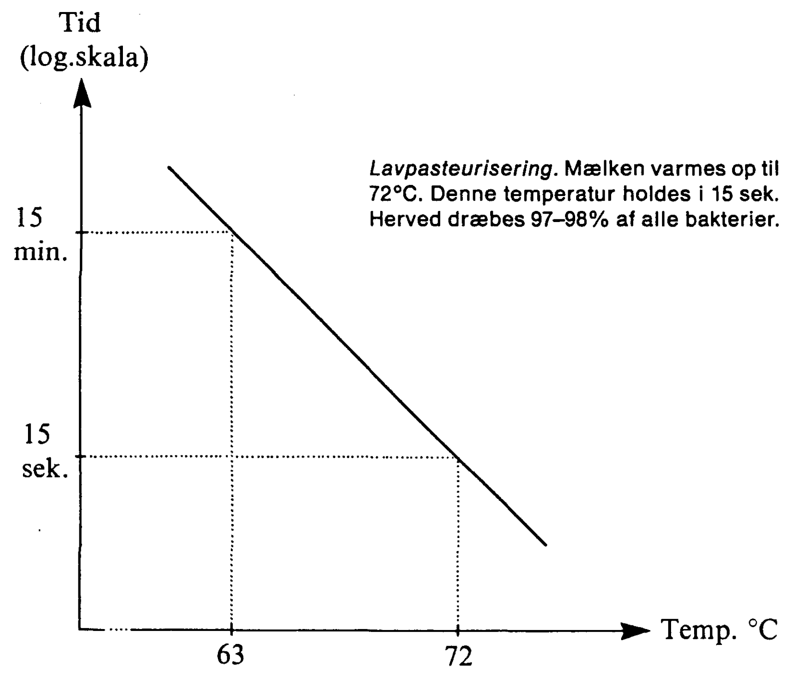
$$f(x) = x^2 + \ln x \ , \quad x > 0 \ .$$

   Vis, at f er voksende.

   Skitsér grafen for f.

   Bestem funktionens nulpunkt (3 dec.).

4.



Eks. på to temp. tidkombinationer, der giver samme effekt (lavpasteurisering).
63°C i 15 min. kan erstatte 72°C i 15 sek.
(Fra »Mejerilære« af E. Waagner Nielsen og Jens A. Ullum).

Ved varmebehandling, pasteurisering, af mælk dræbes bakterier i mælken. Ovenfor er metoden lavpasteurisering beskrevet, og figuren viser hvilke sammenhørende værdier af varmebehandlingstid og temperatur, der har samme effekt på mælken som lavpasteurisering. Det fremgår, at varmebehandlingstiden aftager eksponentielt med temperaturen for temperaturer mellem 63°C og 72°C.

Indtegn den viste graf i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, og bestem den temperatur, der kræves, hvis varmebehandlingstiden skal være 1 minut (60 sekunder).

Bestem en forskrift for den funktion, der angiver varmebehandlingstiden i sekunder som funktion af temperaturen i °C.

Hvor meget skal temperaturen øges, for at varmebehandlingstiden kan nedsættes til det halve?

5. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 14x + 14 \ , \quad x \in \mathrm{R}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x} \ , \quad x \geqq 0 \ .$$

Tegn i samme koordinatsystem graferne for f og g, og løs uligheden

$$f(x) \leqq g(x) \ .$$

De to grafer afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

6a. I et koordinatsystem har en cirkel $\mathscr{C}$ og en linje m ligningerne

$$\mathscr{C}\colon \ x^2 + y^2 = 1$$

$$m\colon \ y = 2x + \tfrac{2}{5} \ .$$

Linjen m skærer cirklen $\mathscr{C}$ i to punkter A og B.

Beregn koordinatsættet for hvert af punkterne A og B, når det oplyses, at A har negativ førstekoordinat.

Bestem en ligning for cirkeltangenten i punktet A.

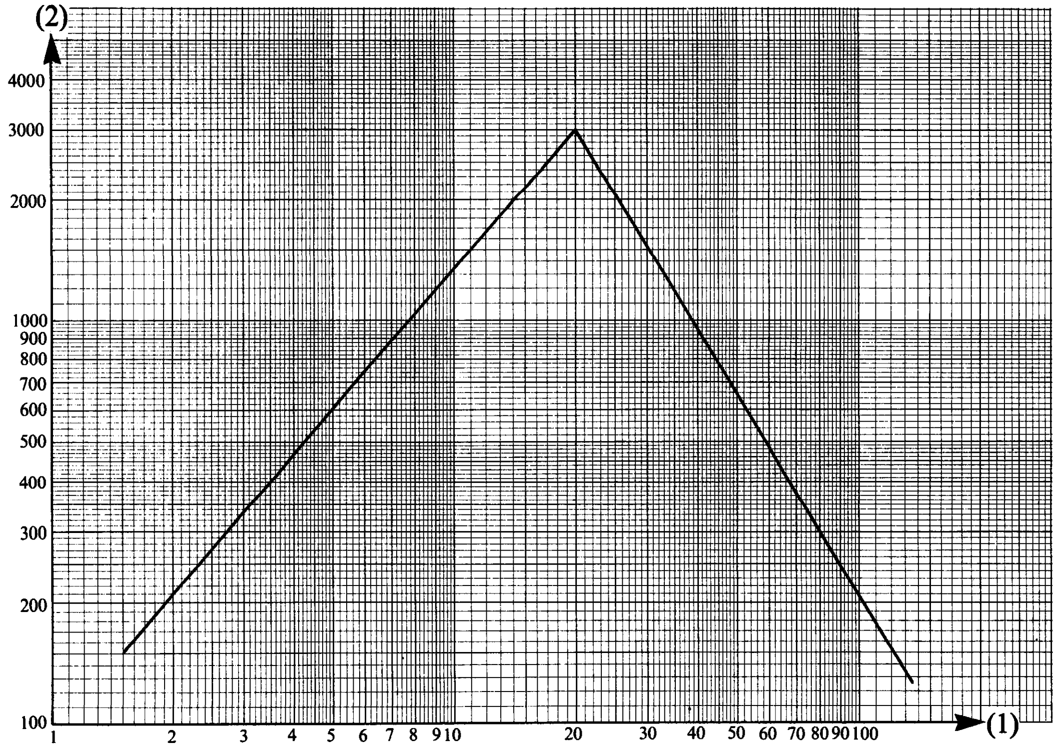
6b. I forbindelse med en influenza-epidemi regnes der med, at sandsynligheden for, at en voksen person får influenzaen, er 30%, med mindre vedkommende har haft influenza af samme type inden for det sidste år. I dette tilfælde er sandsynligheden kun 2% for at få influenzaen igen.
Inden for det sidste år har 15% af den voksne befolkning haft influenza af den pågældende type.

Beregn sandsynligheden for, at en voksen får denne influenza.

Beregn sandsynligheden for, at en voksen, der får influenzaen, har haft den en gang før inden for det sidste år.

VEND!

6c.



Figuren viser grafen for en funktion f med definitionsmængde $\mathbb{R}_+$.

Bestem en forskrift for f.

Løs ligningen $f(x) = 0{,}5$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a, 6b og 6c må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Torsdag den 18. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2.	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5.	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ oplyses, at

$$|\boldsymbol{a}| = 3, \quad |\boldsymbol{b}| = 5 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 130^\circ \ .$$

Beregn arealet af det af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspændte parallelogram.

Beregn $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

2. En vareenhed i en bestemt produktion kan have to forskellige fejl A og B. Disse fejl forekommer uafhængigt af hinanden. Sandsynligheden for, at fejl A henholdsvis fejl B forekommer, er

$$P(A) = 0{,}10 \quad \text{og} \quad P(B) = 0{,}20 \ .$$

Beregn sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt vareenhed har

1) begge fejl.

2) mindst én af fejlene.

3) netop én af fejlene.

3. Et radarovervågningsområde kan antages at være cirkelformet med radius 50 km. Et koordinatsystem tænkes indlagt med begyndelsespunkt i centrum af overvågningsområdet og med andenaksens positive retning pegende mod nord. Længdeenheden i koordinatsystemet er 1 km.
En flykorridor går gennem området. Flykorridoren kan i det valgte koordinatsystem beskrives som

$$\{P(x,y) \mid 25 \leqq x+y \leqq 35\} \ .$$

Skitsér overvågningsområdet og flykorridoren.

Beregn flykorridorens bredde.

Et fly passerer overvågningsområdet og holder sig under hele passagen i midten af flykorridoren.

Beregn længden af den strækning, som flyet tilbagelægger inden for overvågningsområdet.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x} \quad , \quad x \in [0;\pi] \ .$$

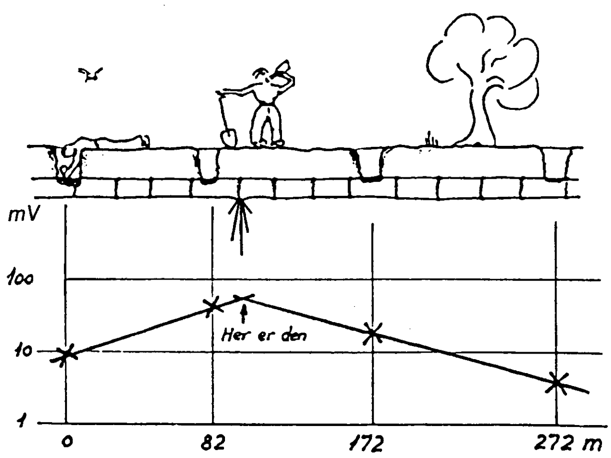
Bestem funktionens monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

5. For at finde små utætheder i nedgravede vandledninger af jern kan man anvende en teknik, der kaldes akustisk emission. Denne teknik udnytter den kendsgerning, at udsivende vand giver støj i jernrør, og at støjniveauet vokser eksponentielt, når man nærmer sig utætheden.



Teknikken er illustreret på figuren. Langs en vandledning er der gravet 4 huller ned til ledningen, og i hvert af hullerne er støjniveauet målt (støjniveauet angives her i mV). Hvert huls beliggenhed, angivet som afstand fra første hul, er sammen med støjniveauet i hullet afsat på enkeltlogaritmisk papir. Herefter har man, som vist på figuren, bestemt utæthedens beliggenhed.
Nedenstående tabel viser resultatet af målinger foretaget for at lokalisere en utæthed i en anden vandledning.

Afstand fra første hul (m)	0	48	92	140
Støjniveau (mV)	8	30	45	12

Bestem utæthedens beliggenhed i forhold til det første hul.

Når man nærmer sig utætheden, vokser støjniveauet.

Bestem »fordoblingsafstanden« for støjniveauet.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes støjniveauet afhænger af afstanden fra det første hul.

6a. For ethvert tal k er en funktion f_k bestemt ved

$$f_k(x) = x + k \cdot e^x \ .$$

Gør rede for, at for positive værdier af k er f_k voksende og har værdimængden R.

Gør rede for, at for negative værdier af k har f_k en størsteværdi, og bestem, udtrykt ved k, værdimængden for f_k.

Gør rede for, at graferne for samtlige funktioner f_k har en fælles asymptote, og bestem en ligning for denne asymptote.

Tegn i samme koordinatsystem grafen for hver af funktionerne f_2 og f_{-2}.

Bestem for enhver værdi af k en ligning for tangenten til grafen for f_k i det punkt, hvori grafen skærer koordinatsystemets andenakse, og gør rede for, at alle disse tangenter har et fælles punkt.

6b. I et koordinatsystem har en ellipse ligningen

$$9x^2+4y^2-180x=0 \ .$$

Bestem ellipsens halvakser og koordinatsættet til ellipsens centrum.

Bestem en ligning for tangenten t til ellipsen i punktet $P(4{,}12)$.

Med f betegnes den rette affinitet, der har koordinatsystemets andenakse som affinitetsakse og forvandlingstal 2.

Bestem en ligning for linjen $f(t)$.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem linjerne t og $f(t)$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1989 **89-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Fredag den 19. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–6 .... ca. 20 point

1. Bestem til differentialligningen

$$y''-\tfrac{1}{4}y=0$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $A(0,6)$ og i punktet A har en tangent med hældningskoefficient 1.

Bestem mindsteværdien for denne løsning.

2. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x=t^2 \\ y=t-t^2 \end{matrix} \quad , \quad t\in \mathrm{R}\ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser og til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

Bestem koordinatsættet til det punkt på kurven, der har den mindste afstand til linjen med ligningen $2x-y+3=0$.

3. I en bestemt vareproduktion er 40% af varerne af første kvalitet. Varerne kontrolleres ved udtagning af stikprøver på 50 enheder.

Bestem sandsynligheden for, at der i en sådan stikprøve er mindst 25 enheder af første kvalitet.

Bestem det største tal t, for hvilket det gælder, at sandsynligheden er mindst 30% for, at stikprøven indeholder mindst t enheder af første kvalitet.

Produktionsmetoden ændres. Det oplyses, at sandsynligheden nu er mindst 99% for, at der er mindst 25 enheder af første kvalitet i en stikprøve på 50.

Hvad kan på denne baggrund siges om procentdelen af førstekvalitetsvarer i produktionen?

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 9x - 8}{x^2 + 2}, \quad x \geqq 0 .$$

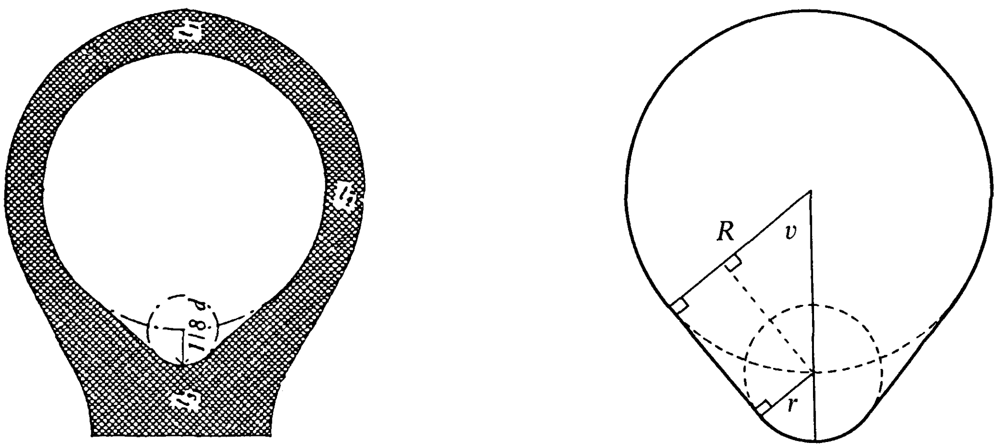
Vis, at grafen for f har netop én asymptote, og bestem en ligning for denne.

Vis, at grafen for f ligger over asymptoten, når $x > 0$.

Grafen for f, dens asymptote og linjen med ligningen $x = 2$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

5.



Spidsbundet rørledning

Røråbning

(Størrelsesforholdene er ikke korrekte)

Figuren viser røråbningen i en såkaldt spidsbundet rørledning. Det oplyses, at radius R i den store cirkel er 40 cm, og at radius r i den lille cirkel er 5 cm.

Beregn den vinkel, der på figuren er betegnet v.

Beregn arealet af røråbningen.

6. Fra to depoter A og B skal fordeles ialt 1000 vareenheder til tre købmænd P, Q og R, som skal modtage henholdsvis 200 vareenheder, 600 vareenheder og 200 vareenheder. I depot A er der 300 vareenheder, og i depot B er der 700. Udgiften til transport af en vareenhed fra depot til købmand fremgår af nedenstående skema.

	Købmand P	Købmand Q	Købmand R
Depot A	5	12	12
Depot B	10	16	18

Det koster således 16 kr. at transportere en vareenhed fra depot B til købmand Q.

Hvordan skal transporten tilrettelægges, for at den samlede udgift til transport bliver mindst mulig?

Beregn den mindst mulige samlede transportudgift.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1989 **89-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Onsdag den 17. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ oplyses, at

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \ .$$

Beregn vinklen mellem $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$.

Beregn arealet af det af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspændte parallelogram.

2. Ved en kemisk proces måles koncentrationen af et bestemt stof til forskellige tidspunkter. Koncentrationen C angives i mol pr. liter og tiden t i minutter. Det vides, at C er en eksponentielt aftagende funktion af t. Til tiden $t = 5$ er $C = 0{,}26$, og til tiden $t = 15$ er $C = 0{,}14$.

Bestem C ved processens begyndelse ($t = 0$).

Bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen C er halvt så stor som ved processens begyndelse.

3. Fødselsvægten for (levendefødte) danske børn kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 3420 g.
En nyfødt anses for ikke fuldbåren, hvis fødselsvægten er under 2500 g. Af de nyfødte er 5,7% ikke fuldbårne.

Bestem spredningen for fødselsvægten.

Bestem sandsynligheden for, at en nyfødt vejer mere end 4000 g.

Hvad gælder om vægten af de 25% nyfødte, der vejer mest?

4. I et koordinatsystem er en cirkel $\mathscr{C}$ og en linje l bestemt ved

$$\begin{aligned} \mathscr{C}&: \quad x^2+y^2-10y-25=0 \\ l&: \quad y=3x-5\ . \end{aligned}$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

Beregn afstanden fra cirklens centrum til linjen l.

Linjen l skærer cirklen i to punkter.

Beregn koordinatsættet til hvert af disse punkter.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x)=x-\sqrt{x}\ , \quad x\in[0;4]\ .$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

6a. I bogen »Tekniske installationer« af E. Hviid Christensen findes nedenstående tabel over sammenhængen mellem elektriske pærers effektforbrug, målt i watt, og deres lysstrøm, målt i lumen.

Effektforbrug (watt)	15	25	40	60	75	100
Lysstrøm (lumen)	130	240	430	730	980	1380

Gør rede for, at lysstrømmen som funktion af effektforbruget med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

$$f(x)=b\cdot x^a\ .$$

Bestem tallene a og b.

Med hvor mange procent forøges lysstrømmen, når effektforbruget fordobles?

Med hvor mange procent skal effektforbruget forøges, hvis lysstrømmen ønskes fordoblet?

6b. I Undersøgelse 32 fra Det landøkonomiske Driftsbureau, »Arbejdsforbruget til landbrugets driftsgrene«, findes modeller for det årlige arbejdsforbrug ved korndyrkning. For landbrug med et landbrugsareal på 50 hektar antages det, at

$$y = 8{,}6 - 0{,}078x + 129{,}0 \cdot \frac{1}{x} \, ,$$

hvor x er kornarealet, målt i hektar, og y er arbejdsforbruget pr. hektar kornareal, målt i timer.

Gør rede for, at arbejdsforbruget pr. hektar kornareal er en aftagende funktion af kornarealet, og skitsér grafen for denne funktion.

I det følgende betragtes stadig udelukkende landbrug med et landbrugsareal på 50 hektar.

Beregn arbejdsforbruget pr. hektar kornareal for et landbrug med et kornareal på 30 hektar, og beregn det samlede arbejdsforbrug ved korndyrkning for et sådant landbrug.

Det samlede arbejdsforbrug, målt i timer, ved korndyrkning på et landbrug med et kornareal på x hektar kaldes $f(x)$.

Bestem en forskrift for f, og tegn grafen for f.

Beregn, hvor stort et areal der kan udlægges til korndyrkning, hvis det samlede arbejdsforbrug ved korndyrkning skal holdes under 250 timer.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1989

MATEMATISK LINJE

89-8-4

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Torsdag den 18. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ oplyses, at

$$|\boldsymbol{a}| = 3, \quad |\boldsymbol{b}| = 5 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 130° \ .$$

Beregn arealet af det af $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspændte parallelogram.

Beregn $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

2. En vareenhed i en bestemt produktion kan have to forskellige fejl A og B. Disse fejl forekommer uafhængigt af hinanden. Sandsynligheden for, at fejl A henholdsvis fejl B forekommer, er

$$P(A) = 0{,}10 \quad \text{og} \quad P(B) = 0{,}20 \ .$$

Beregn sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt vareenhed har

1) begge fejl.

2) mindst én af fejlene.

3) netop én af fejlene.

3. Et radarovervågningsområde kan antages at være cirkelformet med radius 50 km. Et koordinatsystem tænkes indlagt med begyndelsespunkt i centrum af overvågningsområdet og med andenaksens positive retning pegende mod nord. Længdeenheden i koordinatsystemet er 1 km.
En flykorridor går gennem området. Flykorridoren kan i det valgte koordinatsystem beskrives som

$$\{P(x,y) \mid 25 \leqq x+y \leqq 35\} \ .$$

Skitsér overvågningsområdet og flykorridoren.

Beregn flykorridorens bredde.

Et fly passerer overvågningsområdet og holder sig under hele passagen i midten af flykorridoren.

Beregn længden af den strækning, som flyet tilbagelægger inden for overvågningsområdet.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x} \quad , \quad x \in [0;\pi] \ .$$

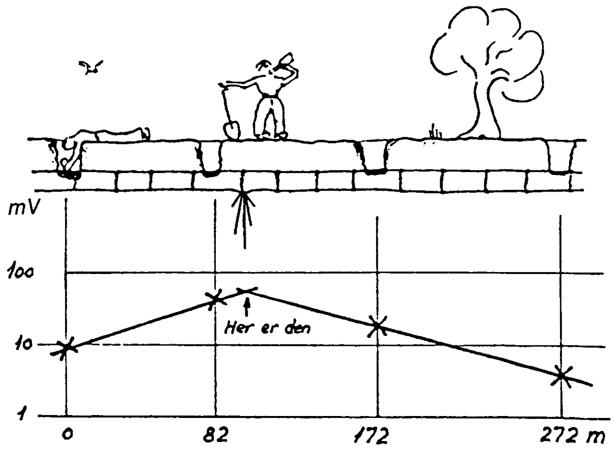
Bestem funktionens monotoniforhold.

Tegn grafen for f.

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

5. For at finde små utætheder i nedgravede vandledninger af jern kan man anvende en teknik, der kaldes akustisk emission. Denne teknik udnytter den kendsgerning, at udsivende vand giver støj i jernrør, og at støjniveauet vokser eksponentielt, når man nærmer sig utætheden.



Teknikken er illustreret på figuren. Langs en vandledning er der gravet 4 huller ned til ledningen, og i hvert af hullerne er støjniveauet målt (støjniveauet angives her i mV). Hvert huls beliggenhed, angivet som afstand fra første hul, er sammen med støjniveauet i hullet afsat på enkeltlogaritmisk papir. Herefter har man, som vist på figuren, bestemt utæthedens beliggenhed.
Nedenstående tabel viser resultatet af målinger foretaget for at lokalisere en utæthed i en anden vandledning.

Afstand fra første hul (m)	0	48	92	140
Støjniveau (mV)	8	30	45	12

Bestem utæthedens beliggenhed i forhold til det første hul.

Når man nærmer sig utætheden, vokser støjniveauet.

Bestem »fordoblingsafstanden« for støjniveauet.

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes støjniveauet afhænger af afstanden fra det første hul.

6a. For ethvert tal k er en funktion f_k bestemt ved

$$f_k(x) = x + k \cdot e^x \ .$$

Gør rede for, at for positive værdier af k er f_k voksende og har værdimængden R.

Gør rede for, at for negative værdier af k har f_k en størsteværdi, og bestem, udtrykt ved k, værdimængden for f_k.

Gør rede for, at graferne for samtlige funktioner f_k har en fælles asymptote, og bestem en ligning for denne asymptote.

Tegn i samme koordinatsystem grafen for hver af funktionerne f_2 og f_{-2}.

Bestem for enhver værdi af k en ligning for tangenten til grafen for f_k i det punkt, hvori grafen skærer koordinatsystemets andenakse, og gør rede for, at alle disse tangenter har et fælles punkt.

6b. Ved større betonbyggerier føres der kontrol med styrken af den anvendte beton. Denne kontrol foregår ved, at man på tilfældig måde udtager prøveterninger af betonen og udsætter disse for tryk. Det tryk, der lige netop skal til for at knuse en prøveterning, er normalfordelt og kaldes terningens brudstyrke.
For en bestemt betonblanding har denne brudstyrke en middelværdi på 40,0 N/mm^2 og en spredning på 2,8 N/mm^2.

Bestem sandsynligheden for, at brudstyrken for en prøveterning fra denne blanding er under 35,0 N/mm^2.

Bestem det tryk t, hvorom det gælder, at sandsynligheden er 99% for, at en prøvetернings brudstyrke er over t.

Der udtages 20 prøveterninger af betonblandingen til kontrol.

Bestem sandsynligheden for, at mindst én af disse knuses ved et tryk på t.

Om en anden betonblanding oplyses, at sandsynligheden er 99% for, at en prøveternings brudstyrke er over 35,0 N/mm^2.

Bestem middelværdien for denne brudstyrke, når spredningen er 2,8 N/mm^2.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1989

MATEMATISK LINJE

89-8-5

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Fredag den 19. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–6 . . . . ca. 20 point

1. Bestem til differentialligningen

$$y'' - \tfrac{1}{4}y = 0$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $A(0,6)$ og i punktet A har en tangent med hældningskoefficient 1.

Bestem mindsteværdien for denne løsning.

2. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t - t^2 \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathrm{R} \, .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser og til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

Bestem koordinatsættet til det punkt på kurven, der har den mindste afstand til linjen med ligningen $2x - y + 3 = 0$.

3. I en bestemt vareproduktion er 40% af varerne af første kvalitet. Varerne kontrolleres ved udtagning af stikprøver på 50 enheder.

Bestem sandsynligheden for, at der i en sådan stikprøve er mindst 25 enheder af første kvalitet.

Bestem det største tal t, for hvilket det gælder, at sandsynligheden er mindst 30% for, at stikprøven indeholder mindst t enheder af første kvalitet.

Produktionsmetoden ændres. Det oplyses, at sandsynligheden nu er mindst 99% for, at der er mindst 25 enheder af første kvalitet i en stikprøve på 50.

Hvad kan på denne baggrund siges om procentdelen af førstekvalitetsvarer i produktionen?

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 9x - 8}{x^2 + 2}, \quad x \geqq 0 .$$

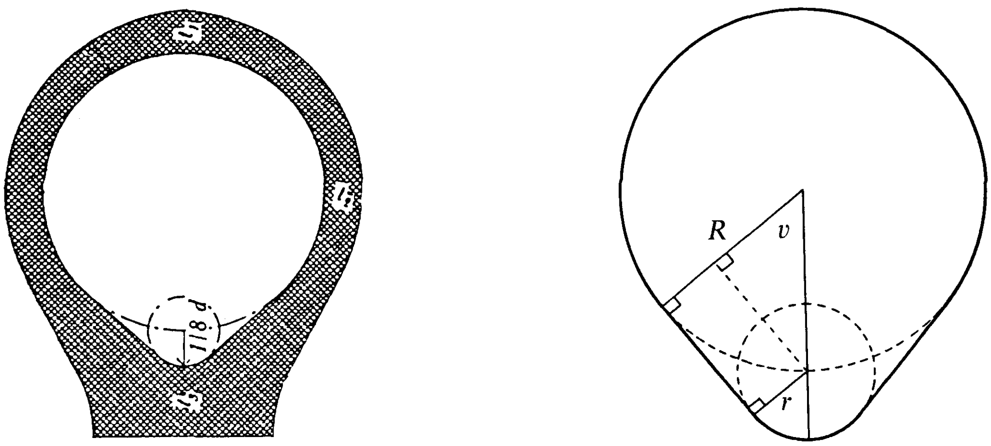
Vis, at grafen for f har netop én asymptote, og bestem en ligning for denne.

Vis, at grafen for f ligger over asymptoten, når $x > 0$.

Grafen for f, dens asymptote og linjen med ligningen $x = 2$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

5.



Spidsbundet rørledning

Røråbning

(Størrelsesforholdene er ikke korrekte)

Figuren viser røråbningen i en såkaldt spidsbundet rørledning. Det oplyses, at radius R i den store cirkel er 40 cm, og at radius r i den lille cirkel er 5 cm.

Beregn den vinkel, der på figuren er betegnet v.

Beregn arealet af røråbningen.

6. I et koordinatsystem i rummet er der givet et punkt $P(5, 4, 3)$.
To linjer l og m er bestemt ved

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

$$m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathrm{R}\ .$$

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder P og l.

Bestem koordinatsættet til m's skæringspunkt med α.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel, som m danner med α.

Bestem en parameterfremstilling for den linje, der går gennem P og skærer både l og m.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1989
MATEMATISK LINJE

89-8-6
Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN
MATEMATIK

Onsdag den 17. maj 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

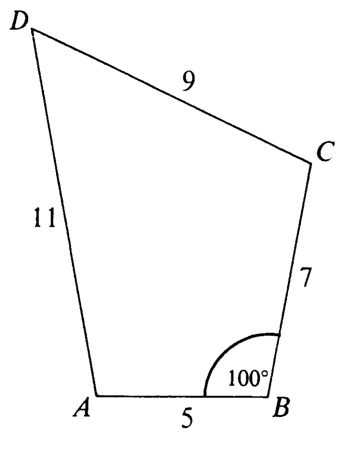
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 25 point

1. En firkant $ABCD$ har de på figuren angivne mål.

   Beregn længden af diagonalen AC.

   Beregn vinkel D.



2. Ved en kemisk proces måles koncentrationen af et bestemt stof til forskellige tidspunkter. Koncentrationen C angives i mol pr. liter og tiden t i minutter. Det vides, at C er en eksponentielt aftagende funktion af t. Til tiden $t = 5$ er $C = 0{,}26$, og til tiden $t = 15$ er $C = 0{,}14$.

   Bestem C ved processens begyndelse ($t = 0$).

   Bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen C er halvt så stor som ved processens begyndelse.

3. Fødselsvægten for (levendefødte) danske børn kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 3420 g.
En nyfødt anses for ikke fuldbåren, hvis fødselsvægten er under 2500 g. Af de nyfødte er 5,7% ikke fuldbårne.

Bestem spredningen for fødselsvægten.

Bestem sandsynligheden for, at en nyfødt vejer mere end 4000 g.

Hvad gælder om vægten af de 25% nyfødte, der vejer mest?

4. I et koordinatsystem er en cirkel $\mathscr{C}$ og en linje l bestemt ved

$$\begin{aligned} \mathscr{C}: &\quad x^2+y^2-10y-25=0 \\ l: &\quad y=3x-5\ . \end{aligned}$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

Beregn afstanden fra cirklens centrum til linjen l.

Linjen l skærer cirklen i to punkter.

Beregn koordinatsættet til hvert af disse punkter.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x)=x-\sqrt{x}\ ,\quad x\in[0;4]\ .$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

6a. I bogen »Tekniske installationer« af E. Hviid Christensen findes nedenstående tabel over sammenhængen mellem elektriske pærers effektforbrug, målt i watt, og deres lysstrøm, målt i lumen.

Effektforbrug (watt)	15	25	40	60	75	100
Lysstrøm (lumen)	130	240	430	730	980	1380

Gør rede for, at lysstrømmen som funktion af effektforbruget med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

$$f(x)=b\cdot x^a\ .$$

Bestem tallene a og b.

Med hvor mange procent forøges lysstrømmen, når effektforbruget fordobles?

Med hvor mange procent skal effektforbruget forøges, hvis lysstrømmen ønskes fordoblet?

6b. I Undersøgelse 32 fra Det landøkonomiske Driftsbureau, »Arbejdsforbruget til landbrugets driftsgrene«, findes modeller for det årlige arbejdsforbrug ved korndyrkning. For landbrug med et landbrugsareal på 50 hektar antages det, at

$$y = 8{,}6 - 0{,}078x + 129{,}0 \cdot \frac{1}{x} \,,$$

hvor x er kornarealet, målt i hektar, og y er arbejdsforbruget pr. hektar kornareal, målt i timer.

Gør rede for, at arbejdsforbruget pr. hektar kornareal er en aftagende funktion af kornarealet, og skitsér grafen for denne funktion.

I det følgende betragtes stadig udelukkende landbrug med et landbrugsareal på 50 hektar.

Beregn arbejdsforbruget pr. hektar kornareal for et landbrug med et kornareal på 30 hektar, og beregn det samlede arbejdsforbrug ved korndyrkning for et sådant landbrug.

Det samlede arbejdsforbrug, målt i timer, ved korndyrkning på et landbrug med et kornareal på x hektar kaldes $f(x)$.

Bestem en forskrift for f, og tegn grafen for f.

Beregn, hvor stort et areal der kan udlægges til korndyrkning, hvis det samlede arbejdsforbrug ved korndyrkning skal holdes under 250 timer.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989 **89-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK–FYSISK GREN

MATEMATIK I

Onsdag den 23. august 1989 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–8 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2–8............	ca. 15 point

1. Løs uligheden

$$\sqrt{2x+6} < \tfrac{1}{3}x+\tfrac{7}{3} .$$

2. I et koordinatsystem er givet vektoren

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} .$$

Bestem koordinatsættet for hver af de vektorer $\boldsymbol{b}$, der har længden $5\sqrt{13}$, og hvis projektion på $\boldsymbol{a}$ er $3\boldsymbol{a}$.

3. Bestem den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx .$$

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot 2^{-x} \quad , \quad x \in [0; 4] \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

5. Sandsynligheden p, for at en bestemt type elektronisk komponent stadig fungerer t døgn efter, at den blev installeret, antages at være givet ved

$$p = \mathrm{e}^{-0{,}0015t} \ .$$

Beregn sandsynligheden for, at komponenten stadig fungerer 500 døgn efter, at den blev installeret.

Ved komponentens medianlevetid forstås det tal T, der er bestemt ved, at sandsynligheden er $\frac{1}{2}$ for, at komponenten stadig fungerer T døgn efter, at den blev installeret.

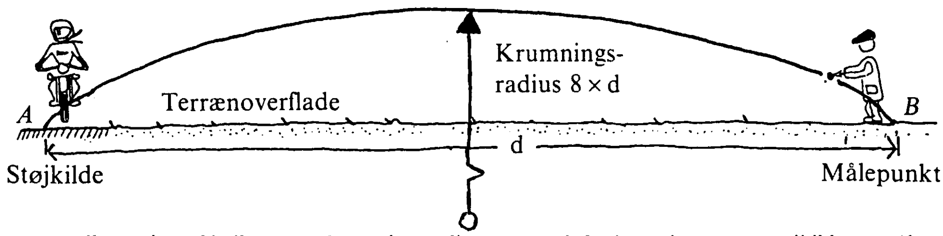
Beregn medianlevetiden for den pågældende komponent.

To af de nævnte komponenter sættes sammen til en enhed, der fungerer, netop når begge komponenter fungerer. Det antages, at de to komponenter fungerer uafhængigt af hinanden.

Beregn sandsynligheden for, at en sådan enhed stadig fungerer 500 døgn efter, at den blev installeret.

Vis, at enhedens medianlevetid er halvt så stor som en komponents medianlevetid.

6.



Figur 1. Illustration af lydbanernes krumningsradius = 8 × d. Lodret snit gennem støjkilde og målepunkt. Højdeforskellene er overdrevet på figuren.

Udklippet stammer fra »Støj fra motorsportsbaner«, Miljøstyrelsen 1988. Det viser, hvorledes lyd fra en støjkilde under visse meteorologiske forhold udbreder sig langs cirkelbuer.

Opsætning af en skærm mellem støjkilde A og målepunkt B kan give en væsentlig dæmpning af støjen, hvis skærmen effektivt bryder lydens bane fra støjkilde til målepunkt.

En skærm skal anbringes midt mellem støjkilde og målepunkt. Afstanden d mellem A og B er 250 meter.

Hvor høj skal skærmen mindst være, for at den viste lydbane ikke går hen over toppen af skærmen?

Beregn længden af cirkelbuen AB.

7. I et koordinatsystem er en ellipse $\mathscr{E}$ givet ved ligningen

$$x^2+16y^2-8x-64y+64=0 \ .$$

Tegn ellipsen $\mathscr{E}$.

En ret affinitet f har linjen med ligningen $y=4$ som affinitetsakse og forvandlingstal -2.

Tegn i koordinatsystemet punktmængden $f(\mathscr{E})$, og angiv en ligning for denne.

8. I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}t^2+1 \\ y &= 5\sin t \end{aligned} \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets førsteakse og til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–8 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989 **89-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK–FYSISK GREN

MATEMATIK II

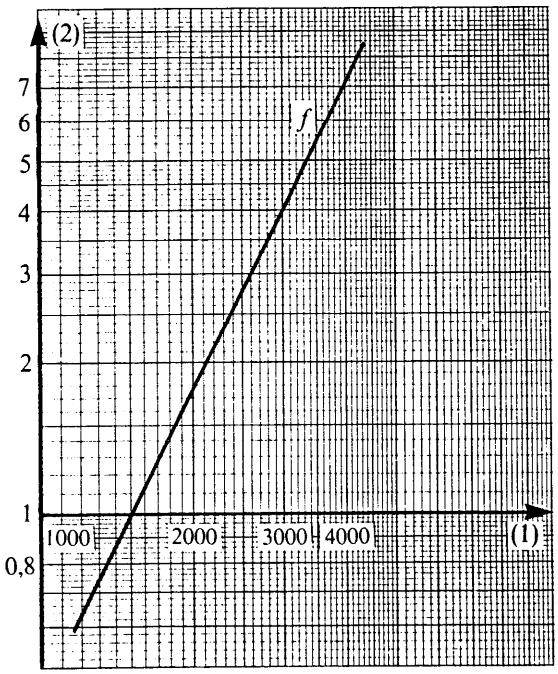
Torsdag den 24. august 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2.	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 6.	ca. 20 point
opgave 5	ca. 25 point

1.



Figuren viser grafen for en funktion f i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bestem en forskrift for f.

2. Et andengradspolynomium p er bestemt ved, at dets graf indeholder punkterne

$$A(1,1) \quad , \quad B(2,8) \quad \text{og} \quad C(3,11) \ .$$

Bestem en forskrift for p.

3. I mængden $M = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geqq 0\}$ er en komposition $*$ fastlagt ved

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Vis, at funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ er en isomorfi af $(M, +)$ på $(M, *)$.

Løs ligningen

$$(x * x) * 2 = 6 \ .$$

4. Dagbladet Information bragte den 20.–21. august 1988 en artikel om kighostevaccination. Her kunne man bl.a. læse følgende:

> En stor engelsk undersøgelse for nogle år siden viste, at hjerneskader i forbindelse med kighostevaccinen var 1 ud af 300.000 vaccinerede. Disse tal bruges i dag i WHO-sammenhæng.

Det antages derfor, at sandsynligheden er $\frac{1}{300\,000}$ for at få en hjerneskade i forbindelse med en kighostevaccination.
I Danmark fødes der for tiden ca. 60 000 børn om året.

Beregn sandsynligheden for, at der i forbindelse med 60 000 kighostevaccinationer ikke opstår hjerneskader.

I artiklen skrives endvidere følgende:

> **1 ud af 400.000**
> **Henrik Zoffmann oplyser, at det er »fantastisk få« børn, der herhjemme får varige hjerneskader. I den tre-årige periode 1985-87 blev der i Danmark foretaget ca. 400.000 kighostevaccinationer. I et tilfælde er der anmeldt vaccinationsskade, der kan have en mulig tidsmæssig sammenhæng med vaccinationen.**

Beregn sandsynligheden for, at der i forbindelse med 400 000 kighostevaccinationer opstår højst én hjerneskade, når det stadig antages, at sandsynligheden er $\frac{1}{300\,000}$ for at få en hjerneskade.

Beregn, hvor mange kighostevaccinationer man skal op på, for at sandsynligheden er under 5% for, at der i forbindelse med vaccinationerne ikke opstår nogen hjerneskade.

5. Bestem den løsning f til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2 , \qquad x, y \in \left]1; \infty\right[,$$

hvis graf går gennem punktet $A(3,2)$.

Bestem $\lim_{x \to \infty} f(x)$, og skitsér grafen for f.

Bestem en forskrift for funktionen f^{-1}, og angiv definitionsmængde og værdimængde for denne funktion.

Vis, at f^{-1} også er en løsning til den givne differentialligning.

6a. Når lys har passeret en vandoverflade og derefter går ned gennem vandet, vil intensiteten $I(x)$ af lyset aftage eksponentielt med den vejlængde x (målt i m), som lyset har tilbagelagt i vandet. Idet $I(0)$ betegner intensiteten umiddelbart under vandoverfladen, er forholdet mellem $I(x)$ og $I(0)$ givet ved

$$\frac{I(x)}{I(0)} = e^{-kx} ,$$

hvor k er en konstant, der afhænger af lysets farve. For rødt lys er $k = 0{,}29$, og for blåt lys er $k = 0{,}046$ (k angives i m^{-1}).

Med hvor mange procent er intensiteten af rødt lys faldet, når lyset er nået ned i en dybde af 5 meter, og

1) lysstrålerne går lodret ned gennem vandet?

2) lysstrålerne i vandet danner en vinkel på 30° med lodret?

Bestem den vejlængde, som rødt lys har tilbagelagt i vandet, når intensiteten er halveret.

Bestem den dybde, hvor intensiteten af rødt lys er 10% af intensiteten af blåt lys, når intensiteterne af de to farver lys er ens ved vandoverfladen, og lysstrålerne går lodret ned gennem vandet.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3(x-2)}{x(x+6)} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989 **89-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 22. august 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 25 point
opgave 6	ca. 20 point

1. I et koordinatsystem er givet et punkt $P(6,3)$ og en linje l med ligningen

$$y = \frac{2}{3}x + 5 \ .$$

Bestem en ligning for den linje, der går gennem P og er parallel med l.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem P og er vinkelret på l.

2. En spiller får ved kortgivning en hånd (13 kort), tilfældigt udtaget af et sædvanligt spil kort.

Beregn sandsynligheden for, at spilleren får en hånd uden esser.

Beregn sandsynligheden for, at spilleren får en hånd med netop 2 røde kort.

3. I et koordinatsystem har en cirkel centrum i punktet $C(5,2)$ og radius $\frac{5}{2}$.

Bestem en ligning for cirklen.

Cirklen skærer koordinatsystemets førsteakse i to punkter A og B, af hvilke A har den mindste førstekoordinat.

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Beregn vinkel C i trekant ABC.

4. Om en bestemt type ærteblomst vides, at sandsynligheden er 0,25 for, at farven på blomsten er rent hvid. I et bed udplantes 30 små planter af denne type ærteblomst.

Bestem sandsynligheden for, at

1) højst én af planterne giver rent hvide blomster.
2) netop halvdelen giver rent hvide blomster.
3) antallet af planter, der giver rent hvide blomster, er mindst 5 og højst 10.

Beregn det mest sandsynlige antal planter, der giver rent hvide blomster.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \quad , \quad x \in [-2; 4] \; .$$

Bestem monotoniforholdene for f.

Bestem værdimængden for f.

Tegn grafen for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(0, f(0))$.

Beregn

$$\int_0^1 f(x)dx \; .$$

6a. Dansk Standard 1051.1 giver regler for afprøvning af forskellige bygningsdeles modstandsevne mod brand. Bygningsdelene opvarmes i en speciel ovn, og temperaturen i ovnen skal stige i overensstemmelse med følgende formel:

$$T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1) \ ,$$

hvor

t er tiden i minutter,
T er ovntemperaturen i °C til tiden t, og
T_0 er ovntemperaturen i °C ved prøvens begyndelse ($t = 0$).

Grafen for temperaturstigningen $T - T_0$ som funktion af tiden t kaldes »standardbrandkurven«.

Skitsér »standardbrandkurven« for de første 360 minutter efter prøvens begyndelse.

Beregn, hvor lang tid der går, før temperaturen er steget med 1000°C.

Beregn det tidspunkt, hvor temperaturen stiger med en hastighed $\frac{dT}{dt} (= T')$ på 2°C i minuttet.

6b. Når et signal sendes gennem et kabel, vil det svækkes. Kaldes intensiteten af det udsendte signal for I_1 og intensiteten af det modtagne signal for I_2, er signaltabet D i kablet bestemt ved

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \ .$$

Signaltabet angives i enheden decibel (dB).
For ca. 25 år siden kunne man fremstille lyslederkabler, hvor intensiteten af det modtagne signal var 10% af intensiteten af det udsendte signal ($I_2 = 0{,}10 \cdot I_1$) i et kabel på 10 meter.

Beregn signaltabet i et sådant kabel på 10 meter.

I 1970 kunne man fremstille lyslederkabler, hvor signaltabet var 0,2 dB i et kabel på 10 meter.

Hvor mange procent udgjorde intensiteten af det modtagne signal af intensiteten af det udsendte signal i et sådant kabel på 10 meter?

I dag fremstilles lyslederkabler, hvor intensiteten af det modtagne signal er 1% af intensiteten af det udsendte signal i et kabel på 30 km. Det oplyses, at signaltabet i et kabel er proportionalt med kablets længde.

Hvor mange procent udgør intensiteten af det modtagne signal af intensiteten af det udsendte signal i et sådant lyslederkabel, når dets længde kun er 10 meter?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989 **89-8-11**

MATEMATISK LINJE

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK–FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 23. august 1989 kl. 9.00–13.00

Kun 6 af opgaverne 2–8 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 10 point
hver af opgaverne 2–8............ ca. 15 point

1. Løs uligheden

$$\sqrt{2x+6} < \tfrac{1}{3}x + \tfrac{7}{3} \ .$$

2. I et koordinatsystem er givet vektoren

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} .$$

Bestem koordinatsættet for hver af de vektorer $\boldsymbol{b}$, der har længden $5\sqrt{13}$, og hvis projektion på $\boldsymbol{a}$ er $3\boldsymbol{a}$.

3. Bestem den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx \ .$$

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot 2^{-x} \, , \quad x \in [0; 4] \, .$$

Bestem funktionens monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

5. Sandsynligheden p, for at en bestemt type elektronisk komponent stadig fungerer t døgn efter, at den blev installeret, antages at være givet ved

$$p = e^{-0{,}0015t} \, .$$

Beregn sandsynligheden for, at komponenten stadig fungerer 500 døgn efter, at den blev installeret.

Ved komponentens medianlevetid forstås det tal T, der er bestemt ved, at sandsynligheden er $\frac{1}{2}$ for, at komponenten stadig fungerer T døgn efter, at den blev installeret.

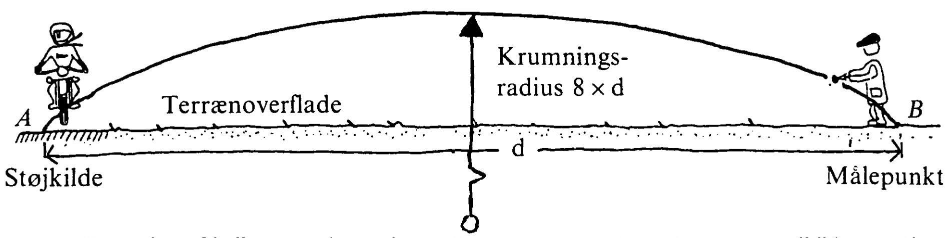
Beregn medianlevetiden for den pågældende komponent.

To af de nævnte komponenter sættes sammen til en enhed, der fungerer, netop når begge komponenter fungerer. Det antages, at de to komponenter fungerer uafhængigt af hinanden.

Beregn sandsynligheden for, at en sådan enhed stadig fungerer 500 døgn efter, at den blev installeret.

Vis, at enhedens medianlevetid er halvt så stor som en komponents medianlevetid.

6.



Figur 1. Illustration af lydbanernes krumningsradius = 8 × d. Lodret snit gennem støjkilde og målepunkt. Højdeforskellene er overdrevet på figuren.

Udklippet stammer fra »Støj fra motorsportsbaner«, Miljøstyrelsen 1988. Det viser, hvorledes lyd fra en støjkilde under visse meteorologiske forhold udbreder sig langs cirkelbuer.
Opsætning af en skærm mellem støjkilde A og målepunkt B kan give en væsentlig dæmpning af støjen, hvis skærmen effektivt bryder lydens bane fra støjkilde til målepunkt.
En skærm skal anbringes midt mellem støjkilde og målepunkt. Afstanden d mellem A og B er 250 meter.

Hvor høj skal skærmen mindst være, for at den viste lydbane ikke går hen over toppen af skærmen?

Beregn længden af cirkelbuen AB.

7. Berlingske Tidende skrev den 25. januar 1988 en artikel i anledning af kampagnen »Bøger i skolen, tak«. Udklippet stammer fra denne artikel.

Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i skolebogssalget i perioden 1980–86.

Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i skolebogssalget pr. elev i perioden 1980–86.

> **I gamle dage – nogle vil sige de gode gamle dage – fik nye elever i gymnasiet besked på at møde op på første skoledag med en *kuffert*. Mindre kunne ikke gøre det, når de udleverede bøger skulle fragtes hjem. Alt efter temperament så den nybagte 1. G'er i skræk eller forventning bogstakken på inspektors kontor vokse som en bønnestage.**
>
> **I dag kan det klares med en fjeldræv. Skolebøgernes antal er skrumpet i takt med, at bogkontoen har fået svindsot. På seks år – fra 1980 til 86 – er skolebogssalget gået ned med 44,3 procent. En del af nedgangen kan forklares ved et fald i elevtallet på 10 procent.**

8. I en trekant ABC er

$$\angle A = 43{,}6^\circ \quad \text{og} \quad |AC| = 31{,}4 \ .$$

Endvidere oplyses det, at vinkelhalveringslinjen for vinkel A har længden 18,7.

Beregn længden af siden BC.

Husk, at kun 6 af opgaverne 2–8 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989 **89-8-12**

MATEMATISK LINJE

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK–FYSISK GREN
MATEMATIK II

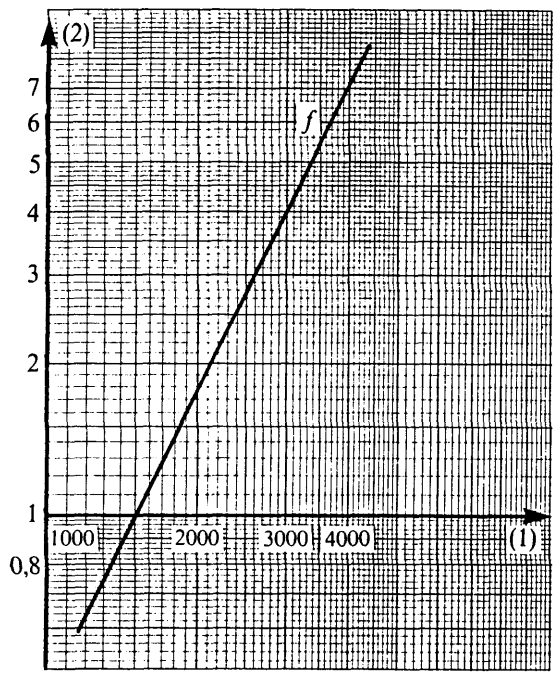
Torsdag den 24. august 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2. . . . . ca. 10 point
opgave 3 . . . . ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 6. . . . . ca. 20 point
opgave 5 . . . . ca. 25 point

1.



Figuren viser grafen for en funktion f i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bestem en forskrift for f.

2. Et andengradspolynomium p er bestemt ved, at dets graf indeholder punkterne

$$A(1,1) \quad , \quad B(2,8) \quad \text{og} \quad C(3,11) \; .$$

Bestem en forskrift for p.

3. I rummet er givet et koordinatsystem. En plan α indeholder punkterne

$$A(0,2,0) \quad , \quad B(2,5,0) \quad \text{og} \quad C(4,5,-1) \; .$$

Beregn vinkel A i trekant ABC.

Beregn afstanden fra punktet $P(1,2,3)$ til planen α.

4. Dagbladet Information bragte den 20.–21. august 1988 en artikel om kighostevaccination. Her kunne man bl.a. læse følgende:

> En stor engelsk undersøgelse for nogle år siden viste, at hjerneskader i forbindelse med kighostevaccinen var 1 ud af 300.000 vaccinerede. Disse tal bruges i dag i WHO-sammenhæng.

Det antages derfor, at sandsynligheden er $\frac{1}{300\,000}$ for at få en hjerneskade i forbindelse med en kighostevaccination.
I Danmark fødes der for tiden ca. 60 000 børn om året.

Beregn sandsynligheden for, at der i forbindelse med 60 000 kighostevaccinationer ikke opstår hjerneskader.

I artiklen skrives endvidere følgende:

> **1 ud af 400.000**
> **Henrik Zoffmann oplyser, at det er »fantastisk få« børn, der herhjemme får varige hjerneskader. I den tre-årige periode 1985-87 blev der i Danmark foretaget ca. 400.000 kighostevaccinationer. I et tilfælde er der anmeldt vaccinationsskade, der kan have en mulig tidsmæssig sammenhæng med vaccinationen.**

Beregn sandsynligheden for, at der i forbindelse med 400 000 kighostevaccinationer opstår højst én hjerneskade, når det stadig antages, at sandsynligheden er $\frac{1}{300\,000}$ for at få en hjerneskade.

Beregn, hvor mange kighostevaccinationer man skal op på, for at sandsynligheden er under 5% for, at der i forbindelse med vaccinationerne ikke opstår nogen hjerneskade.

5. Bestem den løsning f til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2 , \qquad x, y \in \left]1; \infty\right[,$$

hvis graf går gennem punktet $A(3,2)$.

Bestem $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, og skitsér grafen for f.

Bestem en forskrift for funktionen f^{-1}, og angiv definitionsmængde og værdimængde for denne funktion.

Vis, at f^{-1} også er en løsning til den givne differentialligning.

6a. Når lys har passeret en vandoverflade og derefter går ned gennem vandet, vil intensiteten $I(x)$ af lyset aftage eksponentielt med den vejlængde x (målt i m), som lyset har tilbagelagt i vandet. Idet $I(0)$ betegner intensiteten umiddelbart under vandoverfladen, er forholdet mellem $I(x)$ og $I(0)$ givet ved

$$\frac{I(x)}{I(0)} = e^{-kx} ,$$

hvor k er en konstant, der afhænger af lysets farve. For rødt lys er $k = 0{,}29$, og for blåt lys er $k = 0{,}046$ (k angives i m^{-1}).

Med hvor mange procent er intensiteten af rødt lys faldet, når lyset er nået ned i en dybde af 5 meter, og

1) lysstrålerne går lodret ned gennem vandet?

2) lysstrålerne i vandet danner en vinkel på 30° med lodret?

Bestem den vejlængde, som rødt lys har tilbagelagt i vandet, når intensiteten er halveret.

Bestem den dybde, hvor intensiteten af rødt lys er 10% af intensiteten af blåt lys, når intensiteterne af de to farver lys er ens ved vandoverfladen, og lysstrålerne går lodret ned gennem vandet.

6b. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3(x-2)}{x(x+6)} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1989

MATEMATISK LINJE

89-8-13

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 22. august 1989 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 25 point
opgave 6	ca. 20 point

1. I et koordinatsystem er givet et punkt $P(6,3)$ og en linje l med ligningen

$$y = \frac{2}{3}x + 5 \ .$$

Bestem en ligning for den linje, der går gennem P og er parallel med l.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem P og er vinkelret på l.

2. Ved tilberedning af en middagsret benyttes som fedtstof en blanding bestående af 60% smør og 40% vindruekerneolie. Smør indeholder 5% flerumættede fedtsyrer, og vindruekerneolie indeholder 74% flerumættede fedtsyrer.

Bestem procentdelen af flerumættede fedtsyrer i blandingen.

Man ønsker at hæve procentdelen af flerumættede fedtsyrer i blandingen til 50%.

Bestem den procentvise fordeling af smør og vindruekerneolie i en blanding, der opfylder dette.

3. I et koordinatsystem har en cirkel centrum i punktet $C(5,2)$ og radius $\frac{5}{2}$.

Bestem en ligning for cirklen.

Cirklen skærer koordinatsystemets førsteakse i to punkter A og B, af hvilke A har den mindste førstekoordinat.

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Beregn vinkel C i trekant ABC.

4. Om en bestemt type ærteblomst vides, at sandsynligheden er 0,25 for, at farven på blomsten er rent hvid. I et bed udplantes 30 små planter af denne type ærteblomst.

Bestem sandsynligheden for, at

1) højst én af planterne giver rent hvide blomster.
2) netop halvdelen giver rent hvide blomster.
3) antallet af planter, der giver rent hvide blomster, er mindst 5 og højst 10.

Beregn det mest sandsynlige antal planter, der giver rent hvide blomster.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \quad , \quad x \in [-2; 4] \ .$$

Bestem monotoniforholdene for f.

Bestem værdimængden for f.

Tegn grafen for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(0, f(0))$.

Beregn

$$\int_0^1 f(x)dx \ .$$

6a. Dansk Standard 1051.1 giver regler for afprøvning af forskellige bygningsdeles modstandsevne mod brand. Bygningsdelene opvarmes i en speciel ovn, og temperaturen i ovnen skal stige i overensstemmelse med følgende formel:

$$T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1) \ ,$$

hvor

t er tiden i minutter,
T er ovntemperaturen i °C til tiden t, og
T_0 er ovntemperaturen i °C ved prøvens begyndelse ($t = 0$).

Grafen for temperaturstigningen $T - T_0$ som funktion af tiden t kaldes »standardbrandkurven«.

Skitsér »standardbrandkurven« for de første 360 minutter efter prøvens begyndelse.

Beregn, hvor lang tid der går, før temperaturen er steget med 1000°C.

Beregn det tidspunkt, hvor temperaturen stiger med en hastighed $\frac{dT}{dt}$ $(= T')$ på 2°C i minuttet.

6b. Når et signal sendes gennem et kabel, vil det svækkes. Kaldes intensiteten af det udsendte signal for I_1 og intensiteten af det modtagne signal for I_2, er signaltabet D i kablet bestemt ved

$$D = 10 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) .$$

Signaltabet angives i enheden decibel (dB).
For ca. 25 år siden kunne man fremstille lyslederkabler, hvor intensiteten af det modtagne signal var 10% af intensiteten af det udsendte signal ($I_2 = 0{,}10 \cdot I_1$) i et kabel på 10 meter.

Beregn signaltabet i et sådant kabel på 10 meter.

I 1970 kunne man fremstille lyslederkabler, hvor signaltabet var 0,2 dB i et kabel på 10 meter.

Hvor mange procent udgjorde intensiteten af det modtagne signal af intensiteten af det udsendte signal i et sådant kabel på 10 meter?

I dag fremstilles lyslederkabler, hvor intensiteten af det modtagne signal er 1% af intensiteten af det udsendte signal i et kabel på 30 km. Det oplyses, at signaltabet i et kabel er proportionalt med kablets længde.

Hvor mange procent udgør intensiteten af det modtagne signal af intensiteten af det udsendte signal i et sådant lyslederkabel, når dets længde kun er 10 meter?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1990 **90-8-1**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Torsdag den 17. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2 og 5	ca. 15 point
opgave 3	ca. 20 point
opgave 4	ca. 25 point

1. I et sandsynlighedsfelt (U,P) er givet to hændelser A og B. Der gælder, at

$$P(A \setminus B) = 0{,}3 \ , \quad P(A \cap B) = 0{,}1 \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 0{,}8 \ .$$

Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(A) \ , \quad P(B) \quad \text{og} \quad P(A|B) \ .$$

2. Koncentrationen af et bestemt lægemiddel i en patients blod aftager eksponentielt med en halveringstid på 6 timer. Til tidspunktet $t = 0$ er koncentrationen 25 µg/ml.

Bestem en forskrift for koncentrationen (målt i µg/ml) som funktion af tiden t (målt i timer).

Med hvor mange procent aftager koncentrationen pr. time?

På hvilket tidspunkt er koncentrationen faldet til 1 µg/ml?

3. For ethvert tal a, hvor $a \neq 0$, er en parabel $\mathscr{P}_a$ bestemt ved

$$\mathscr{P}_a: \quad y = ax^2 + 2x + 1 \ .$$

Skitsér parablerne $\mathscr{P}_1$ og $\mathscr{P}_{-\frac{1}{2}}$ i samme koordinatsystem.

Bestem, udtrykt ved a, koordinatsættet til toppunktet for $\mathscr{P}_a$.

Vis, at dette toppunkt for enhver værdi af a ligger på linjen med ligningen

$$y = x + 1 \ .$$

En anden mængde af parabler er bestemt ved ligningen

$$y = x^2 + bx + 2 \ ,$$

hvor b er et tal.
Der findes en parabel, på hvilken alle disse parablers toppunkter ligger.

Bestem en ligning for denne parabel.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2e^{-x} - 5e^{-2x} \ .$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Gør rede for, at grafen for f har en vandret asymptote.

Tegn grafen for f.

Koordinatsystemets akser og grafen for f afgrænser i fjerde kvadrant en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

5a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - 15x^2 - 9x + 8} \ .$$

Bestem definitionsmængden for f, idet det oplyses, at $f(8) = 0$.

Gør rede for, at værdimængden for f er $[0; \infty[$.

5b. En funktion f er givet ved

$$f(x,y) = -6x + y + 13 \ .$$

Bestem minimum for f i mængden

$$M = \{(x,y) \mid x + y \leqq 19 \ \wedge \ x + 2y \geqq 18 \ \wedge \ 2x - y \geqq -4 \ \wedge \ 5x - y \leqq 35\} \ .$$

5c. Bestem til differentialligningen

$$f''(x) = x \cdot \cos x$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(\frac{\pi}{2}, 1)$ og i dette punkt har en tangent med hældningskoefficient $\frac{\pi}{2}$.

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1990 **90-8-2**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Fredag den 18. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–6 .... ca. 20 point

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+6} .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

2. Om to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ gælder, at

$$|\boldsymbol{a}| = 6 \ , \quad |\boldsymbol{b}| = 8 \quad \text{og} \quad \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 60^\circ \ .$$

Vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ udspænder et parallelogram.

Beregn arealet af dette parallelogram.

Beregn længden af hver af parallelogrammets diagonaler.

Beregn gradtallet for en af vinklerne mellem diagonalerne i parallelogrammet.

3. En persons overfladeareal afhænger af såvel vægt som højde for den pågældende. I medicinsk sammenhæng kan det have interesse med god tilnærmelse at kunne beregne overfladearealet ud fra de let målelige størrelser højde og vægt. Måles højden h i cm og vægten v i kg, kan overfladearealet, målt i cm^2, beregnes som

$$71{,}84 \cdot v^{0{,}425} \cdot h^{0{,}725} \; .$$

En 14-årig vejer 45 kg og er 150 cm høj. Året efter er vedkommende vokset til 160 cm og har samtidig øget sin vægt med 2,5 kg.

Hvor stor er den procentvise forøgelse af overfladearealet?

Bestem en forskrift for den funktion, der for en 160 cm høj person angiver overfladearealet som funktion af vægten.

Med hvor mange procent forøges overfladearealet for en sådan person, når vægten forøges med 5%?

4. En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y'' = (\ln 3)^2 \cdot y \; .$$

Bestem en forskrift for f, idet det oplyses, at $f(0) = 82$ og $f(1) = 30$.

Bestem mindsteværdien for f.

5. I et koordinatsystem bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t^2+2 \\ y &= t^2-4t+3 \end{aligned} \; , \quad t \in [-1;4] \; .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets førsteakse.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter på banekurven, hvori hastighedsvektoren er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn banekurven.

Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven, hvori hastighedsvektoren er vinkelret på accelerationsvektoren.

6. I planen er givet et koordinatsystem. En afbildning f er bestemt ved

$$f:(x,y) \rightarrow \left(\tfrac{5}{13}x-\tfrac{12}{13}y+4,\ \tfrac{12}{13}x+\tfrac{5}{13}y+2\right) .$$

Bestem billedet af hvert af punkterne $P(1,0)$ og $O(0,0)$ ved denne afbildning.

Afbildningen er sammensat af en drejning i positiv omløbsretning om koordinatsystemets begyndelsespunkt efterfulgt af en parallelforskydning efter en vektor $\boldsymbol{a}$.

Bestem et gradtal for drejningsvinklen samt koordinatsættet til $\boldsymbol{a}$.

En ellipse $\mathscr{E}$ har ligningen

$$\frac{(x-1)^2}{9}+y^2=1 .$$

Tegn $\mathscr{E}$ og $f(\mathscr{E})$ i koordinatsystemet.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1990 **90-8-3**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Onsdag den 16. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

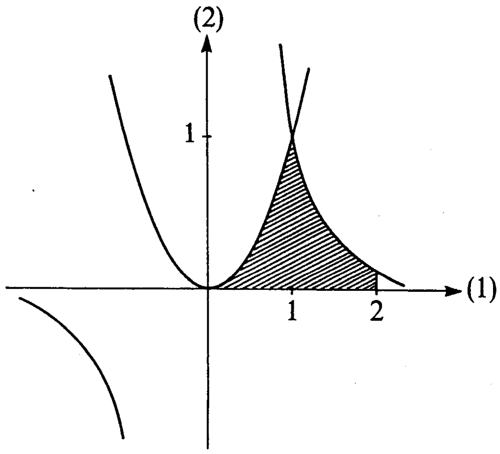
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 6 . . . . ca. 15 point
opgave 5 . . . . ca. 25 point

1. Figuren viser en skitse af graferne for funktionerne f og g, der er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = x^{-3} .$$

Beregn arealet af det skraverede område.



2. Et radioaktivt stof omdannes. Med $f(t)$ betegnes den mængde af det radioaktive stof, der er tilbage til tiden t. Der gælder, at

$$f(t) = 5{,}0 \cdot e^{-0{,}267 \cdot t} , \quad t \geqq 0 ,$$

hvor $f(t)$ måles i gram og t i år.

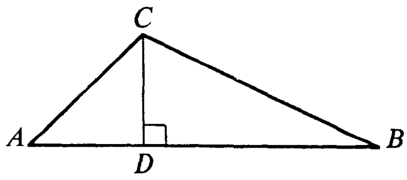
Hvor mange procent af stoffet er tilbage efter 3 år?

Bestem halveringstiden for stoffet.

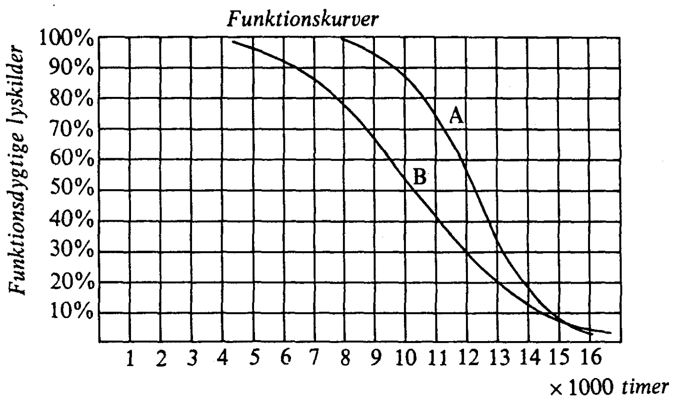
Hvor lang tid går der, før 75% af stoffet er omdannet?

3. Figuren viser en trekant ABC, hvor $|CD| = 5{,}2$, $\angle A = 44{,}3°$ og $\angle B = 26{,}1°$.

Beregn siderne i trekant ABC.



4.



Figuren viser funktionskurver for lysstofrør. Nedenstående tabel er udarbejdet på grundlag af figuren.

Tid t i timer	5000	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000
Procentdel af lysstofrør af type B, der stadig fungerer efter t timer	96	92	86	78	67	54	41	30	20	12	7

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver det antal timer, et lysstofrør af type B kan fungere. Om sandsynlighedsfordelingen for X kan man ved hjælp af tabellen f.eks. se, at

$$P(X \leqq 10000) = 46\% \ .$$

Gør rede for, at X med tilnærmelse er normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for denne normalfordeling.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{18x}{x^2+4}, \quad x \in [-6; 6] \ .$$

Bestem funktionens fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Vis, at funktionen F bestemt ved

$$F(x) = 9\ln(x^2+4)$$

er en stamfunktion til f.

Bestem til f den stamfunktion, hvis graf går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

6a. I et koordinatsystem er en parabel bestemt ved

$$y = x^2 - 8x + 19 \ .$$

Tegn parablen.

En linje l skærer parablen i dens toppunkt og i punktet $A(6,7)$.

Bestem en ligning for linjen l.

Linjen l og parablens tangent i A danner en spids vinkel.

Beregn gradtallet for denne vinkel.

6b. I et koordinatsystem er to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ givet ved

$$\boldsymbol{a}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} .$$

Bestem vinklen mellem vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

Bestem tallet t, således at $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ står vinkelret på $\boldsymbol{a}$.

Bestem de tal t, for hvilke $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}| = 5$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-4

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Torsdag den 17. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2 og 5	ca. 15 point
opgave 3	ca. 20 point
opgave 4	ca. 25 point

1. I et sandsynlighedsfelt (U,P) er givet to hændelser A og B. Der gælder, at

$$P(A \setminus B) = 0{,}3 \ , \quad P(A \cap B) = 0{,}1 \quad \text{og} \quad P(A \cup B) = 0{,}8 \ .$$

Bestem hver af sandsynlighederne

$$P(A) \ , \quad P(B) \quad \text{og} \quad P(A|B) \ .$$

2. Koncentrationen af et bestemt lægemiddel i en patients blod aftager eksponentielt med en halveringstid på 6 timer. Til tidspunktet $t = 0$ er koncentrationen 25 µg/ml.

Bestem en forskrift for koncentrationen (målt i µg/ml) som funktion af tiden t (målt i timer).

Med hvor mange procent aftager koncentrationen pr. time?

På hvilket tidspunkt er koncentrationen faldet til 1 µg/ml?

3. For ethvert tal a, hvor $a \neq 0$, er en parabel $\mathscr{P}_a$ bestemt ved

$$\mathscr{P}_a: \quad y = ax^2 + 2x + 1 \ .$$

Skitsér parablerne $\mathscr{P}_1$ og $\mathscr{P}_{-\frac{1}{2}}$ i samme koordinatsystem.

Bestem, udtrykt ved a, koordinatsættet til toppunktet for $\mathscr{P}_a$.

Vis, at dette toppunkt for enhver værdi af a ligger på linjen med ligningen

$$y = x + 1 \ .$$

En anden mængde af parabler er bestemt ved ligningen

$$y = x^2 + bx + 2 \ ,$$

hvor b er et tal.
Der findes en parabel, på hvilken alle disse parablers toppunkter ligger.

Bestem en ligning for denne parabel.

4. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2e^{-x} - 5e^{-2x} \ .$$

Undersøg f med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Gør rede for, at grafen for f har en vandret asymptote.

Tegn grafen for f.

Koordinatsystemets akser og grafen for f afgrænser i fjerde kvadrant en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

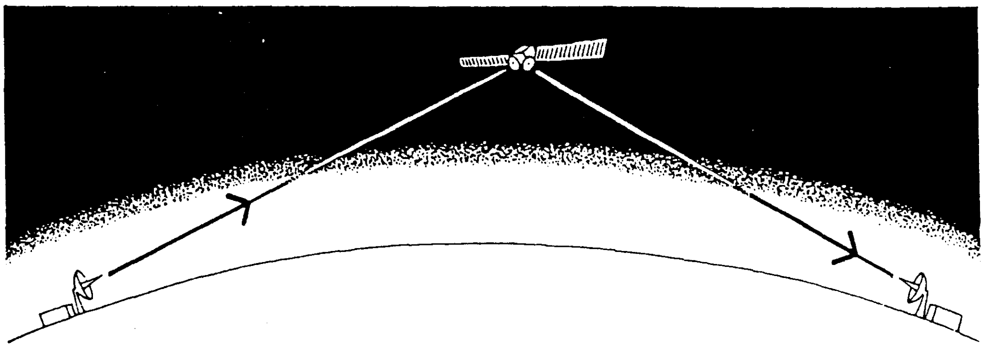
5a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - 15x^2 - 9x + 8} \ .$$

Bestem definitionsmængden for f, idet det oplyses, at $f(8) = 0$.

Gør rede for, at værdimængden for f er $[0; \infty[$.

5b.

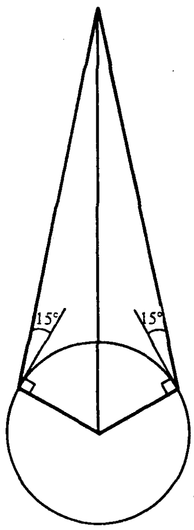


Kilde: Helle og Henrik Stub: Sådan bruger vi rummet, Haase 1982.

Ovenstående figur viser to parabolantenner, der er rettet mod en kommunikationssatellit.
Figuren til højre viser en geometrisk model af situationen i det tilfælde, hvor retningen fra antenne til satellit danner en vinkel på 15° med vandret, og hvor satellittens afstand fra jordens centrum er 42200 km. Jordens radius sættes til 6370 km.

Beregn afstanden mellem satellitten og en af parabolantennerne.

Beregn afstanden langs jordoverfladen mellem parabolantennerne.



(Størrelsesforholdene er ikke korrekte)

5c. Bestem til differentialligningen

$$f''(x) = x \cdot \cos x$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(\frac{\pi}{2}, 1)$ og i dette punkt har en tangent med hældningskoefficient $\frac{\pi}{2}$.

Husk, at kun 2 af opgaverne 5a, 5b og 5c må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-5

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Fredag den 18. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1–6 .... ca. 20 point

1. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+6} \ .$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f.

2. I et koordinatsystem i rummet er en linje l givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R} \ ,$$

og en plan α er givet ved ligningen

$$2x+3y-z=6 \ .$$

Vis, at linjen l ligger i planen α.

En linje m ligger i planen α og står vinkelret på l i punktet $A(-1, 1, -5)$.

Bestem en parameterfremstilling for linjen m.

Bestem en ligning for den plan, der indeholder m og står vinkelret på l.

3. En persons overfladeareal afhænger af såvel vægt som højde for den pågældende. I medicinsk sammenhæng kan det have interesse med god tilnærmelse at kunne beregne overfladearealet ud fra de let målelige størrelser højde og vægt. Måles højden h i cm og vægten v i kg, kan overfladearealet, målt i cm^2, beregnes som

$$71{,}84 \cdot v^{0{,}425} \cdot h^{0{,}725} \ .$$

En 14-årig vejer 45 kg og er 150 cm høj. Året efter er vedkommende vokset til 160 cm og har samtidig øget sin vægt med 2,5 kg.

Hvor stor er den procentvise forøgelse af overfladearealet?

Bestem en forskrift for den funktion, der for en 160 cm høj person angiver overfladearealet som funktion af vægten.

Med hvor mange procent forøges overfladearealet for en sådan person, når vægten forøges med 5%?

4. En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y'' = (\ln 3)^2 \cdot y \ .$$

Bestem en forskrift for f, idet det oplyses, at $f(0) = 82$ og $f(1) = 30$.

Bestem mindsteværdien for f.

5. I et koordinatsystem bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t^2+2 \\ y &= t^2-4t+3 \end{aligned} \ , \quad t \in [-1;4] \ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets førsteakse.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter på banekurven, hvori hastighedsvektoren er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn banekurven.

Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven, hvori hastighedsvektoren er vinkelret på accelerationsvektoren.

6.

Otte ud af ti kører for hurtigt

Overskriften er fra en artikel i Berlingske Tidende (13/8 1988), der handler om, at danskerne kører for hurtigt på motorveje.
På tilfældig måde udvælges 50 danske bilister, der har kørt på motorvej. Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver, hvor mange af de 50 der har kørt for hurtigt på motorvej.

Beregn middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(X \geqq 40)$.

Bestem sandsynligheden for, at der blandt 500 tilfældigt udvalgte danske bilister, der har kørt på motorvej, er mindst 400, der har kørt for hurtigt på motorvej.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-6

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Onsdag den 16. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

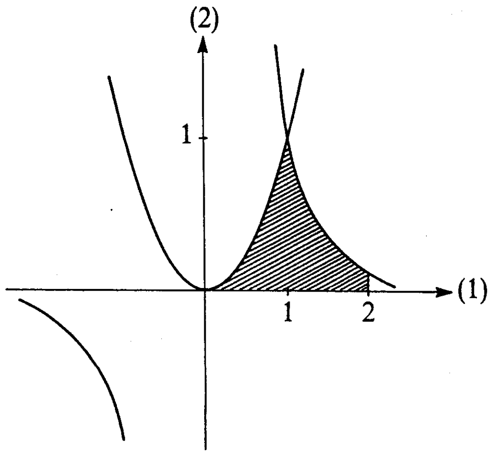
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 6 . . . . ca. 15 point
opgave 5 . . . . ca. 25 point

1. Figuren viser en skitse af graferne for funktionerne f og g, der er bestemt ved

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = x^{-3} \ .$$

Beregn arealet af det skraverede område.



2. Et radioaktivt stof omdannes. Med $f(t)$ betegnes den mængde af det radioaktive stof, der er tilbage til tiden t. Der gælder, at

$$f(t) = 5{,}0 \cdot e^{-0{,}267 \cdot t} \ , \quad t \geqq 0 \ ,$$

hvor $f(t)$ måles i gram og t i år.

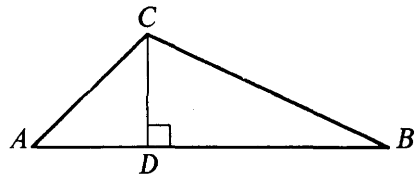
Hvor mange procent af stoffet er tilbage efter 3 år?

Bestem halveringstiden for stoffet.

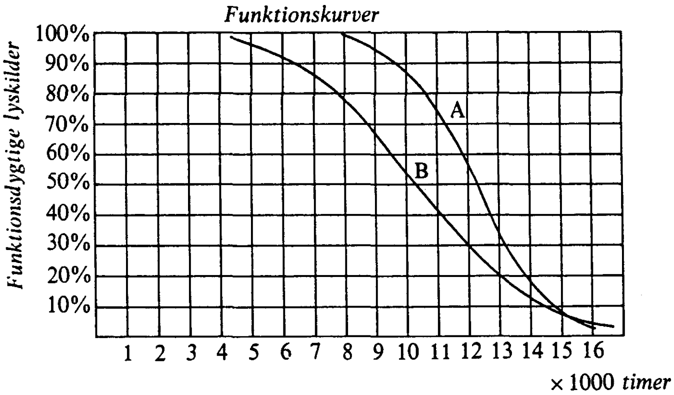
Hvor lang tid går der, før 75% af stoffet er omdannet?

3. Figuren viser en trekant ABC, hvor
$|CD| = 5{,}2$, $\angle A = 44{,}3°$ og $\angle B = 26{,}1°$.

Beregn siderne i trekant ABC.



4.



Figuren viser funktionskurver for lysstofrør. Nedenstående tabel er udarbejdet på grundlag af figuren.

Tid t i timer	5000	6000	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000	14000	15000
Procentdel af lysstofrør af type B, der stadig fungerer efter t timer	96	92	86	78	67	54	41	30	20	12	7

Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver det antal timer, et lysstofrør af type B kan fungere. Om sandsynlighedsfordelingen for X kan man ved hjælp af tabellen f.eks. se, at

$$P(X \leqq 10000) = 46\% \ .$$

Gør rede for, at X med tilnærmelse er normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for denne normalfordeling.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{18x}{x^2+4} \ , \quad x \in [-6; 6] \ .$$

Bestem funktionens fortegn, monotoniforhold og værdimængde.

Tegn grafen for f.

Vis, at funktionen F bestemt ved

$$F(x) = 9\ln(x^2+4)$$

er en stamfunktion til f.

Bestem til f den stamfunktion, hvis graf går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

6a. I et koordinatsystem er en parabel bestemt ved

$$y = x^2 - 8x + 19 \ .$$

Tegn parablen.

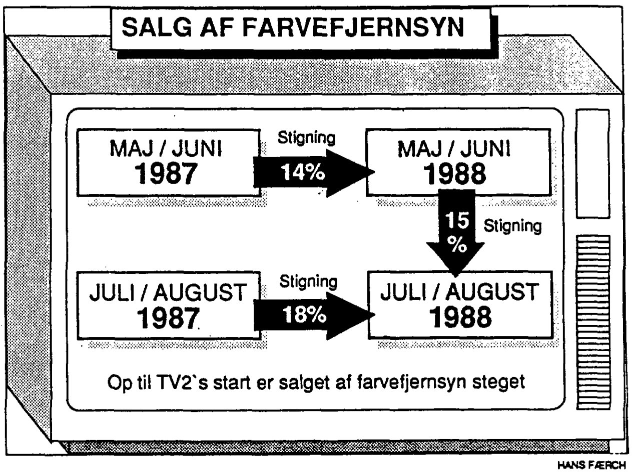
En linje l skærer parablen i dens toppunkt og i punktet $A(6,7)$.

Bestem en ligning for linjen l.

Linjen l og parablens tangent i A danner en spids vinkel.

Beregn gradtallet for denne vinkel.

6b. Nedenstående udklip stammer fra Berlingske Tidende den 12. oktober 1988.



Salget af farve-tv og video er steget markant i månederne, hvor danskerne drejede antennerne mod EM i fodbold, OL i Seoul og TV2 i Odense.

Beregn den gennemsnitlige månedlige procentvise stigning i salget af farvefjernsyn i perioden fra maj/juni 1987 til maj/juni 1988.

Beregn den procentvise stigning i salget af farvefjernsyn fra maj/juni 1987 til juli/august 1988.

Beregn den procentvise stigning i salget af farvefjernsyn fra maj/juni 1987 til juli/august 1987.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1990 **90-8-8**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 22. august 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 5	ca. 25 point

1. I et koordinatsystem i planen er en linje l bestemt ved

$$l: \quad 2x+5y+16=0 \ .$$

En cirkel med centrum i punktet $P(-1,3)$ har linjen l som tangent.

Bestem en ligning for cirklen.

2. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=\sin x \ , \quad x\in[0;2\pi]$$
$$g(x)=\sin^2 x \ , \quad x\in[0;2\pi] \ .$$

Skitsér graferne for de to funktioner i et koordinatsystem.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq\pi \ \wedge \ \sin^2 x\leqq y\leqq \sin x\} \ .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af M.

3. I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ givet ved ligningen

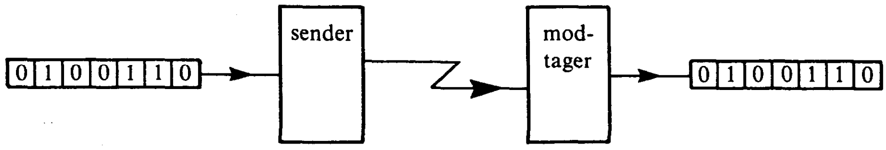
$$y = x^2 - 2x - 1 \ .$$

Ved en ret affinitet med linjen med ligningen $x = 3$ som affinitetsakse og forvandlingstal 2 afbildes $\mathscr{P}$ på en parabel $\mathscr{P}_1$.

Tegn parablerne $\mathscr{P}$ og $\mathscr{P}_1$.

Bestem en ligning for $\mathscr{P}_1$.

4.



Overførsel af data i et kommunikationssystem foregår ved transmission af koder.
Figuren illustrerer et kommunikationssystem, hvor de afsendte og modtagne koder er blokke af længde 7 bestående af tegnene 0 og 1. Figuren viser en korrekt transmission af blokken 0100110.
Der forekommer imidlertid fejl i systemet, som bevirker, at tegnet 0 undertiden modtages som tegnet 1 og omvendt.
Sandsynligheden er 0,90 for, at et tegn transmitteres korrekt. Det, at ét tegn transmitteres korrekt, er uafhængigt af, om de øvrige tegn i blokken transmitteres korrekt.

Bestem sandsynligheden for, at det for en blok af længde 7 gælder, at

1) alle tegn transmitteres korrekt.

2) mindst seks tegn transmitteres korrekt.

3) højst fire tegn transmitteres korrekt.

4) alle tegn transmitteres forkert.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+1)\,e^{-2x} \ .$$

Undersøg funktionen med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Det oplyses, at $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Tegn grafen for f, og bestem værdimængden for f.

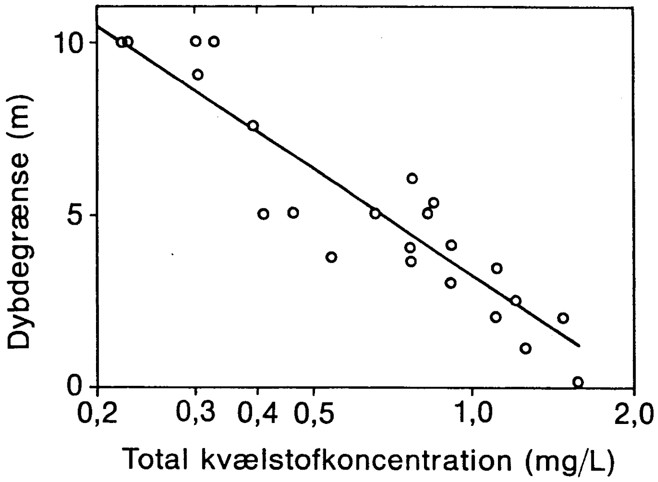
Bestem en ligning for grafens tangent t i punktet $P(0, f(0))$.

Vis, at tangenten t er den blandt grafens tangenter, hvis hældningskoefficient er mindst.

Beregn den eksakte værdi af

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \ .$$

6a. Nedenstående udklip er fra en artikel i tidsskriftet »Vand & Miljø« 5/1989 om modeller for marine bundplanters dybdegrænser. Dybdegrænsen er den største vanddybde, hvor planten findes.



Udklippet viser dybdegrænsen for visse typer makroalger som funktion af den totale kvælstofkoncentration i vandet. Førsteaksen er en logaritmisk skala.

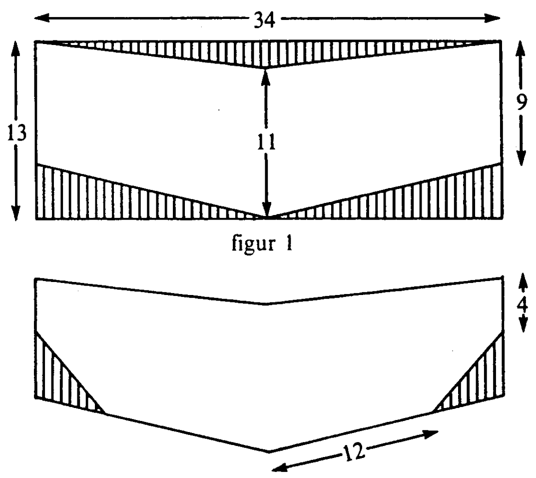
Bestem en forskrift for den funktion f, hvis graf er vist i udklippet, idet det oplyses, at $f(0{,}3) = 8{,}6$ og $f(0{,}5) = 6{,}3$.

Med hvor mange meter ændres dybdegrænsen for makroalgerne, når kvælstofkoncentrationen ændres med en faktor 3?

Hvor stor skal kvælstofkoncentrationen være, for at makroalgerne ikke kan leve i vandet?

6b. I tidsskriftet »Signalposten« september 1989 kan man finde en opskrift på, hvordan man fremstiller en såkaldt banerømmer til et modeltog.
En plan blikplade på 13 × 34 mm klippes til som vist på figur 1, idet de skraverede dele fjernes.
Derefter klippes yderligere to hjørner af som vist på figur 2. Den færdigklippede plade udgør en ottekant, hvor to sider har længden 4 mm og to andre sider længden 12 mm.

Beregn længden af de øvrige sider i ottekanten.



figur 1

figur 2

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1990 **90-8-9**

MATEMATISK LINJE

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Torsdag den 23. august 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

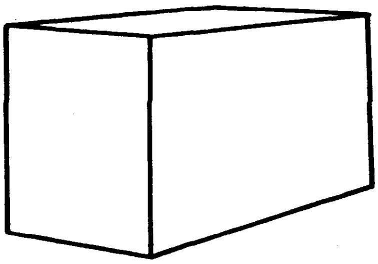
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–6 .... ca. 20 point

1. En funktion f er løsning til differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = 3x \cdot \frac{y^2+4}{y} \ , \quad y > 0 \ ,$$
og $f(0) = 1$.
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.
Bestem en forskrift for f.
Bestem værdimængden for f.

2. For ethvert positivt tal a er en funktion f givet ved
$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - a\cos x \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$
Bestem for $a = \frac{1}{4}$ monotoniforholdene for f.
Bestem for $a = 1$ monotoniforholdene for f.
Bestem de værdier af tallet a, for hvilke f er voksende.

3. En klods skal være fire gange så lang, som den er bred. Klodsens rumfang skal være 200 cm^3, og dens overfladeareal skal være mindst muligt.

Bestem, hvilken bredde, længde og højde klodsen da skal have.



4. En ellipse er givet ved ligningen

$$25x^2 - 250x + 9y^2 - 90y + 625 = 0 \ .$$

Bestem ellipsens halvakser og koordinatsættet til dens centrum.

Tegn ellipsen.

Linjen med ligningen

$$5x + y - 15 = 0$$

skærer ellipsen i to punkter.

Beregn koordinatsættet til hvert af disse punkter.

5. I et koordinatsystem er to kurver givet ved ligningerne

$$y = \frac{27}{x} \quad \text{og} \quad y = 8\sqrt{x} \ .$$

Beregn koordinatsættet til kurvernes skæringspunkt, og tegn kurverne.

De to kurver og linjen med ligningen $x = 4$ afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

Beregn dette areal.

Når M drejes 360° om førsteaksen, fremkommer et omdrejningslegeme.

Beregn rumfanget af dette omdrejningslegeme.

6. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er for ethvert tal t givet et punkt P_t, således at

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestem en ligning for den linje l, som P_t gennemløber, når t gennemløber $\mathbb{R}$.

Bestem tallet t, således at $\overrightarrow{OP_t}$ er vinkelret på linjen l.

En vektor $\boldsymbol{v}$ har koordinatsættet $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestem tallet t, således at $\overrightarrow{OP_t}$ er parallel med $\boldsymbol{v}$.

Bestem tallet t, således at projektionen af $\overrightarrow{OP_t}$ på $\boldsymbol{v}$ er $2\boldsymbol{v}$.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1990 **90-8-10**

MATEMATISK LINJE

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 21. august 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 6 .... ca. 15 point
opgave 5 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,2)$ og $B(7,5)$.

   Bestem en ligning for den linje l, som står vinkelret på linjen gennem A og B og går gennem midtpunktet af linjestykket AB.

   Bestem en ligning for den cirkel, der har punktet A som centrum og linjen l som tangent.

2. Trykket i jordens atmosfære aftager med højden over havoverfladen. Tabellen nedenfor angiver en række sammenhørende værdier af højden (målt i 1000 fod) og trykket (målt i millibar).

Højde (1000 fod)	5	10	18	24	30	34	40
Tryk (millibar)	850	700	500	400	300	250	200

   Gør rede for, at trykket med tilnærmelse aftager eksponentielt med højden.

   Bestem en forskrift for en eksponentielt aftagende funktion, der beskriver, hvorledes trykket aftager med højden.

   Med hvor mange procent falder trykket, når højden øges med 2 tusinde fod?

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}}, \quad x > 0 .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(9, f(9))$.

Bestem gradtallet for en af de vinkler, som tangenten danner med koordinatsystemets førsteakse.

4. Ved en masseproduktion af en bestemt vare er erfaringsmæssigt 5% af de producerede enheder defekte. Der foretages hver dag en kvalitetskontrol ved udtagning af en stikprøve på 20 enheder.
I det følgende antages det, at 5% af de producerede enheder er defekte.

Bestem sandsynligheden for, at der i en stikprøve på 20 enheder er

1) netop én defekt enhed.

2) mere end én defekt enhed.

Beregn sandsynligheden for, at der 3 på hinanden følgende dage ikke forekommer defekte enheder i de udtagne stikprøver.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 , \quad x \in [-1;2] .$$

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen.

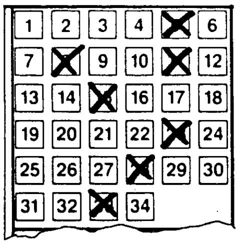
Tegn grafen for f.

Bestem værdimængden for f.

Grafen for f og linjen med ligningen $y = 2$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

6a.



Figuren viser et spillefelt fra en Lotto-kupon. Man udfylder et spillefelt ved at afkrydse 7 af feltets 34 tal.

På hvor mange måder kan man udfylde et spillefelt?

På hvor mange måder kan man udfylde et spillefelt, så 3 af de 7 tal er encifrede og 4 er tocifrede?

På hvor mange måder kan man udfylde et spillefelt, så de 7 tal enten alle er lige, eller alle er ulige?

6b. I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$P(2,3)\ ,\quad Q(6,5)\quad \text{og}\quad S(3,-3)\ .$$

Vektorerne $\overrightarrow{PQ}$ og $\overrightarrow{PS}$ udspænder parallelogrammet $PQRS$.

Bestem koordinatsættet til punktet R.

Beregn afstanden mellem siderne PQ og SR i parallelogrammet.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-11

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK I

Onsdag den 22. august 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 5	ca. 25 point

1. I et koordinatsystem i planen er en linje l bestemt ved

$$l:\quad 2x+5y+16=0\ .$$

En cirkel med centrum i punktet $P(-1,3)$ har linjen l som tangent.

Bestem en ligning for cirklen.

2. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x)=\sin x\quad,\quad x\in[0;2\pi]$$
$$g(x)=\sin^2 x\quad,\quad x\in[0;2\pi]\ .$$

Skitsér graferne for de to funktioner i et koordinatsystem.

En punktmængde M er bestemt ved

$$\{(x,y)\,|\,0\leqq x\leqq\pi\ \wedge\ \sin^2 x\leqq y\leqq\sin x\}\ .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af M.

3. I et koordinatsystem i rummet er givet et punkt $P(5,4,3)$ og en plan α med ligningen

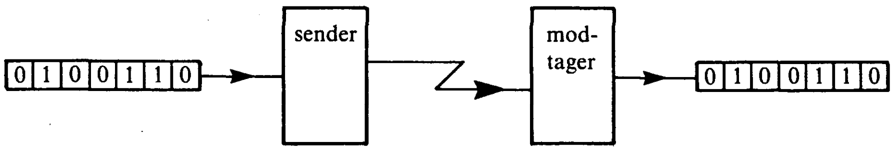
$$2x+2y-z=9 \ .$$

Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet P på planen α.

En anden plan β er parallel med planen α, og punktet P har samme afstand til β som til α.

Bestem en ligning for planen β.

4.



Overførsel af data i et kommunikationssystem foregår ved transmission af koder.
Figuren illustrerer et kommunikationssystem, hvor de afsendte og modtagne koder er blokke af længde 7 bestående af tegnene 0 og 1. Figuren viser en korrekt transmission af blokken 0100110.
Der forekommer imidlertid fejl i systemet, som bevirker, at tegnet 0 undertiden modtages som tegnet 1 og omvendt.
Sandsynligheden er 0,90 for, at et tegn transmitteres korrekt. Det, at ét tegn transmitteres korrekt, er uafhængigt af, om de øvrige tegn i blokken transmitteres korrekt.

Bestem sandsynligheden for, at det for en blok af længde 7 gælder, at

1) alle tegn transmitteres korrekt.

2) mindst seks tegn transmitteres korrekt.

3) højst fire tegn transmitteres korrekt.

4) alle tegn transmitteres forkert.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x+1)\,e^{-2x} \ .$$

Undersøg funktionen med hensyn til nulpunkter, fortegn og monotoniforhold.

Det oplyses, at $f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Tegn grafen for f, og bestem værdimængden for f.

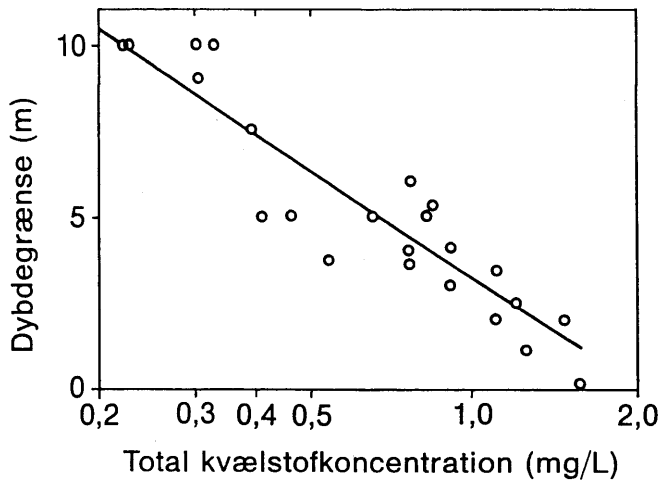
Bestem en ligning for grafens tangent t i punktet $P(0, f(0))$.

Vis, at tangenten t er den blandt grafens tangenter, hvis hældningskoefficient er mindst.

Beregn den eksakte værdi af

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \ .$$

6a. Nedenstående udklip er fra en artikel i tidsskriftet »Vand & Miljø« 5/1989 om modeller for marine bundplanters dybdegrænser. Dybdegrænsen er den største vanddybde, hvor planten findes.



Udklippet viser dybdegrænsen for visse typer makroalger som funktion af den totale kvælstofkoncentration i vandet. Førsteaksen er en logaritmisk skala.

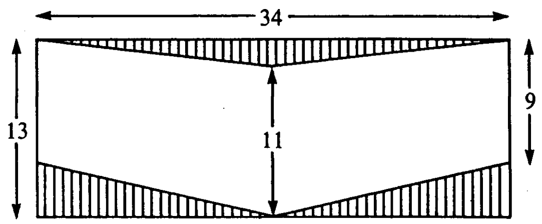
Bestem en forskrift for den funktion f, hvis graf er vist i udklippet, idet det oplyses, at $f(0{,}3) = 8{,}6$ og $f(0{,}5) = 6{,}3$.

Med hvor mange meter ændres dybdegrænsen for makroalgerne, når kvælstofkoncentrationen ændres med en faktor 3?

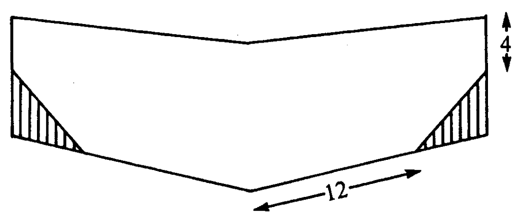
Hvor stor skal kvælstofkoncentrationen være, for at makroalgerne ikke kan leve i vandet?

6b. I tidsskriftet »Signalposten« september 1989 kan man finde en opskrift på, hvordan man fremstiller en såkaldt banerømmer til et modeltog.
En plan blikplade på 13×34 mm klippes til som vist på figur 1, idet de skraverede dele fjernes.
Derefter klippes yderligere to hjørner af som vist på figur 2. Den færdigklippede plade udgør en ottekant, hvor to sider har længden 4 mm og to andre sider længden 12 mm.

Beregn længden af de øvrige sider i ottekanten.



figur 1



figur 2

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-12

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN
MATEMATIK II

Torsdag den 23. august 1990 kl. 9.00–13.00

Kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:
hver af opgaverne 1–6 . . . . ca. 20 point

1. En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3x \cdot \frac{y^2+4}{y} \ , \quad y > 0 \ ,$$

og $f(0) = 1$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Bestem en forskrift for f.

Bestem værdimængden for f.

2. For ethvert positivt tal a er en funktion f givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - a\cos x \ , \quad x \in [0; 2\pi] \ .$$

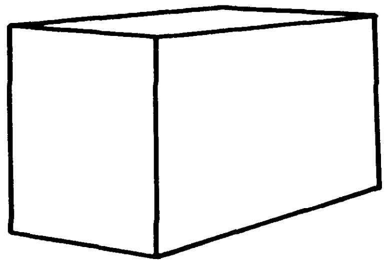
Bestem for $a = \frac{1}{4}$ monotoniforholdene for f.

Bestem for $a = 1$ monotoniforholdene for f.

Bestem de værdier af tallet a, for hvilke f er voksende.

3. En klods skal være fire gange så lang, som den er bred. Klodsens rumfang skal være 200 cm^3, og dens overfladeareal skal være mindst muligt.

Bestem, hvilken bredde, længde og højde klodsen da skal have.



4. For en bestemt arbejdsproces gælder, at arbejdstiden for en udførelse af processen er normalfordelt med middelværdi 10,0 minutter og spredning 0,8 minutter.

Bestem sandsynligheden for, at arbejdstiden for en udførelse af processen er mindre end 9,0 minutter.

Bestem sandsynligheden for, at arbejdstiden for en udførelse af processen er større end 10,5 minutter.

Bestem tallet k, således at sandsynligheden er 80% for, at arbejdstiden for en udførelse af processen ligger i intervallet $[10{,}0 - k \,;\, 10{,}0 + k]$.

5. I et koordinatsystem er to kurver givet ved ligningerne

$$y = \frac{27}{x} \quad \text{og} \quad y = 8\sqrt{x} \; .$$

Beregn koordinatsættet til kurvernes skæringspunkt, og tegn kurverne.

De to kurver og linjen med ligningen $x = 4$ afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

Beregn dette areal.

Når M drejes 360° om førsteaksen, fremkommer et omdrejningslegeme.

Beregn rumfanget af dette omdrejningslegeme.

6. I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er for ethvert tal t givet et punkt P_t, således at

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Bestem en ligning for den linje l, som P_t gennemløber, når t gennemløber R.

Bestem tallet t, således at $\overrightarrow{OP_t}$ er vinkelret på linjen l.

En vektor $\boldsymbol{v}$ har koordinatsættet $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestem tallet t, således at $\overrightarrow{OP_t}$ er parallel med $\boldsymbol{v}$.

Bestem tallet t, således at projektionen af $\overrightarrow{OP_t}$ på $\boldsymbol{v}$ er $2\boldsymbol{v}$.

Husk, at kun 5 af opgaverne 1–6 må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1990

MATEMATISK LINJE

90-8-13

Udkast til ny bekendtgørelse

SAMFUNDSFAGLIG GREN
NATURFAGLIG GREN
MUSIKFAGLIG GREN

MATEMATIK

Tirsdag den 21. august 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3, 4 og 6 .... ca. 15 point
opgave 5 .... ca. 25 point

1. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(1,2)$ og $B(7,5)$.

   Bestem en ligning for den linje l, som står vinkelret på linjen gennem A og B og går gennem midtpunktet af linjestykket AB.

   Bestem en ligning for den cirkel, der har punktet A som centrum og linjen l som tangent.

2. Trykket i jordens atmosfære aftager med højden over havoverfladen. Tabellen nedenfor angiver en række sammenhørende værdier af højden (målt i 1000 fod) og trykket (målt i millibar).

Højde (1000 fod)	5	10	18	24	30	34	40
Tryk (millibar)	850	700	500	400	300	250	200

   Gør rede for, at trykket med tilnærmelse aftager eksponentielt med højden.

   Bestem en forskrift for en eksponentielt aftagende funktion, der beskriver, hvorledes trykket aftager med højden.

   Med hvor mange procent falder trykket, når højden øges med 2 tusinde fod?

3. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}} \; , \quad x > 0 \; .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P(9, f(9))$.

Bestem gradtallet for en af de vinkler, som tangenten danner med koordinatsystemets førsteakse.

4. Ved en masseproduktion af en bestemt vare er erfaringsmæssigt 5% af de producerede enheder defekte. Der foretages hver dag en kvalitetskontrol ved udtagning af en stikprøve på 20 enheder.
I det følgende antages det, at 5% af de producerede enheder er defekte.

Bestem sandsynligheden for, at der i en stikprøve på 20 enheder er

1) netop én defekt enhed.

2) mere end én defekt enhed.

Beregn sandsynligheden for, at der 3 på hinanden følgende dage ikke forekommer defekte enheder i de udtagne stikprøver.

5. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \; , \quad x \in [-1;2] \; .$$

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for funktionen.

Tegn grafen for f.

Bestem værdimængden for f.

Grafen for f og linjen med ligningen $y = 2$ afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

6a. I statistikker over beskæftigelsen på arbejdsmarkedet i Danmark indgår arbejdsløshedsprocenten, der angiver, hvor mange procent af arbejdsstyrken der er arbejdsløse.
I januar 1988 var 11,0% af kvinderne og 8,3% af mændene i arbejdsstyrken arbejdsløse.
Kvinderne udgjorde 46,1% af arbejdsstyrken.

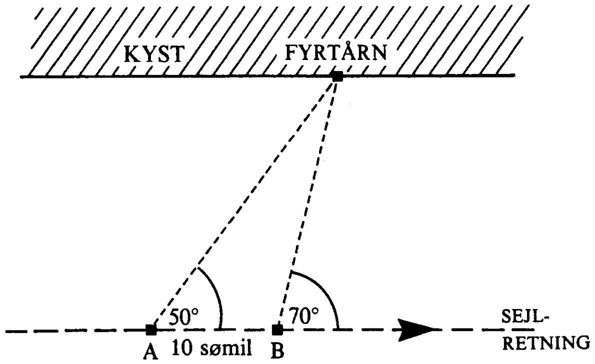
Beregn arbejdsløshedsprocenten for januar 1988.

I juli 1988 var arbejdsløshedsprocenten faldet til 7,7%. På dette tidspunkt var 9,5% af kvinderne arbejdsløse, og kvinderne udgjorde fortsat 46,1% af arbejdsstyrken.

Hvor mange procent af mændene var arbejdsløse i juli 1988?

Hvor mange procent af de arbejdsløse i juli 1988 var kvinder?

6b.



Et skib sejler parallelt med en kyst som vist på figuren.
På positionen A bestemmes vinklen mellem skibets sejlretning og sigtelinjen til et fyrtårn på kysten til 50°.
På positionen B, hvis afstand fra A er 10 sømil, bestemmes den tilsvarende vinkel til 70°.

Hvor langt er skibet fra fyrtårnet på positionen B?

Hvor langt er skibet fra kysten?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1991

MATEMATISK LINJE

91-8-7

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK I

Tirsdag den 14. maj 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4........	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 5	ca. 25 point

1. Løs uligheden

$$x-2<\frac{1}{x-2}\,.$$

2. I et koordinatsystem er en ret linje l bestemt ved, at den går gennem punktet $Q(3,2)$ og har retningsvektor $\boldsymbol{r}(5,1)$.
Et punkt P har koordinatsættet $(11,15)$. Projektionen af punktet P på linjen l betegnes med R.

Bestem vinklen mellem $\overrightarrow{QP}$ og $\overrightarrow{QR}$.

Bestem koordinatsættet til punktet R.

3. Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx}=y(x^2+1)$$

den løsning, hvis graf indeholder punktet $A(0,-2)$, og den løsning, hvis graf indeholder punktet $B(-2,0)$.

4. I et koordinatsystem har en kurve parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x = t^2+4t+4 \\ y = t^2-4t+3 \end{matrix}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori kurven skærer koordinatsystemets akser, og til hvert af de punkter, hvori kurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

5. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{x}\,(x-3)^2 .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,4)$.

Bestem funktionens monotoniforhold og ekstrema.

Tegn grafen for f.

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet P.

6a. Når en patient har fået indsprøjtet et lægemiddel i en vene, vil koncentrationen c af lægemidlet i patientens blod være en funktion af tiden t. For mange lægemidler gælder, at

$$c(t) = f(t)+g(t) ,$$

hvor f og g er eksponentielt aftagende funktioner.
Tabellen nedenfor viser for et sådant lægemiddel koncentrationen i patientens blod på forskellige tidspunkter efter indsprøjtningen.

tid t efter indsprøjtningen (målt i timer)	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	4,0	8,0	12,0	18,0
koncentration $c(t)$ i blodet (målt i mg/L)	13,7	9,9	7,4	5,0	3,4	2,8	2,0	1,4	0,85

Ca. 2 timer efter indsprøjtningen indtræder den såkaldte eliminationsfase, og i denne fase er $f(t)$ forsvindende lille sammenlignet med $g(t)$, dvs. $c(t)$ og $g(t)$ er tilnærmelsesvis ens, når $t > 2$.

Bestem på baggrund heraf en forskrift for g.

Udfyld herefter en tabel som nedenstående.

t	0,2	0,4	0,6	1,0
$f(t)$				

Bestem halveringstiden for hver af funktionerne f og g.

Bestem en forskrift for c.

6b. I et koordinatsystem i rummet er en plan α og to linjer l og m bestemt ved

$$\alpha: \quad 2x+3y+z-16=0$$

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathrm{R}\ .$$

Linjen l skærer planen α i et punkt A.

Bestem koordinatsættet til punktet A.

Linjerne l og m skærer hinanden i et punkt C.

Bestem koordinatsættet til punktet C.

Linjerne l og m udspænder en plan β.

Bestem en ligning for planen β.

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem α og β.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1991

MATEMATISK LINJE

91-8-8

Udkast til ny bekendtgørelse

MATEMATISK-FYSISK GREN

MATEMATIK II

Onsdag den 15. maj 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2 og 3.	ca. 15 point
hver af opgaverne 4, 5 og 6.	ca. 20 point

1. To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 + x - 1 \ .$$

Skitsér graferne for f og g.

De to grafer afgrænser et område, der har et areal.

Beregn dette areal.

2. I en orienteret plan er givet en vektor $\boldsymbol{a}$ med længden 4.
En firkant $ABCD$ er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{a} \ , \quad \overrightarrow{AD} = \hat{\boldsymbol{a}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = \tfrac{5}{3}(\boldsymbol{a} + \hat{\boldsymbol{a}}) \ .$$

Beregn længden af siden CD.

Beregn vinkel D.

3. Postvæsenet meddelte i juni 1990, at 97% af de afsendte breve er fremme dagen efter afsendelsen. Det antages derfor, at sandsynligheden er 0,97 for, at et brev er fremme dagen efter afsendelsen. Med X betegnes den stokastiske variabel, der angiver, hvor mange af 20 afsendte breve der er fremme dagen efter afsendelsen.

   Beregn hver af sandsynlighederne

$$P(X = 20) \quad \text{og} \quad P(X \geqq 19) \ .$$

   Beregn middelværdi og spredning for X.

4. Nedenstående tabel viser for en række forskellige pattedyr sammenhørende værdier af legemsvægt M (body mass) i kg og iltforbrug V (total O_2 consumption) i liter O_2 pr. time.

Animal	Body mass, M (kg)	Total O_2 consumption, V (liter O_2/h)
Mouse	0,025	0,041
Rat	0,290	0,25
Dog	11,7	3,87
Man	70	14,76
Horse	650	71,10
Elephant	3 833	268,00

Kilde: Knut Schmidt-Nielsen: Animal Physiology.

   Indtegn sammenhørende værdier af $\log M$ og $\log V$ i et koordinatsystem.

   Gør rede for, at $\log V$ med god tilnærmelse er en lineær funktion af $\log M$, og bestem en forskrift for denne lineære funktion.

   Bestem en forskrift for den funktion, der angiver iltforbruget V som funktion af legemsvægten M.

   Ved intensiteten af et pattedyrs stofskifte forstås dets iltforbrug pr. kg legemsvægt.

   Gør rede for, at intensiteten af et pattedyrs stofskifte er mindre, jo større dyret er.

5. For ethvert tal $a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ er en funktion f bestemt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - a}{x^2 - 4x - 5} \ .$$

   Bestem definitionsmængden for f, og bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

   Vis, at funktionen f for ethvert $a \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ har lokalt ekstremum for $x = 2$, og bestem de værdier af tallet a, for hvilke dette ekstremum er et lokalt minimum.

6a. En funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+5} & \text{for } x \leqq -2 \\ x^2+4 & \text{for } x > -2 \end{cases} .$$

Skitsér grafen for f.

Bestem den eksakte værdi af $\displaystyle\int_{-5}^{2} f(x)\,dx$.

Bestem $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{2} f(x)\,dx$.

6b. Ved salget af en bestemt mærkevare kan antallet af vareenheder solgt indtil tidspunktet t beskrives ved en funktion f af tiden t, hvor t angives i år.
Det antages, at funktionen f opfylder følgende tre betingelser:

1) $f(0) = 600$ og $f'(0) = 333$,

2) grafen for f er en logistisk kurve,

3) den øvre grænse for antallet af solgte vareenheder er 3000, dvs. $\lim_{t \to \infty} f(t) = 3000$.

Bestem en forskrift for f.

Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden i antallet af solgte vareenheder er størst.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1990 **90-8-16**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 9. maj 1990 kl. 9.00–13.00

Til opgavesættet hører et bilag.

Af opgaverne 5a og 5b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 15 point
hver af opgaverne 3, 4 og 5	ca. 20 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{x} + 3\cos x$.

b) Beregn afstanden fra punktet $P(4,-3)$ til linjen med ligningen $y = 2x+1$.

c) En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 30$ og sandsynlighedsparameter $p = 0{,}4$.

Bestem $P(X \leqq 15)$.

d) En population vokser med 2% pr. time.

Med hvor mange procent vokser populationen på et døgn?

e) Løs ligningen $\sin x = 0{,}55$, $x \in [0; 2\pi]$.

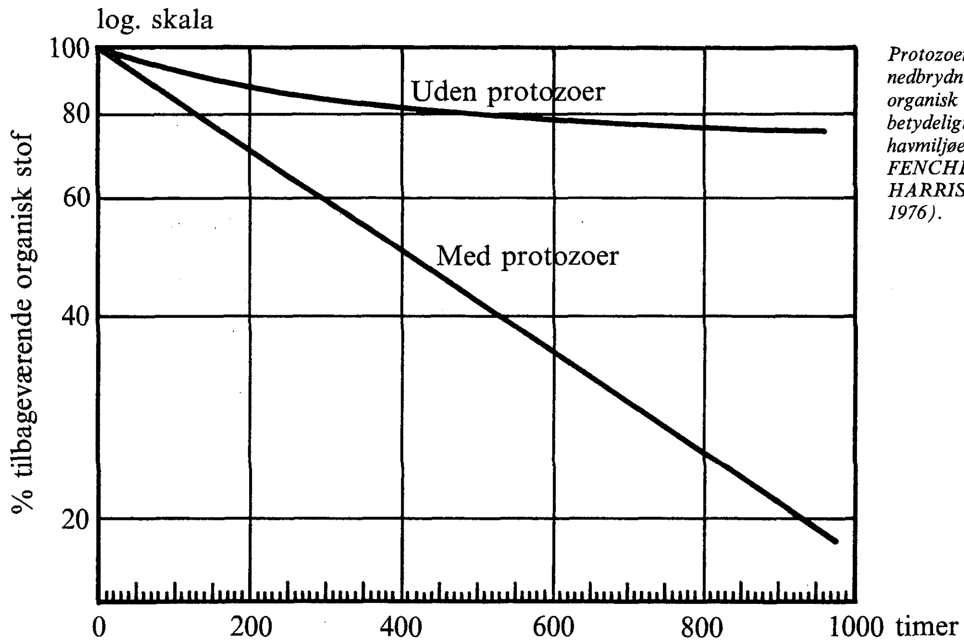
Opgave 2 (ca. 15 point) Om en normalfordelt stokastisk variabel X gælder, at

$$P(X \leqq 210) = 40\% \quad \text{og} \quad P(X \geqq 220) = 10\% \ .$$

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(210 \leqq X \leqq 215)$.

Opgave 3 (ca. 20 point) Nedenstående udklip stammer fra tidsskriftet Miljø & Teknologi 3/1989 og viser en model for nedbrydning af organisk stof i havmiljøet med og uden tilstedeværelse af protozoer (encellede mikroorganismer, der lever af at »græsse« på bakterier).



Protozoer fremmer nedbrydningen af organisk materiale betydeligt i f.eks. havmiljøet (efter FENCHEL og HARRISON, 1976).

Gør rede for, at med protozoer i vandet er procentdelen af tilbageværende organisk stof en eksponentielt aftagende funktion af tiden, og bestem en forskrift for denne funktion.

Bestem halveringstiden for procentdelen af tilbageværende organisk stof, når der er protozoer i vandet.

Beregn, hvor stor en procentdel organisk stof der er tilbage efter 700 timer, når der er protozoer i vandet.

Beregn, hvor lang tid der skal gå, før der er 85% organisk stof tilbage, når der er protozoer i vandet, og benyt dette til at bestemme den tilsvarende tid, når der ikke er protozoer i vandet.

Opgave 4 (ca. 20 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \ .$$

Bestem monotoniintervaller og lokale ekstrema for f.

Bestem nulpunkter og fortegn for f.

Tegn grafen for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(-2, f(-2))$.

Opgave 5a (ca. 20 point)

I et koordinatsystem går en linje gennem punkterne $A(1,1)$ og $B(2,4)$.

Bestem en ligning for linjen.

En cirkel har centrum i punktet $C(6,4)$ og går gennem A.

Bestem en ligning for cirklen.

Cirklen har ud over A endnu et punkt fælles med linjen.

Beregn koordinatsættet til dette punkt.

Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet A.

Opgave 5b (ca. 20 point)

I en trekant ABC er M midtpunktet af siden AC. Den linje, der går gennem M og står vinkelret på siden AC, skærer siden AB i punktet P.
Det oplyses, at

$$|AM| = 12 \ , \quad |MP| = 5 \quad \text{og} \quad |PB| = 8 \ .$$

Beregn sider og vinkler i trekant ABC.

Husk, at kun én af opgaverne 5a og 5b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1990 **90-8-17**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Mandag den 20. august 1990 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En linje l har ligningen $y = \frac{1}{3}x - 6$.

Bestem gradtallet for en af de vinkler, som linjen danner med førsteaksen.

b) Løs uligheden $x^2 - 4x + 3 < 0$.

c) Sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X fremgår af nedenstående tabel.

t	1	3	6
$P(X = t)$	0,2	0,5	0,3

Beregn middelværdien for X.

d) Udfør divisionen $(x^3 - 2x^2 + 4x - 5) : (x - 1)$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

Et lån på 100 000 kr., der forrentes med 1,5% pr. måned, tilbagebetales med lige store månedlige ydelser på 5000 kr.

Hvor mange måneder vil der gå, før lånet er tilbagebetalt?

Opgave 3 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4x^{1,5} - 15x + 32 \ , \quad x \in [1;9] \ .$$

Bestem monotoniforholdene for f.

Tegn grafen for f, og bestem værdimængden for f.

Opgave 4 (ca. 15 point)

En cirkel har centrum i $P(-109, 413)$ og radius 66 .

Bestem en ligning for cirklen.

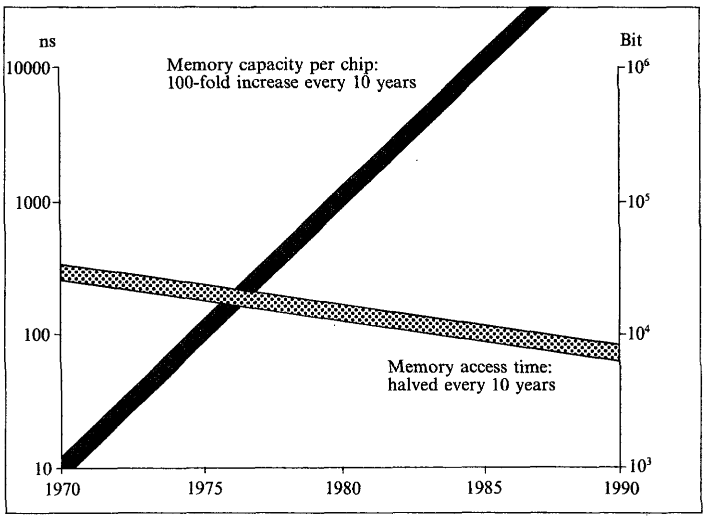
En linje har ligningen $y = -3x + 294$.

Bestem afstanden fra P til linjen.

Gør rede for, at cirklen og linjen har netop 2 fællespunkter.

Opgave 5 (ca. 20 point)

Illustrationen nedenfor stammer fra publikationen "How a Computer is developed and produced", udgivet af Siemens A/G i 1989.



Figuren viser dels, hvorledes hukommelseskapaciteten for en chip er vokset i årene efter 1970, og dels hvorledes tilgangstiden er aftaget i samme periode. Det fremgår, at på 10 år er hukommelseskapaciteten for en chip vokset med en faktor 100, mens tilgangstiden er halveret.

Med hvor mange procent er hukommelseskapaciteten for en chip vokset pr. år?

Hvor stor har fordoblingstiden for hukommelseskapaciteten været?

Bestem en forskrift for den funktion, der beskriver, hvorledes tilgangstiden for en chip har udviklet sig siden 1970, hvor den var 300 ns (nanosekunder).

I hvilket år vil tilgangstiden komme ned på 40 ns, hvis den viste udvikling fortsætter uændret?

Opgave 6a (ca. 15 point)

En trekant har sidelængderne 52, 55 og 83.

Beregn trekantens vinkler og dens areal.

Opgave 6b (ca. 15 point)

Et bestemt år havde 15% af virksomhederne inden for en stor branche fald i omsætningen.
På tilfældig måde udtages 10 af branchens virksomheder til en undersøgelse.

Bestem sandsynligheden for, at

1) højst 2 af de 10 virksomheder havde fald i omsætningen det pågældende år.

2) mindst 2 af de 10 virksomheder havde fald i omsætningen det pågældende år.

Hvor mange virksomheder skal man mindst udtage til en undersøgelse, når sandsynligheden skal være mindst 0,80 for, at der blandt de udtagne findes mindst 2 virksomheder, som det pågældende år havde fald i omsætningen?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1991 **91-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Tirsdag den 14. maj 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point) To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -x^2+2x+3 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2-1 \ .$$

Graferne for de to funktioner afgrænser et område, der har et areal.

Beregn dette areal.

Opgave 2 (ca. 15 point) I et koordinatsystem i planen er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Beregn vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem den værdi af tallet t, for hvilken $\vec{a}+t\vec{b}$ er vinkelret på $\vec{a}$.

Bestem den værdi af tallet t, for hvilken længden af vektoren $\vec{a}+t\vec{b}$ er mindst mulig.

Opgave 3 (ca. 15 point)

Bestem den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_1^2 x(x^2-1)^5 dx \quad \text{og} \quad \int_1^2 x^4 \ln x \, dx \ .$$

Opgave 4 (ca. 20 point)

I et koordinatsystem i rummet er en kugle givet ved ligningen

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z-11=0 \ .$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

En linje med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \ ,$$

skærer kuglen i to punkter.

Bestem koordinatsættet til hvert af disse punkter.

Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen i ét af de to punkter.

Bestem en ligning for den plan, der indeholder linjen og kuglens centrum.

Opgave 5 (ca. 20 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (x+\tfrac{1}{2})e^{-2y}$$

den løsning f, hvis graf går gennem punktet $O(0,0)$.

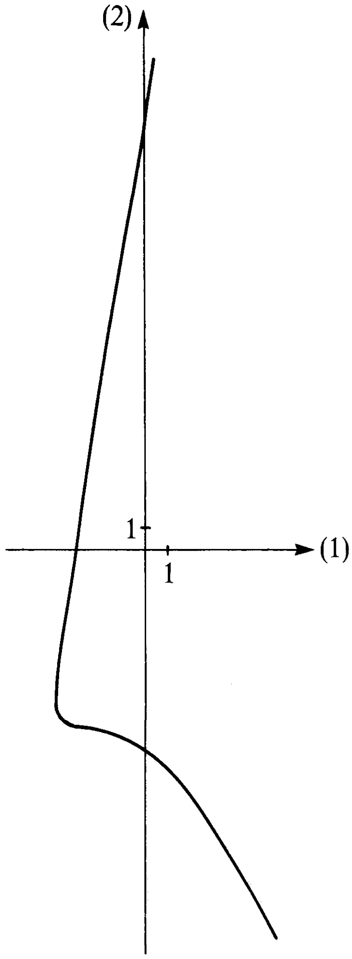
Skitsér grafen for f, og bestem værdimængden for f.

Opgave 6a Figuren viser en skitse af kurven bestemt ved parameterfremstillingen
(ca. 15 point)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t - 3 \\ t^3 - 8 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R} .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser og til hvert af de punkter, hvori kurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter på kurven, hvori tangenten er parallel med vektoren $\binom{4}{-3}$.



Opgave 6b En plante vokser i en potte. Plantens vægt y (målt i kg) er en funktion af tiden t (målt i uger). I en model for plantens vækst går man ud fra, at y opfylder differentialligningen
(ca. 15 point)

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}004 \cdot y \cdot (12{,}5 - y) .$$

Til tiden $t = 0$ er plantens vægt 1,0 kg.

Bestem en forskrift for y som funktion af t.

Bestem den øvre grænse for plantens vægt.

Hvor mange uger skal planten vokse, for at dens vægt øges fra 1,0 kg til 90% af den øvre grænse?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1991 **91-8-3**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 24. maj 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En linje l går gennem punkterne $A(3,2)$ og $B(-18,5)$.

Bestem en ligning for l.

b) Omsætningen i en virksomhed stiger ét år med 40% og det følgende år med 10%.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i omsætningen i denne 2-års periode.

c) Løs uligheden $\log x \leqq 1{,}2$.

d) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sin(3x^2+1)$.

e) En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 8$ og sandsynlighedsparameter $p = 0{,}35$.

Bestem $P(X \geqq 4)$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

Et forældrepar opretter ved deres datters fødsel en opsparingskonto for hende og indsætter 2000 kr. De følgende år indsættes der hvert år 2000 kr., indtil der i alt er indbetalt 12 gange. Renten er 6% p.a. i hele perioden.

Hvor stort et beløb står der på kontoen umiddelbart efter den 12. indbetaling?

Beløbet bliver herefter stående på kontoen og forrentes fortsat med 6% p.a.

Hvor stort et beløb står der på kontoen umiddelbart efter datterens 21 års fødselsdag?

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje l bestemt ved

$$\mathscr{P}:\ y = -\tfrac{1}{4}x^2 + x + 3$$
$$l:\ y = -\tfrac{1}{3}x + 3\ .$$

Tegn parablen og linjen i koordinatsystemet.

Parablen og linjen skærer hinanden i to punkter.

Beregn koordinatsættet til hvert af disse punkter.

Beregn afstanden fra parablens toppunkt til linjen l.

Opgave 4 (ca. 15 point)

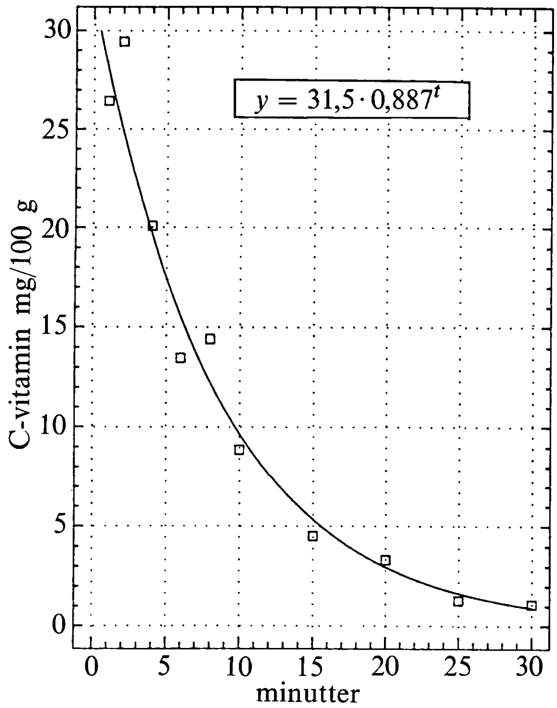
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3}\ , \quad x \in \mathrm{R}\ .$$

Bestem $f'(x)$.

Gør rede for, at størsteværdien for f er $\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Opgave 5
(ca. 20 point)



C-vitaminindhold som funktion af blancheringstiden.

Kilde: *Tidsskrift for Planteavl*, *nr.* 3, 1990.

Når spinat blancheres (kommes i kogende vand), nedbrydes C-vitaminindholdet i spinaten.
Forsøg har vist, at C-vitaminindholdet y, målt i mg/100 g, kan beskrives ved

$$y = 31{,}5 \cdot 0{,}887^t \ ,$$

hvor t er blancheringstiden, målt i minutter.

Bestem halveringstiden for C-vitaminindholdet.

Hvor lang må blancheringstiden højst være, hvis man ønsker et C-vitaminindhold på mindst 20 mg/100 g?

Nitratindholdet i spinaten aftager også ved den omtalte blanchering. Nitratindholdet z, målt i mg/100 g, kan beskrives ved

$$z = 20{,}3 + 61{,}4 \cdot 0{,}884^t \ ,$$

hvor t er blancheringstiden, målt i minutter.

Bestem nitratindholdet i spinaten før blanchering.

Spinaten blancheres, indtil nitratindholdet er kommet ned på 60 mg/100 g.

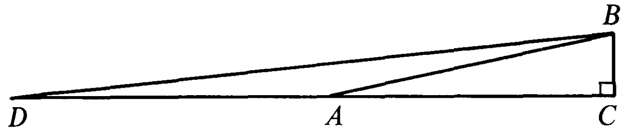
Med hvor mange procent falder C-vitaminindholdet ved denne blanchering?

Bestem den hastighed $\frac{dz}{dt}$, hvormed nitratindholdet ændrer sig til tidspunktet $t = 2$.

I forskriften for z som funktion af t indgår konstanten 20,3.

Hvilken oplysning giver denne konstant om nitratindholdet i spinat ved blanchering?

Opgave 6a
(ca. 15 point)



På figuren er

$$|DC| = 12{,}0 \ , \ \angle D = 5{,}1^\circ \quad \text{og} \quad \angle BAC = 10{,}8^\circ \ .$$

Beregn længden af siderne i trekant ABC.

Beregn længden af medianen m_c i trekant ABC.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Ved en produktion af maskinfremstillede bolte har 14,0% af boltene en længde på højst 12,45 cm og 87,2% en længde på højst 12,60 cm.
Længden af en bolt antages at være normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for denne fordeling.

Hvor mange procent af boltene har en længde mellem 12,50 cm og 12,55 cm?

Fra produktionen udtages på tilfældig måde 10 bolte.

Beregn sandsynligheden for, at ingen af disse har en længde mellem 12,50 cm og 12,55 cm.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1991 **91-8-2**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 21. august 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
opgave 2	ca. 20 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5.	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point) For en voksende og kontinuert funktion f kendes de funktionsværdier, der er angivet i tabellen nedenfor.

x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	1,3	1,4	1,6	1,9	2,3

Beregn som tilnærmelse til

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

den trapezsum, der gør brug af alle tabellens oplysninger.

Vis, at

$$3 < \int_1^3 f(x)\,dx < 4 \ .$$

Opgave 2 (ca. 20 point)

I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. For ethvert tal t er to punkter P og Q bestemt ved

$$P(1+t,t) \quad \text{og} \quad Q(2-3t,4-t) \ .$$

For $t=1$ udspænder vektorerne $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OQ}$ et parallelogram.

Bestem arealet af dette parallelogram.

Bestem de tal t, for hvilke $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$.

Vis, at $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OQ}$ ikke er parallelle for nogen værdi af tallet t.

En vektor $\vec{v}$ har koordinatsættet $\binom{1}{2}$.

Bestem tallet t, således at projektionen af $\overrightarrow{OP}$ på $\vec{v}$ er $2\vec{v}$.

Opgave 3 (ca. 15 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^2 \frac{x^2+2x+4}{x+1}\,dx \ .$$

Opgave 4 (ca. 20 point)

Bestem den løsning f til differentialligningen

$$y''-4y=0 \ ,$$

for hvilken $f(0)=2$ og $f'(0)=8$.

Bestem det andengradspolynomium, der er løsning til differentialligningen

$$y''-4y=x^2 \ .$$

Opgave 5 (ca. 20 point)

I et koordinatsystem i rummet har en kugle centrum i $C(2,-3,6)$ og går gennem $O(0,0,0)$.

Bestem en ligning for kuglen.

Kuglens tangentplan i punktet O kaldes α.

Bestem en ligning for α.

Den plan, der indeholder koordinatsystemets første- og andenakse, kaldes β.

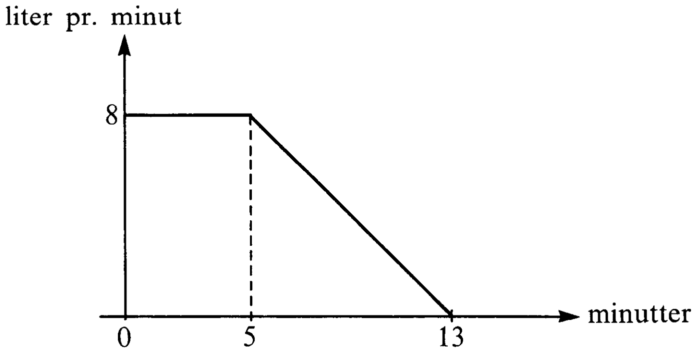
Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem α og β.

Planerne α og β skærer hinanden i en linje l.

Bestem en parameterfremstilling for l.

Opgave 6a I en stor vandbeholder, der er tom til tidspunktet $t = 0$, strømmer vand ind gennem et rør. Figuren nedenfor viser for $0 \leqq t \leqq 13$ den hastighed, hvormed vandet strømmer ind i beholderen. Hastigheden måles i liter pr. minut, og tiden måles i minutter.

(ca. 15 point)



Hvor mange liter vand er der i beholderen til tidspunktet $t = 4$ og til tidspunktet $t = 8$?

Vandmængden (målt i liter) i beholderen er en funktion f af tiden t.

Bestem en forskrift for f, og tegn grafen for f.

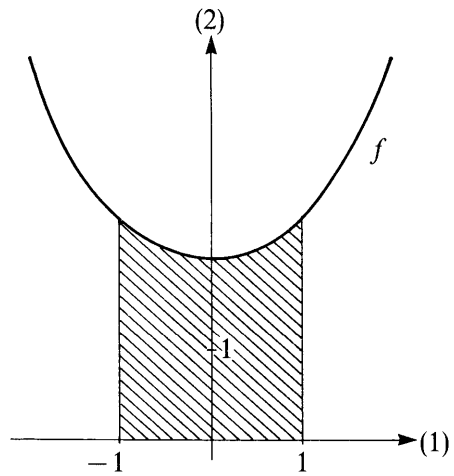
Opgave 6b Figuren viser en skitse af grafen for funktionen

(ca. 15 point)

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} .$$

Beregn arealet af den punktmængde, der er skraveret på figuren.

Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden roteres 360° om førsteaksen.



Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1991

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 16. august 1991 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

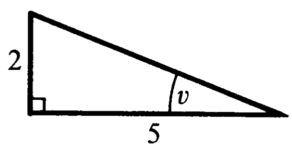
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 20 point
hver af opgaverne 5 og 6.	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Funktionen $f(x) = a^x$ har fordoblingskonstanten 4.
Bestem a.

b)



Beregn vinkel v i ovenstående trekant.

c) Udfør divisionen $(2x^3 - 5x^2 - 3x + 31) : (x + 2)$.

d) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

e) En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 7 og spredning 2.
Bestem $P(X \leqq 3{,}5)$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

Et parallelogram har en vinkel på 38°, og hver af dets fire sider har længden 20.

Beregn længden af hver af de to diagonaler i parallelogrammet.

Opgave 3 (ca. 15 point)

Tabellen viser for en bestemt type gasledning sammenhængen mellem gasstrøm, målt i m^3 pr. time, og tryktab pr. meter ledning, målt i millibar.

gasstrøm	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	10
tryktab pr. meter ledning	0,002	0,008	0,033	0,074	0,130	0,204	0,294	0,522	0,816

Kilde: *»Naturgasinstallationer«, SBI-anvisning* 145, 1985.

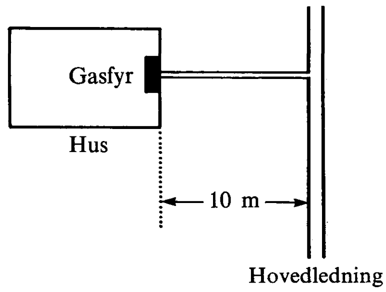
Gør rede for, at tryktabet pr. meter ledning som funktion af gasstrømmen med tilnærmelse er en funktion af formen

$$f(x) = bx^a \ ,$$

og bestem konstanterne a og b.

For huse uden trykregulator må tryktabet fra hovedledningen til det gasforbrugende apparat (f.eks. et gasfyr) ikke overstige 2,5 millibar.

Beregn den største gasmængde, målt i m^3 pr. time, et sådant apparat må bruge, når gasledningens længde fra apparat til hovedledning er 10 m.



Opgave 4 (ca. 20 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{e^x}{2x-1} \ , \quad x \in [-3;3] \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \ .$$

Undersøg funktionen f og dens graf med hensyn til fortegn, monotoniforhold og asymptoter.

Tegn grafen for f, og bestem værdimængden for f.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Sandsynligheden for, at en bestemt type pumpe fungerer, betegnes med p. I et kølesystem indgår 2 pumper af denne type, mens der i et andet kølesystem indgår 4 pumper af denne type. For begge kølesystemer antages, at det, at en pumpe fungerer, er uafhængig af, at andre pumper fungerer.
For at det første system virker, er det nødvendigt, at begge pumper fungerer, mens det andet virker, når mindst 3 af de 4 pumper fungerer.

Bestem sandsynligheden for, at det første system virker, når $p = 0{,}93$.

Bestem sandsynligheden for, at det andet system virker, når $p = 0{,}93$.

For hvilke værdier af p har de to systemer samme sandsynlighed for at virke?

Opgave 6a (ca. 15 point)

I et koordinatsystem har en parabel ligningen $y = \frac{1}{2}x^2$.
En cirkel har centrum i punktet $C(-6,8)$ og går gennem punktet $O(0,0)$.

Tegn parablen og cirklen i koordinatsystemet.

Bestem en ligning for cirklen.

Punktet $P(2,2)$ ligger på både parablen og cirklen.

Bestem en ligning for parablens tangent i punktet P og for cirklens tangent i punktet P.

Opgave 6b (ca. 15 point)

Et lån på 10 000 kr. til en månedlig rente på 1,40% tilbagebetales med 12 lige store månedlige ydelser.

Beregn den månedlige ydelse.

Nedenstående tabel over lånetilbud stammer fra brochuren »Lyspunkter fra dit Bang & Olufsen center«.

Bestem den månedlige rente i procent (2 dec.) for et systemlån på 10 000 kr., der afdrages over 12 måneder.

System Lån	Manedlig ydelse, hvis du betaler over...					
Lån kr.	**12 mdr.**	**24 mdr.**	**36 mdr.**	**48 mdr.**	**60 mdr.**	**72 mdr.**
2.000	183	-	-	-	-	-
4.000	366	199	-	-	-	-
6.000	549	298	216	175	-	-
8.000	732	398	288	233	202	181
10.000	915	497	360	292	252	226
15.000	1.373	746	540	438	378	339
20.000	1.830	995	720	584	505	453
25.000	2.288	1.244	900	730	631	566
30.000	2.746	1.493	1.080	876	757	679
35.000	3.203	1.742	1.260	1.023	883	793
40.000	3.661	1.991	1.440	1.169	1.010	906
45.000	4.119	2.240	1.620	1.315	1.136	1.019
50.000	4.577	2.489	1.801	1.461	1.262	1.133

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1992 **92-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU MATEMATIK

Onsdag den 13. maj 1992 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 20 point
opgave 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point) Bestem til differentialligningen

$$y'' - 0{,}25 \cdot y = 0$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,4)$ og i dette punkt har en tangent med hældningskoefficient 4.

Opgave 2 (ca. 10 point) I et koordinatsystem i rummet har en kugle ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 29 \ .$$

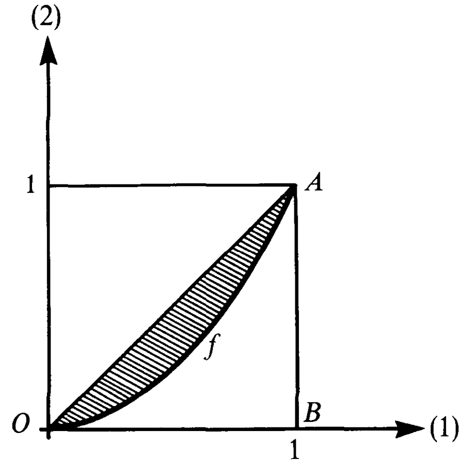
Punktet $P(0,2,5)$ ligger på kuglen.

Bestem en ligning for kuglens tangentplan α i punktet P.

Linjen gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt og punktet $Q(2,4,10)$ skærer planen α i punktet R.

Bestem koordinatsættet til punktet R.

Opgave 3
(ca. 10 point)



Figuren viser et såkaldt Lorentz-diagram for en indkomstfordeling f. Grafen for f kaldes en Lorentzkurve.
Som mål for Lorentzkurvens afvigelse fra diagonalen OA benyttes Lorentzindekset L, der beregnes som

$$L = \frac{\text{areal af skraveret område}}{\text{areal af trekant } OAB} \ .$$

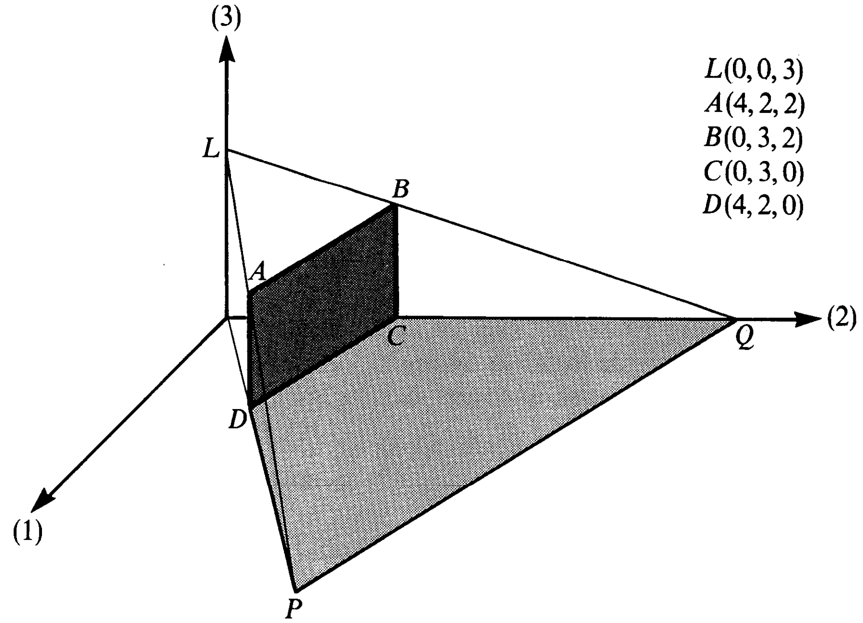
Beregn Lorentzindekset, når funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 \ , \quad x \in [0;1] \ .$$

Beregn Lorentzindekset, når funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{for } x \in [0;\frac{1}{2}] \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{for } x \in]\frac{1}{2};1] \ . \end{cases}$$

Opgave 4
(ca. 20 point)



Figuren viser, hvorledes en mur kaster skygge i lyset fra en gadelampe. Situationen er indtegnet i et koordinatsystem. Rektanglet $ABCD$ er muren, firkanten $PQCD$ er skyggen, og L er gadelampen.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og L.

Bestem en parameterfremstilling for den linje, hvori planen α skærer den plan, der indeholder koordinatsystemets første- og andenakse.

Bestem længden af linjestykket PQ.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Figuren viser en skitse af grafen for funktionen

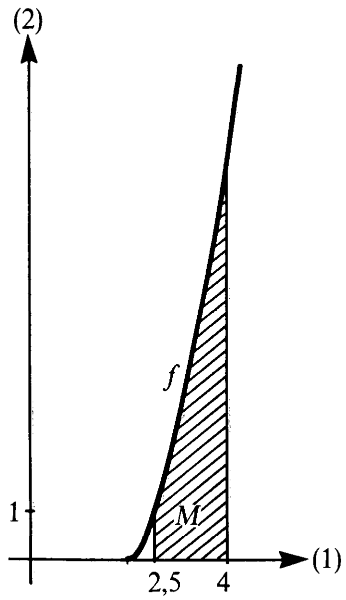
$$f(x) = (2x-4)^{\frac{3}{2}} .$$

Beregn arealet af den på figuren skraverede punktmængde M.

Det oplyses, at længden af grafen for f fra et punkt $P(a, f(a))$ til et punkt $Q(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{(f'(x))^2+1}\, dx .$$

Beregn omkredsen af punktmængden M.



Opgave 6 (ca. 20 point) I en model for en sø med konstant tilførsel af fosfor antages det, at koncentrationen y (målt i mg/m^3) af fosfor i søen som funktion af tiden t (målt i år) tilfredsstiller en differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dt} = b - ky \ .$$

Konstanten b er den årligt tilførte mængde fosfor (målt i mg pr. m^3 søvand), og k er en konstant, der blandt andet afhænger af vandfornyelseshastigheden i søen.
For en bestemt sø er der sket en nedsættelse af fosfortilførslen, således at den årligt tilførte mængde fosfor er 54 mg/m^3. Konstanten k er 0,45, og til tidspunktet $t = 0$ er koncentrationen af fosfor 200 mg/m^3.

Bestem y som funktion af t, når $t \geqq 0$.

Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

Hvilken oplysning giver denne grænseværdi om fosforkoncentrationen i søen?

Fra hvilket tidspunkt er forskellen mellem y og $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$ mindre end 2 mg/m^3?

Opgave 7a (ca. 15 point) I et koordinatsystem i planen er givet tre punkter

$$A(5,2) \ , \quad B(10,3) \quad \text{og} \quad C_t(-6+3t, 4+t) \ ,$$

hvor t er et tal.

Bestem vinklen mellem vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC_3}$.

For hvilke tal t gælder, at

1) $\overrightarrow{AC_t}$ står vinkelret på $\overrightarrow{AB}$?
2) $\overrightarrow{AC_t}$ er parallel med $\overrightarrow{AB}$?
3) arealet af det af $\overrightarrow{AC_t}$ og $\overrightarrow{AB}$ udspændte parallelogram er 6?

Opgave 7b (ca. 15 point) I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{matrix} x = \sin t \\ y = t^2 - 4 \end{matrix} \ , \quad -4 \leqq t \leqq 4 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne, eller hvori banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

Tegn banekurven.

Banekurven har et dobbeltpunkt, det vil sige et punkt, hvor P befinder sig til to forskellige tidspunkter.

Bestem vinklen mellem de to hastighedsvektorer i dobbeltpunktet.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1992 **92-8-3**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 22. maj 1992 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 20 point
opgave 5	ca. 10 point
opgave 6	ca. 20 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2-4x+y^2-6y-3=0\ .$$

Bestem koordinatsættet til cirklens centrum, og bestem radius i cirklen.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x)=(x^2+4)\cdot\sin x$.

c) En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 8. Det oplyses endvidere, at $P(X \leqq 6)=0{,}25$.

Bestem spredningen for X.

d) 500 kr. indsættes på en konto. De første 5 år er renten 4% p.a. Herefter ændres renten til 3,5% p.a.

Hvor meget står der på kontoen efter i alt 9 år?

e) Bestem afstanden fra punktet $P(3,-2)$ til linjen med ligningen $y=\frac{1}{2}x+15$.

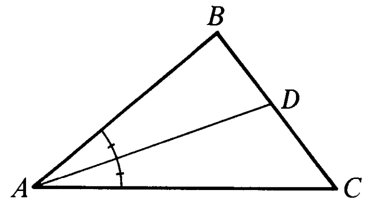
Opgave 2 (ca. 10 point) Ca. 10% af nyfødte jerseykalve dør ved fødslen. Sandsynligheden for, at en kalv dør ved fødslen, sættes derfor i det følgende til 10%.
I en jerseybesætning skal der fødes 40 kalve.

Bestem sandsynligheden for, at der dør højst 4 kalve.

Bestem sandsynligheden for, at der dør mindst 2 og højst 5 kalve.

Opgave 3 (ca. 15 point) I trekant ABC skærer vinkel A's vinkelhalveringslinje siden BC i punktet D.
Det oplyses, at $\angle A = 40{,}0°$, $|AD| = 4{,}21$ og $|AC| = 5{,}12$.

Beregn de ukendte sider og vinkler i trekant ABC.



Opgave 4 (ca. 20 point) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4 + \tfrac{1}{3}x^3 - 7\ln x \;, \quad x > 0 \;.$$

Undersøg f med hensyn til monotoniforhold.

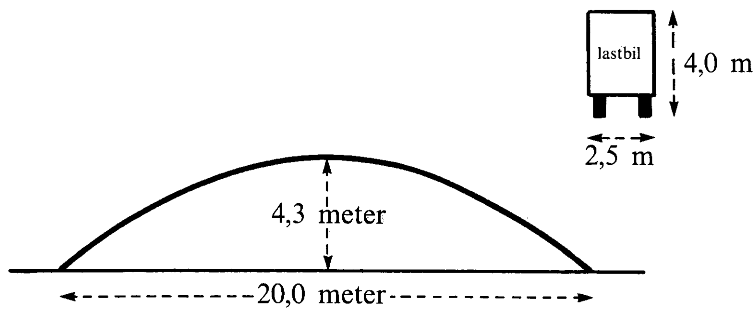
Tegn grafen for f.

Bestem funktionens værdimængde.

Bestem en ligning for grafens tangent i punktet $P(1, f(1))$.

Bestem et gradtal for den spidse vinkel, som denne tangent danner med førsteaksen.

Opgave 5 (ca. 10 point)



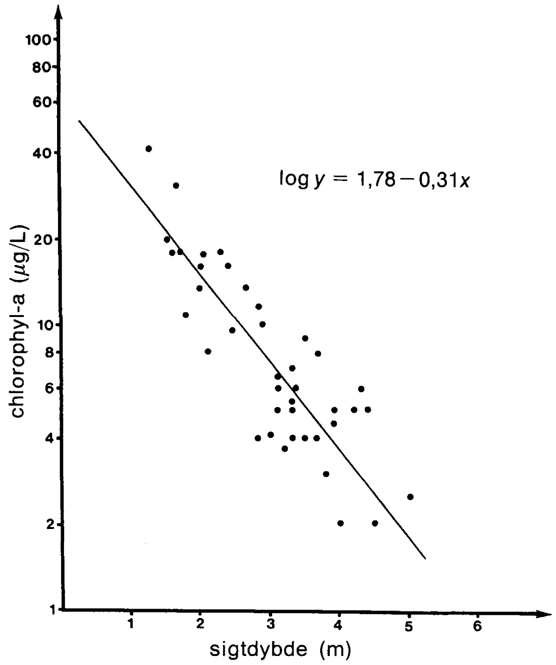
En tunnel har et parabelformet tværsnit, som vist på figuren.

Undersøg, om en lastbil, som er 2,5 meter bred og 4,0 meter høj (se figuren), kan køre gennem tunnelen.

Bestem den største bredde, en vej i tunnelen kan have, hvis højden over vejen overalt skal være mindst 3,2 meter.

Vink: Skitsér det parabelformede tværsnit i et koordinatsystem, og brug dette koordinatsystem i beregningerne.

Opgave 6a (ca. 20 point) Når store mængder næringssalte siver ud i lavvandede kystområder, øges mængden af alger i vandet, og vandet bliver uklart. Som et mål for algemængden bruges chlorophyl-a koncentrationen, og som et mål for vandets uklarhed bruges sigtdybden.



Sammenhæng mellem sigtdybde og chlorophyl-a i Roskilde Fjord. Bemærk den logaritmiske inddeling på y-aksen.

Kilde: *Vand & Miljø* 7/89.

På figuren er den rette linje en model for sammenhængen mellem sigtdybden x (målt i m) og chlorophyl-a koncentrationen y (målt i μg/L) i Roskilde Fjord. I denne model gælder

$$\log y = 1{,}78 - 0{,}31x \ .$$

Gør rede for, at ovenstående sammenhæng også kan udtrykkes ved

$$y = 60{,}3 \cdot 0{,}49^x \ .$$

Bestem den chlorophyl-a koncentration, der svarer til en sigtdybde på 3,5 m.

Hvor meget ændres sigtdybden, når chlorophyl-a koncentrationen halveres?

Sigtdybden er bestemmende for, på hvor stor en vanddybde man kan finde bundvegetation, f.eks. ålegræs.
Sammenhængen mellem sigtdybden x (målt i m) og den største dybde z (målt i m), som ålegræs kan vokse på, er ved målinger bestemt til

$$z = 1{,}9x - 3{,}6 \ .$$

Bestem den største dybde, som ålegræs kan vokse på, når chlorophyl-a koncentrationen er 3 μg/L.

Bestem den største dybde z, som ålegræs kan vokse på, udtrykt ved chlorophyl-a koncentrationen y.

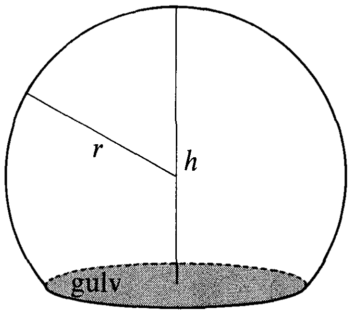
Opgave 6b (ca. 20 point) Varmetab fra bygninger sker gennem overfladen. Når man sammenligner bygningers varmeøkonomi, kan man benytte følgende tommelfingerregel:

> Den bygning, hvor forholdet mellem overflade og rumfang er mindst, har den bedste varmeøkonomi.

I det følgende ses bort fra varmetab gennem gulv, således at gulvet ikke medregnes til bygningens overflade.

For en hal, der har form som en kuglekalot med radius r og højde h (se figur 1), er overfladen O (når man ser bort fra gulvet) og rumfanget V givet ved

$$O = 2\pi rh$$
$$V = \tfrac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3) \ .$$



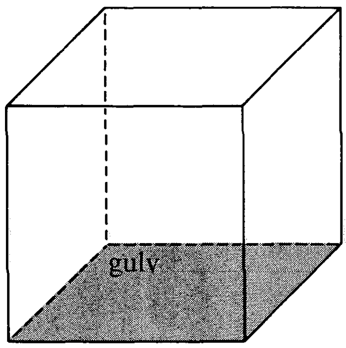
Figur 1

Man ønsker at bygge en hal, der har form som en kuglekalot med radius $r = 15$ m.

Bestem for sådanne haller forholdet $\frac{O}{V}$ mellem overflade og rumfang som funktion af højden h.

Bestem højde og rumfang for den af disse haller, der har bedst varmeøkonomi.

Undersøg om varmeøkonomien for denne hal er bedre end varmeøkonomien for en terningformet hal (se figur 2) med samme rumfang. (Der ses stadig bort fra varmetab gennem gulvet).



Figur 2

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU MATEMATIK

Onsdag den 19. august 1992 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 25 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point) I et koordinatsystem i rummet er der givet to parallelle linjer l og m. Linjerne har parameterfremstillingerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}\,.$$

Beregn afstanden mellem l og m.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder l og m.

En kugle K har centrum i punktet $C(-5,2,1)$ og tangerer planen α.

Bestem en ligning for kuglen K.

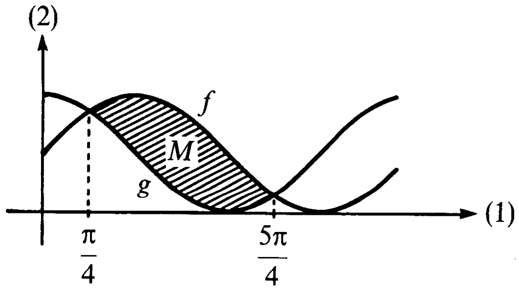
Opgave 2 (ca. 15 point)

På figuren er skraveret en punktmængde M, der er begrænset af graferne for funktionerne f og g, hvor

$$f(x) = \sin x + 1$$
$$g(x) = \cos x + 1 \ .$$

Beregn arealet af M.

Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.



Opgave 3 (ca. 15 point)

Bestem til differentialligningen

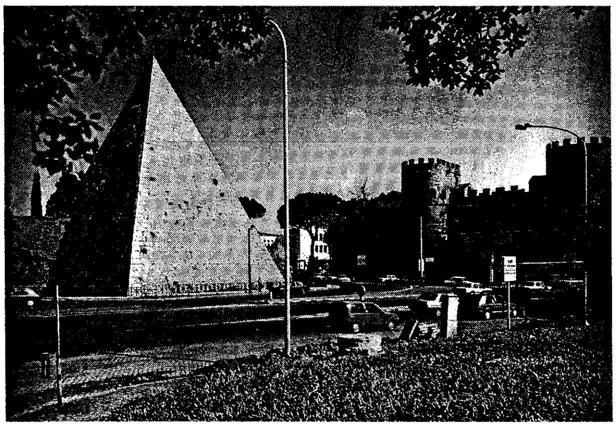
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{-y}$$

den løsning f, som opfylder betingelsen $f(\sqrt{3}) = 0$.

Skitsér grafen for f.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Figuren viser Cestiuspyramiden i Rom.
Pyramiden har som grundflade et kvadrat på 30 m × 30 m. Pyramidens toppunkt ligger 37 m lodret over det punkt, hvori grundfladens diagonaler skærer hinanden.

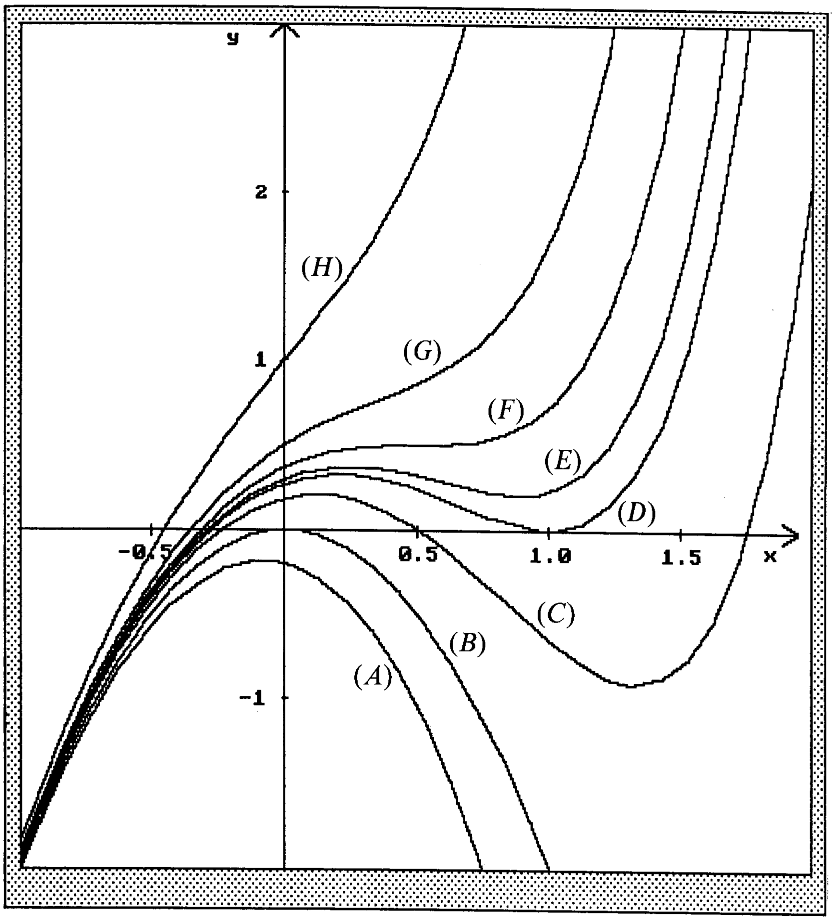


Bestem vinklen mellem grundfladen og en af de skrå sideflader i pyramiden.

Bestem vinklen mellem to af de skrå nabosideflader i pyramiden.

Vink: Tegn eventuelt først pyramiden i et koordinatsystem.

Opgave 5
(ca. 25 point)



Figuren viser en printerudskrift af en række løsningskurver til differentialligningen

$$y' - 2y = 4x^2 - 4x \ .$$

Bestem det andengradspolynomium $p(x)$, der er løsning til differentialligningen, og angiv hvilken af løsningskurverne på figuren, der er graf for $p(x)$.

En familie af funktioner f_c er bestemt ved

$$f_c(x) = c \cdot e^{2x} + p(x) \ ,$$

hvor c er et reelt tal.

Vis, at enhver af funktionerne f_c er løsning til differentialligningen.

For en bestemt værdi af c er løsningskurven (D) graf for funktionen f_c.

Bestem denne værdi af c.

Af figuren ses, at en række af løsningskurverne har vandret tangent. Røringspunkterne for de vandrette tangenter til løsningskurverne til differentialligningen udgør en parabel.

Bestem en ligning for denne parabel.

Opgave 6a (ca. 15 point)

Vis, at $F(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ er stamfunktion til $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Benyt dette til at finde det ubestemte integral

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2} \left(\tfrac{1}{2}x^2+3\right) dx \ .$$

Opgave 6b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er to vektorer bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 7+t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8+2t \\ 7-t \end{pmatrix} ,$$

hvor t er et reelt tal.

Bestem de tal t, for hvilke projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er $\frac{1}{2}\vec{b}$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1992
MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 26. august 1992 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 20 point
hver af opgaverne 5 og 6	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Om en normalfordelt stokastisk variabel X oplyses, at

$$P(X \leqq 3) = 0{,}10 \quad \text{og} \quad P(X \leqq 15) = 0{,}80 \ .$$

Bestem middelværdien for X.

b) Bestem halveringskonstanten for funktionen

$$f(x) = 0{,}175 \cdot 0{,}635^x \ .$$

c) Løs ligningen

$$\cos x = 0{,}30 \ , \quad x \in [0;2\pi] \ .$$

d) I en trekant ABC er $a = 4{,}3$, $b = 8{,}7$ og $\angle C = 27{,}9°$.

Beregn trekantens areal.

e) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \ln(6x)$.

Opgave 2
(ca. 10 point)

> I det hele taget er A/S Storebæltsforbindelsen ganske rolig, når der tales om påsejlingsrisiko. Man har nemlig regnet ud, at påsejling med nedstyrtning af broen til følge kun vil ske én gang pr. 10.000 år. Og broen skal bare holde i 100 år.

Kilde: Politiken, 5. maj 1991.

Af udklippet fremgår, at sandsynligheden er $\frac{1}{10\,000}$ for, at Storebæltsbroen et tilfældigt år påsejles med en nedstyrtning af broen til følge.

Bestem sandsynligheden for, at der ikke sker nogen påsejling af broen med en nedstyrtning til følge inden for de første 100 år.

Bestem sandsynligheden for, at der sker en påsejling af broen inden for de første 100 år, så broen styrter ned.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 + 8x^{-2} \quad , \quad x \in [1;2] \ .$$

Bestem værdimængden for f.

Opgave 4
(ca. 20 point)

I et koordinatsystem i planen er en parabel bestemt ved ligningen

$$y = x^2 + 4x + 3 \ .$$

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt, og tegn parablen.

Bestem en ligning for den tangent t til parablen, hvis røringspunkt ligger på andenaksen.

Bestem et gradtal for den spidse vinkel mellem t og andenaksen.

Vis, at linjen l med ligningen $y = -x - \frac{13}{4}$ også er tangent til parablen.

Bestem koordinatsættet til det punkt på l, hvis afstand til $O(0,0)$ er mindst mulig.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Udklippet omhandler sammenhængen mellem bremselængden og dækkenes mønsterdybde (slidbane), når en bestemt type bil nedbremses fra 60 km/h.

Undersøg, hvilken af nedenstående modeller der bedst beskriver bremselængden som funktion af mønsterdybden:

a) $f(x) = ax + b$.
b) $f(x) = b \cdot a^x$.
c) $f(x) = b \cdot x^a$.

Et EF-direktiv kræver, at mønsterdybden skal være mindst 1,6 mm.

Benyt den valgte model til at give et skøn over bilens bremselængde, hvis mønsterdybden er 1,6 mm.

De nedslidte dæk har også stor betydning for bilens bremseevne. Forsøg på Jyllands-Ringen har vist, at bremselængden blev næsten fordoblet på glat vej, når dækkene er slidt.

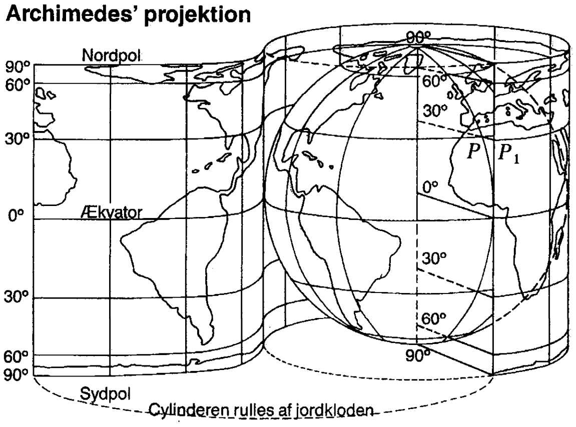
Tre ens biler blev udstyret med forskellige dæk. Nr. 1 havde 8 mm slidbane, nr. 2 en mønsterdybde på 3 mm og bil nr. 3 var forsynet med 1 mm slidbane.

Fra 60 km/h havde nr. 1 en bremselængde på 59 m, nr. 2 skulle bruge 72 m, mens den sidste røg helt ud på 92 m, før den holdt stille. Der er altså god grund til at holde sin bil med ordentlige dæk – i øvrigt også en god økonomisk grund. Bliver man snuppet af en politipatrulje med nedslidte dæk, falder der brænde ned. Hvis dækket er helt blankpoleret, ryger nummerpladerne, og der kommer en klækkelig bøde oveni.

Kilde: *Motor* 17/1990.

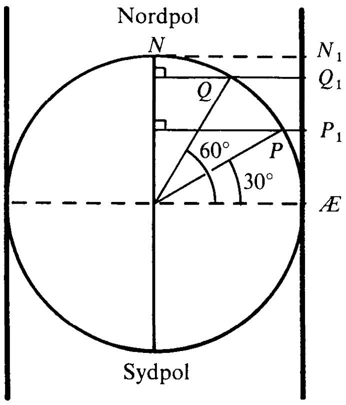
Opgave 6a (ca. 15 point)

Archimedes' projektion



Her er landene overført punkt for punkt direkte på en cylinder, der glattes ud.

Kilde: *Illustreret Videnskab nr.* 9/91.



Æ er det punkt på ækvator, der har samme længdegrad som *P* og *Q*.

Enhver projektion af jordens overflade på et fladt kort fører til en eller anden form for forvrængning. Ovenfor ses to illustrationer af Archimedes' projektion. Et punkt P på jordkuglen projiceres i et punkt P_1 på cylinderen ved hjælp af en halvlinje, der går vinkelret ud fra jordens akse og gennem P.
To punkter P og Q har samme længdegrad. Punktet P befinder sig på 30° nordlig bredde, og Q befinder sig på 60° nordlig bredde.

Beregn forholdet f_1 mellem længden af linjestykket $ÆP_1$ og længden af cirkelbuen $\widehat{ÆP}$.

Beregn forholdet f_2 mellem længden af linjestykket Q_1N_1 og længden af cirkelbuen $\widehat{QN}$.

Hvor mange procent er f_2 mindre end f_1?

Opgave 6b
(ca. 15 point)

I det viste udklip fra en annonce i »Århus onsdag«, 2. oktober 1991, gives et afbetalingseksempel ved køb af en sovesofa. Det antages, at første månedlige betaling sker en måned efter købet.

Bestem den månedlige rente i procent (1 dec.).

Hvilken årlig rente i procent svarer hertil?

Hvis man i stedet låner 4295 kr. i et pengeinstitut til en månedlig rente på 1,4%, hvor mange måneder vil der da gå, før gælden er afviklet, hvis den månedlige ydelse er 256 kr.?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1993 **93-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU MATEMATIK

Onsdag den 12. maj 1993 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
opgave 2	ca. 15 point
opgave 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i rummet har en kugle ligningen

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y-4=0 \ ,$$

og en linje har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R} \ .$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

Vis, at kuglen og linjen har netop ét punkt fælles.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er givet punkterne $A(-2,2)$, $B(-1,4)$ og $C(1,3)$.

Beregn arealet af trekant ABC.

Bestem koordinatsættet til det punkt D, for hvilket $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\overrightarrow{AC}$.

Opgave 3 (ca. 10 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(0,2)$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af følgende tre integraler:

$$\int_0^1 (x^3 + 3^x)dx$$

$$\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + x)^4 dx$$

$$\int_0^1 (2x + 1) \cdot 3^x dx .$$

Opgave 5 (ca. 20 point)

Figuren viser en kasse indtegnet i et koordinatsystem. Kassens sidelængder er

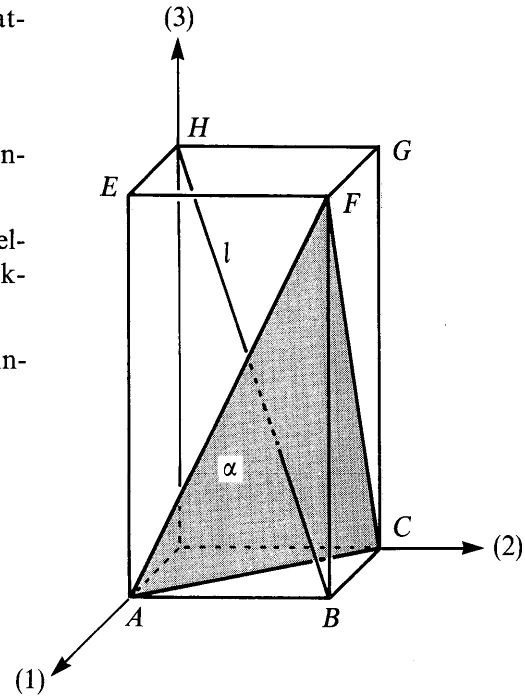
$$|AB| = 4 \ , \quad |BC| = 2 \quad \text{og} \quad |AE| = 8 \ .$$

Bestem en parameterfremstilling for linjen l gennem punkterne B og H.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjen l og den plan α, der indeholder punkterne A, C og F.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel, som linjen l danner med planen α.

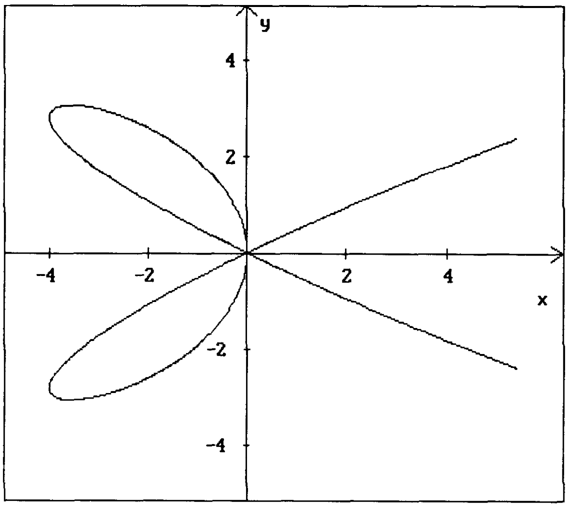
Beregn afstanden fra punktet F til linjen l.



Opgave 6 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger punktet $P(x,y)$ sig således, at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= t^4 - 4t^2 \\ y &= t^3 - 4t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathrm{R} \ .$$



På figuren ses en printerudskrift af banekurven.

Bestem de tre tidspunkter t, hvor P befinder sig i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Bestem for hver af disse t-værdier den tilhørende hastighedsvektor.

Beregn vinklen mellem de to hastighedsvektorer, der svarer til henholdsvis den største og den mindste af de tre t-værdier.

Opgave 7a (ca. 15 point)

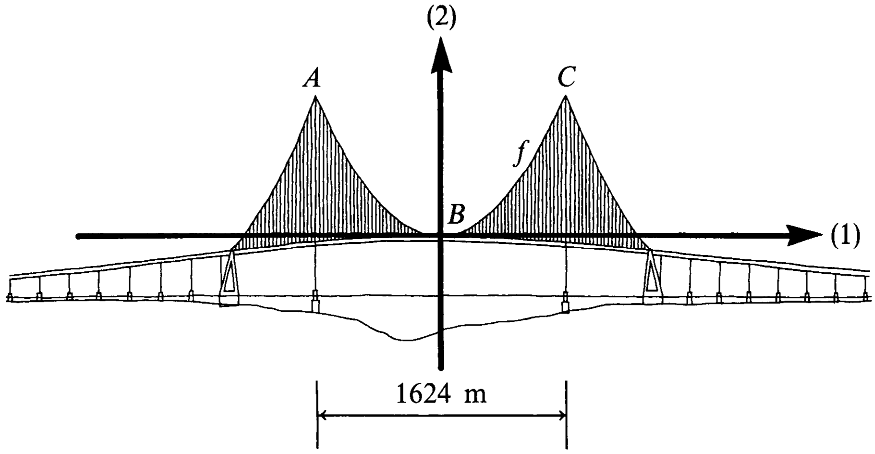
En bestemt populations størrelse y, målt i antal individer, er en funktion af tiden x, målt i døgn. Det antages, at y er løsning til en differentialligning af typen

$$\frac{dy}{dx} = ay(M-y) \ .$$

Øvre grænse for populationens størrelse er 1000 individer, og til tiden 0 døgn er populationens størrelse 100 individer. På det tidspunkt, hvor populationens størrelse er 300 individer, er den hastighed, hvormed den vokser, 20 individer pr. døgn.

Bestem en forskrift for y som funktion af x.

Opgave 7b
(ca. 15 point)



(Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte)

Den kommende motorvejsbro, Østbroen, mellem Sprogø og Sjælland bygges som en hængebro. Vejbanen ophænges i lodrette hængekabler, der er fastgjort til et hovedkabel.
På figuren er brokonstruktionen indtegnet i et koordinatsystem. Heri er den del af hovedkablet, der går fra A gennem B til C, tegnet som graf for en funktion f. Fra teorien om bærende kablers form i hængebroer vides, at funktionen f er løsning til en differentialligning af formen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k \ ,$$

hvor k er en konstant.

Gør rede for, at f er et andengradspolynomium, og bestem en forskrift for f, idet der gælder

$$f(0) = 0 \ , \quad f'(0) = 0 \quad \text{og} \quad f(812) = 180 \ .$$

Længden L af hovedkablet kan beregnes som

$$L = 2\int_0^{812} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ .$$

Beregn længden L ved at benytte nedenstående formel:

$$\int \sqrt{1+(cx)^2}\, dx = \frac{1}{2c}\left(cx\sqrt{1+(cx)^2} + \ln\left(cx + \sqrt{1+(cx)^2}\right)\right) \ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1993

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU MATEMATIK

Fredag den 21. maj 1993 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ har fordoblingskonstant 3.

Beregn a.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{x+3}{\sin x}$.

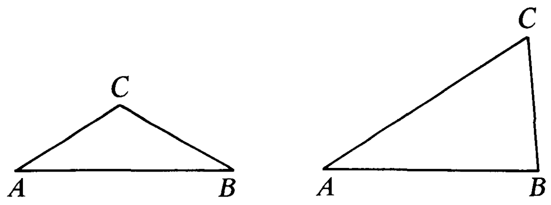
c) 10 000 kr. indsættes på en konto. Fire år senere er beløbet vokset til 14 641 kr.

Bestem den gennemsnitlige årlige rente i procent.

d) Tegn grafen for $f(x) = 120x^{-2}$ i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

e) Udfør divisionen $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 3)$.

Opgave 2
(ca. 10 point)



Om en trekant ABC oplyses, at $\angle A = 32{,}8°$, $a = 3{,}51$ og $c = 5{,}72$.

Som vist på figuren er der to muligheder for formen af trekant ABC.

Beregn for begge muligheder siden b.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(2x+1) - 4x \ , \quad x \in \left]-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right] \ .$$

Bestem monotoniforholdene for f.

Tegn grafen for f.

Bestem værdimængden for f.

Opgave 4
(ca. 15 point)

I et bestemt computerspil skal man hurtigst muligt gennemkøre en bane. Tabellen nedenfor viser den procentvise fordeling af tidsforbruget for et stort antal spillere.

Brugt tid i minutter	Procentdel spillere
0–5	2,4%
5–7	19,6%
7–9	43,0%
9–11	29,3%
11–	5,7%

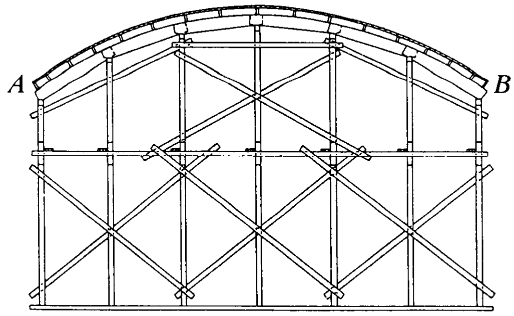
Vis, at den tid, en spiller bruger til at gennemkøre banen, med rimelighed kan antages at være normalfordelt.

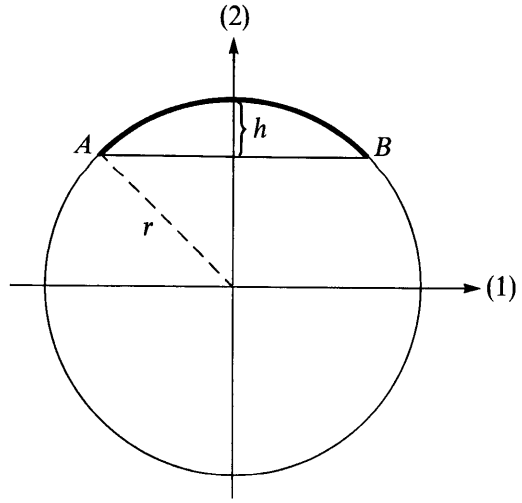
Bestem middelværdi og spredning for denne normalfordeling.

Der udtages tilfældigt 10 spillere.

Beregn sandsynligheden for, at de alle bruger mellem 7 og 9 minutter til at gennemkøre banen.

Opgave 5
(ca. 20 point)





Figur 1 (størrelsesforholdene er ikke korrekte) Figur 2

En forskalling er en form af træ, som anvendes til betonstøbning. På figur 1 ses en skitse af en forskalling til støbning af en tagkonstruktion, hvis tværsnit skal have form som en del af en cirkel.
På figur 2 er denne cirkel indtegnet i et koordinatsystem. Cirkelbuen $\widehat{AB}$ svarer til forskallingen, og h angiver forskallingens største højde over linjestykket AB. Det oplyses, at længden af linjestykket AB er 9 m, og at $h = 1{,}5$ m.

Vis, at cirklens radius r er 7,5 m, og bestem en ligning for cirklen.

Ligningen for cirklen benyttes ved konstruktionen af forskallingen. Den kan f.eks. bruges til at beregne forskallingens højde over linjestykket AB i forskellige afstande fra de to endepunkter A og B.

Beregn forskallingens højde over linjestykket AB i afstanden 2 m fra A.

Vinklen mellem cirklens tangent i A og vandret har betydning for forskallingens art. Hvis vinklen overstiger 35°, skal forskallingen være mere solid end ellers.

Undersøg, om det er nødvendigt med en mere solid forskalling i det betragtede tilfælde.

Kilde: Roy Jørgensen: Anlægsteknik – teori og praksis, Polyteknisk Forlag, 1988.

Opgave 6a (ca. 15 point)

Figur 1 viser en beholder, der har form som en cylinder med endeflade-radius r cm og længde l cm. Beholderens rumfang $V\ \mathrm{cm}^3$ er bestemt ved

$$V = \pi r^2 l\ .$$

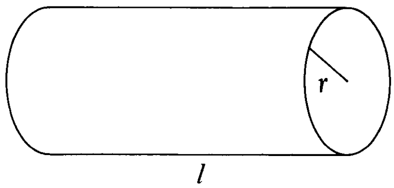
Figur 2 er et klip fra folderen »Posttakster 1992«.
En pakke skal sendes til Grønland. Pakkens form skal være som vist på figur 1, og pakkens længde + omkreds* skal være den størst tilladte, nemlig 250 cm.

Vis, at V for en sådan pakke er bestemt ved

$$V = 250\pi r^2 - 2\pi^2 r^3\ .$$

Bestem det størst mulige rumfang af en sådan pakke.

* Ved pakkens omkreds forstås omkredsen af dens cirkulære endeflade.



Figur 1

Formater maksimum Pakker		
Danmark **Færøerne**	100 x 60 x 60 cm	Længde 150 cm Diameter 25 cm
Volumenpakker	Længde 150 cm Rumfang 1 m³	Længde 200 cm Rumfang 1 m³
Grønland	Længde 100 cm Længde +omkreds 250 cm	Længde 150 cm Længde +omkreds 250 cm

Figur 2

Opgave 6b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje l bestemt ved

$$\mathscr{P}:\ y = x^2 - 8x + 11$$
$$l\ :\ y = -\tfrac{1}{2}x\ .$$

Tegn linjen og parablen i koordinatsystemet.

Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem l og $\mathscr{P}$, og løs uligheden

$$-\tfrac{1}{2}x < x^2 - 8x + 11\ .$$

Parablen har en tangent, der er parallel med linjen l.

Beregn koordinatsættet til denne tangents skæringspunkt med koordinatsystemets andenakse.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 18. august 1993 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3, 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem er givet tre punkter

$$A(1,2)\ ,\quad B(4,-6)\quad \text{og}\quad C(6,-5)\ .$$

Beregn arealet af trekant ABC.

Beregn vinkel A i trekant ABC.

Opgave 2 (ca. 10 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1\ ,\quad x>0\ .$$

Bestem til f den stamfunktion F, hvis graf går gennem punktet $P(4,9)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for F i punktet P.

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er givet to punkter

$$A(2,-3,4) \quad \text{og} \quad B(1,2,6) \; .$$

Bestem en parameterfremstilling for den rette linje l gennem punkterne A og B.

Bestem afstanden fra begyndelsespunktet O til linjen l.

Bestem en ligning for den plan, der indeholder punkterne O, A og B.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Der er givet følgende differentialligning:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(y^2-25) \; , \quad y > 5 \; .$$

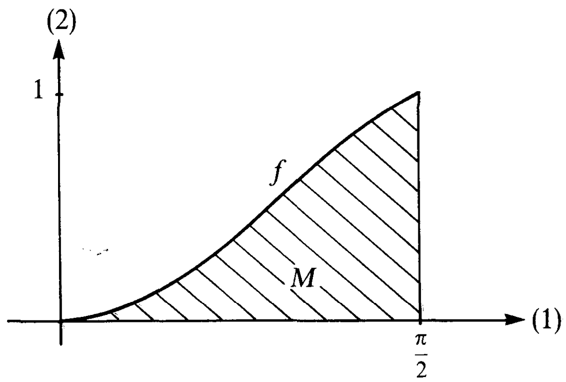
En funktion f er løsning til differentialligningen, og dens graf går gennem punktet $P(0,10)$.

Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem en forskrift for f.

Gør rede for, at enhver funktion, der er løsning til differentialligningen, er aftagende.

Opgave 5 (ca. 15 point)



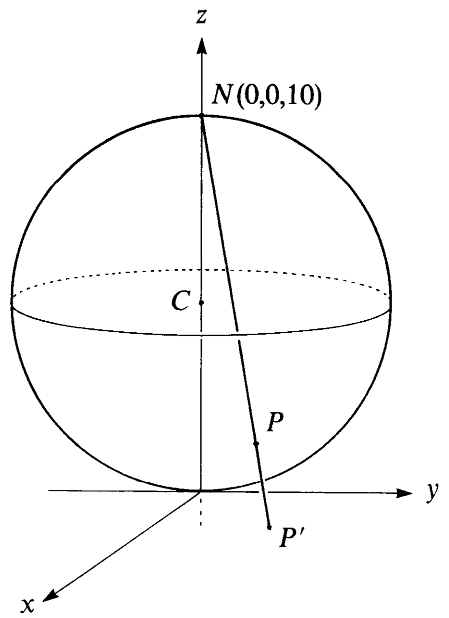
Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = \sin x \sqrt{1-\cos x} \; , \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \; .$$

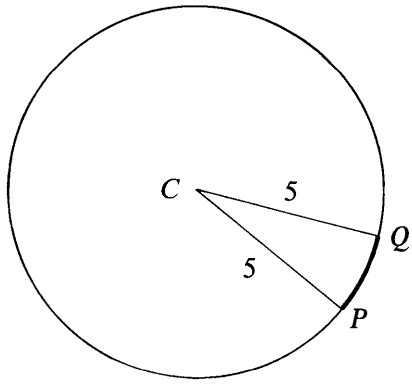
Beregn den eksakte værdi af arealet af det skraverede område M.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 6
(ca. 20 point)



Figur 1



Planen gennem C, P og Q skærer kuglen i en cirkel med radius 5.

Figur 2

Ved tegning af et kort over jordens sydlige halvkugle projiceres punkterne på en globus ud på en plan. Kuglen på figur 1 forestiller en globus indtegnet i et koordinatsystem. Kuglens centrum er $C(0,0,5)$, og dens radius er 5. Punktet svarende til Sydpolen er anbragt i koordinatsystemets begyndelsespunkt, og punktet $N(0,0,10)$ svarer til Nordpolen. Kortet befinder sig i xy-planen.
For et vilkårligt punkt P på kuglen kaldes det tilsvarende punkt på kortet for P'. Punktet P' bestemmes som skæringspunkt mellem xy-planen og linjen gennem N og P.

Bestem koordinatsættet til P', når P har koordinatsættet $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2)$.

Et punkt Q på den sydlige halvkugle har førstekoordinaten $2\sqrt{3}$ og andenkoordinaten $2\sqrt{3}$.

Bestem koordinatsættet til punktet Q og til det punkt Q', som svarer til Q.

Bestem afstanden mellem P' og Q'.

Planen gennem punkterne C, P og Q skærer kuglen i en cirkel med radius 5 (se figur 2).

Bestem afstanden mellem P og Q langs denne cirkel.

Opgave 7a (ca. 15 point)

Vis, at enhver funktion f af formen

$$f(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \ ,$$

hvor c_1 og c_2 er konstanter, er løsning til differentialligningen

$$(x+1) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0 \ .$$

Bestem c_1 og c_2 for den løsning, for hvilken

$$f(1) = 3 \quad \text{og} \quad f'(1) = 2 \ .$$

Opgave 7b (ca. 15 point)

En person udsættes for radioaktiv stråling i en periode på 30 døgn. Den strålingsdosis, personen modtager pr. tidsenhed, kaldes dosishastigheden og er bestemt ved

$$d(t) = 300 \cdot e^{-0{,}0255 \cdot t} \ ,$$

hvor t (døgn) er tiden regnet fra periodens begyndelse, og $d(t)$ (mikrogray pr. døgn) er dosishastigheden.

Beregn den samlede strålingsdosis, som personen modtager i løbet af de 30 døgn.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1993 **93-8-4**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 25. august 1993 kl. 9.00–13.00

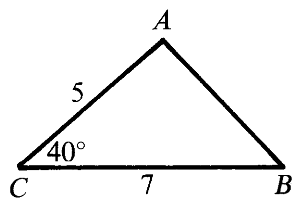
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 20 point
hver af opgaverne 4, 5 og 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a)



Beregn $|AB|$ i ovenstående trekant.

b) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 110 og spredning 20.

Bestem $P(100 \leqq X \leqq 130)$.

c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$.

d) 65% af de ansatte i en virksomhed er mænd. Blandt mændene er $\frac{1}{3}$ rygere, mens kun $\frac{1}{4}$ af kvinderne er rygere.

Hvor mange procent af de ansatte er rygere?

e) En gæld kan tilbagebetales med 10 årlige ydelser på hver 5 000 kr. Renten er 12% p.a.

Bestem gældens størrelse.

Opgave 2 (ca. 10 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x + \ln x \ , \quad x \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Vis, at f er voksende.

Funktionen f har netop ét nulpunkt.

Benyt Newton-Raphsons metode med startværdi $x_1 = 0{,}5$ til at bestemme dette nulpunkt (4 dec.), idet der udfyldes et skema som nedenstående.

x_1	x_2	x_3	x_4
0,5			

Opgave 3 (ca. 20 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3} \ .$$

Bestem definitionsmængde, nulpunkter og fortegn for f samt asymptoter til grafen for f.

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for f.

Tegn grafen for f.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I Dansk Tipstjenestes Quick-spil er antallet af gevinster proportionalt med antallet af lodder. Ved et salg af 3,5 millioner Quick-lodder er der 718 753 gevinster. Sandsynligheden for gevinst på et lod sættes derfor til 20,54%.

En spiller køber 10 Quick-lodder.

Beregn sandsynligheden for, at

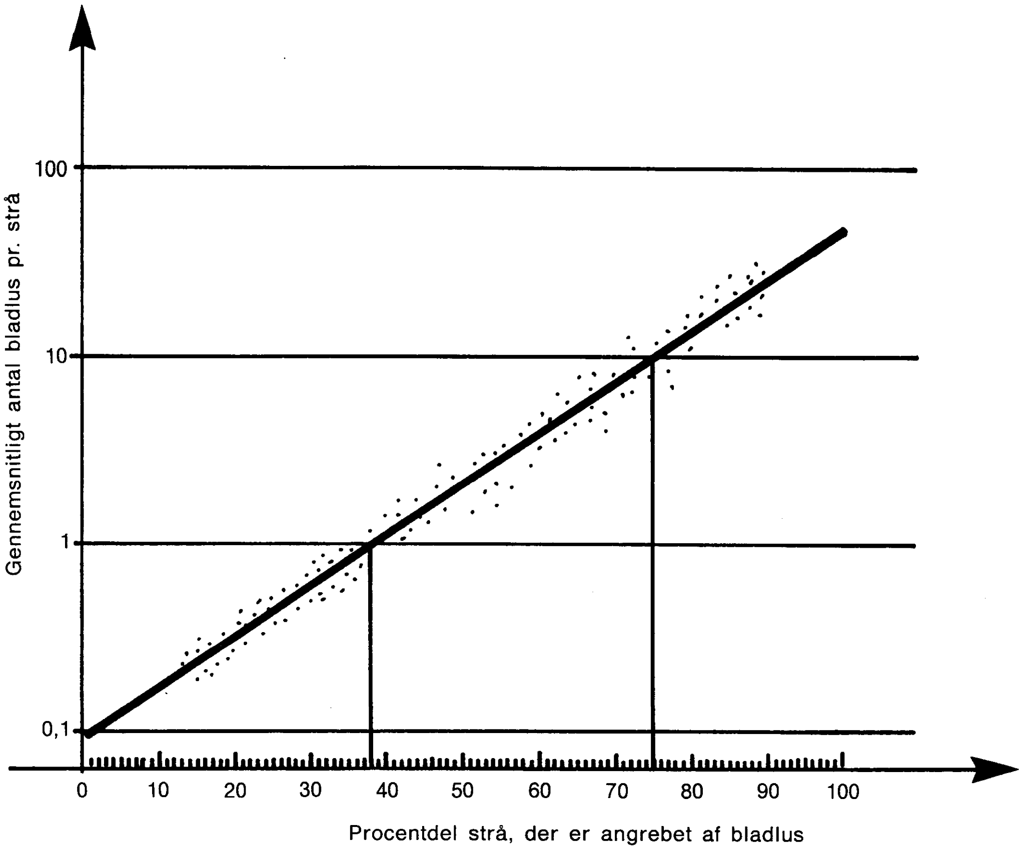
1) der ikke er gevinst på nogen af de 10 lodder.

2) der er gevinst på netop ét af de 10 lodder.

3) der er gevinst på mere end ét af de 10 lodder.

Beregn middelværdien for den stokastiske variabel, der angiver antallet af gevinster på 10 lodder.

Opgave 5
(ca. 15 point)



I Danmark er vårbyg den mest udbredte landbrugsafgrøde. Havrebladlus, kornbladlus og græsbladlus forekommer hvert år, men med meget varierende styrke. En betingelse for at kunne bestemme bekæmpelsesbehovet er at kunne bestemme bladlusforekomsten i marken. En hurtig og sikker optællingsmetode er derfor påkrævet.

Kilde: *Tidsskrift for Planteavl, nr.* 1, 1991.

Figuren viser resultatet af en undersøgelse af bladlusforekomster i vårbygmarker. Det fremgår, at der er en sammenhæng mellem det gennemsnitlige antal bladlus pr. strå og den procentdel af stråene, der er angrebet af bladlus. Bladlusforekomsten i en mark kan således bestemmes ved en undersøgelse af, hvor stor en procentdel af stråene der er angrebet.
Den rette linje på figuren er en model for sammenhængen mellem det gennemsnitlige antal bladlus pr. strå og procentdelen af strå, der er angrebet.

Gør rede for, at den viste sammenhæng kan beskrives ved en funktion af formen

$$f(x) = b \cdot a^x \ ,$$

hvor $f(x)$ er det gennemsnitlige antal bladlus pr. strå, og x er procentdelen af strå, der er angrebet.

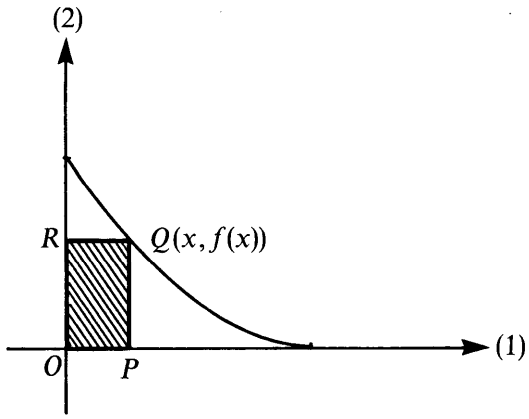
Bestem konstanterne a og b.

I forbindelse med bekæmpelsen af bladlus i en bestemt mark konstateres det, at 60% af stråene er angrebet.

Bestem det gennemsnitlige antal bladlus pr. strå i denne mark.

Bestem fordoblingskonstanten for funktionen f, og beskriv, hvad denne konstant fortæller om bladlusforekomster i vårbygmarker.

Opgave 6a
(ca. 15 point)



Figuren viser i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O en skitse af grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = x^2 - 10x + 25 \ , \quad x \in [0;5] \ .$$

For ethvert $x \in [0;5]$ er $Q(x, f(x))$ et punkt på grafen for f. Idet P og R betegner projektionerne af Q på henholdsvis første- og andenaksen, er firkant $OPQR$ et rektangel.

Bestem x, så arealet af dette rektangel er størst muligt.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en cirkel C_1 bestemt ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 22x + 4y + 61 = 0 \ .$$

Bestem radius og koordinatsættet til centrum for C_1.

En anden cirkel C_2 har centrum i punktet $A(-1,3)$ og radius 5.

Gør rede for, at de to cirkler har netop ét punkt fælles.

Bestem hældningskoefficienten for tangenten til cirklerne i dette fælles punkt.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1994 **94-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 11. maj 1994 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2 . . . . ca. 15 point
hver af opgaverne 3 og 4 . . . . ca. 20 point
hver af opgaverne 5 og 6 . . . . ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2$$
$$g(x) = 2x \; .$$

Graferne for de to funktioner afgrænser én punktmængde M, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er der givet et punkt $P(-3,-4)$ og en vektor $\vec{a} = \binom{1}{2}$. Punkterne A og B er bestemt ved

$$\overrightarrow{PA} = -\vec{a} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{PB} = 2\hat{\vec{a}} \; .$$

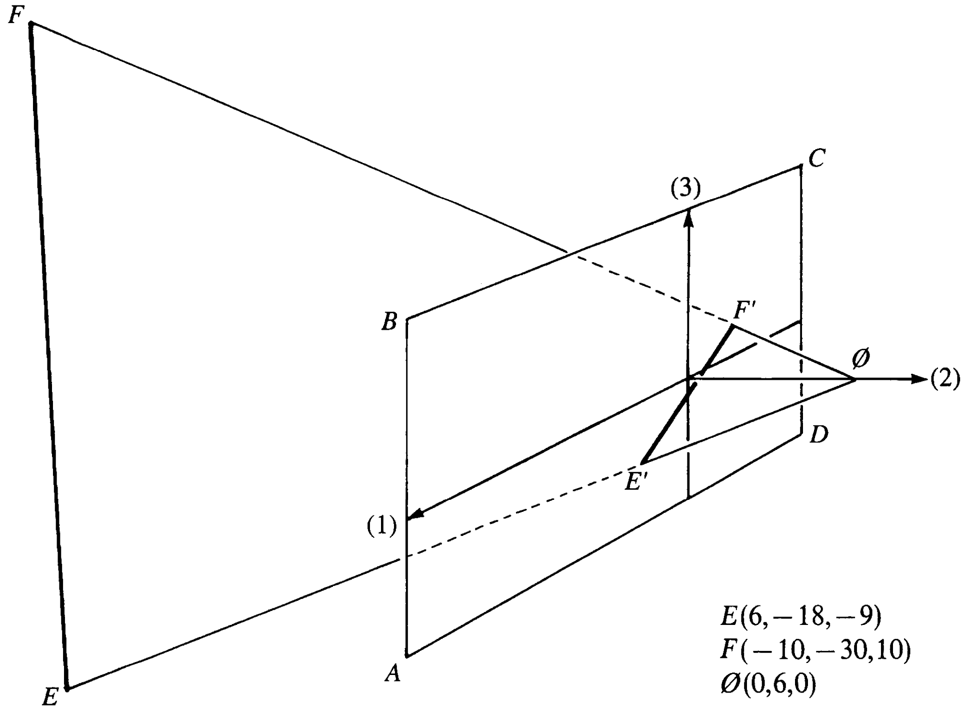
Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AP}$ på $\overrightarrow{AB}$.

C er et punkt på den linje, der går gennem P og har retningsvektor $\vec{a}$.

Bestem koordinatsættet til C i hvert af de tilfælde, hvor arealet af trekant ABC er 30.

Opgave 3
(ca. 20 point)



Figuren illustrerer, hvorledes det perspektiviske billede $E'F'$ af et linjestykke EF fremkommer på et lærred. $ABCD$ er lærredet, og $Ø$ er det punkt, hvorfra maleren ser linjestykket EF. Linjestykket $E'F'$ er skæringen mellem trekant $EFØ$ og lærredet. Punktet E' er således skæringspunktet mellem lærredet og linjen gennem punkterne E og $Ø$.
Situationen er indtegnet i et koordinatsystem, hvis første- og tredjeakse ligger i lærredets plan.

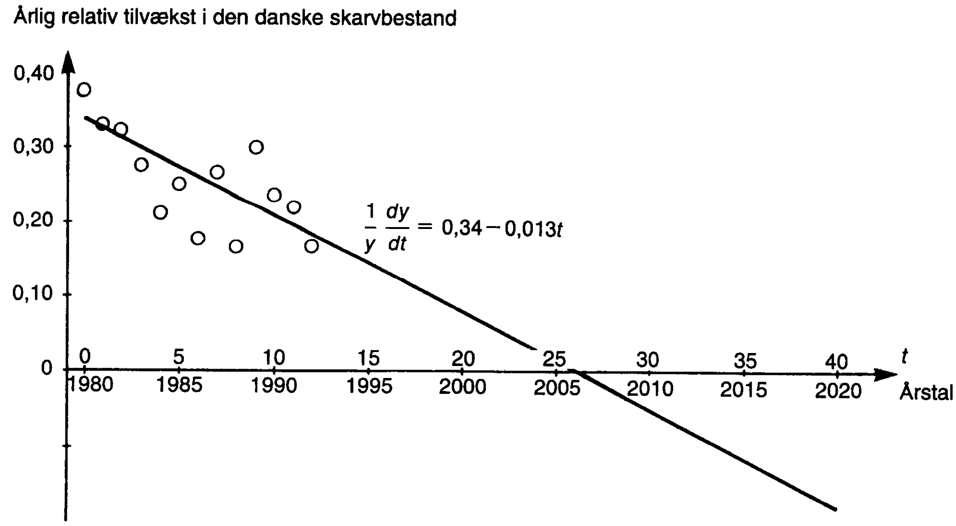
Bestem koordinatsættet til punktet E'.

Bestem en parameterfremstilling for linjestykket $E'F'$.

Bestem gradtallet for den spidse vinkel, som linjen gennem E og F danner med lærredets plan.

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem lærredets plan og den plan, der indeholder punkterne E, F og $Ø$.

Opgave 4
(ca. 20 point)



Kilde: Vand & Miljø 10 (2) 1993.

Figuren viser en model for udviklingen i den årlige relative tilvækst i den danske skarvbestand siden 1980. Ifølge modellen gælder der, at

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 0{,}34 - 0{,}013\,t \ ,$$

hvor y er skarvbestanden, angivet i antal individer, og t er antallet af år efter 1980.
I 1992 skønnede man, at der var 156 000 skarver i Danmark.

Bestem den løsning $f(t)$ til differentialligningen, for hvilken $f(12) = 156\,000$.

I hvilket år vil skarvbestanden ifølge modellen være størst, og hvor stor vil den da være?

Opgave 5
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet har en kugle centrum i $O(0,0,0)$. Punktet $P(3,0,4)$ ligger på kuglen.

Bestem en ligning for kuglen.

Bestem en ligning for kuglens tangentplan i punktet P.

Der findes to planer, der tangerer kuglen, og som begge indeholder punkterne $A(0,10,0)$ og $B(0,0,10)$.

Bestem for hver af de to planer koordinatsættet til det punkt, hvori planen rører kuglen.

Opgave 6a (ca. 15 point)

Vis, at værdien af integralerne

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 (x+e^x)^2\,dx$$

er henholdsvis $\frac{1}{2}\ln 2$ og $\frac{1}{2}e^2+\frac{11}{6}$.

Opgave 6b (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{2x+3}\,, \quad x>3\ .$$

Bestem den stamfunktion F til f, for hvilken $F(5)=0$.

Bestem $\lim\limits_{t\to\infty}\int_4^t f(x)\,dx$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1994 **94-8-3**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 19. maj 1994 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 15 point
opgave 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 25 point
opgave 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En parabel har ligningen $y = \frac{1}{4}x^2 + 3x - 8$.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

b) Om en funktion f oplyses, at $f(2) = 3$ og $f'(2) = 4$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2,f(2))$.

c) Om en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi 12 oplyses det, at $P(X \leqq 10) = 0{,}38$.

Bestem $P(X \leqq 13)$.

d) Løs ligningen $\sin x = 0{,}8$, $x \in [0;2\pi]$.

e) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Tabellen viser aktiviteten af et radioaktivt stof målt på forskellige tidspunkter.

tid (timer)	0	10	20	30	40	50	60	70
aktivitet (becquerel)	4420	3510	2710	2200	1730	1380	1090	880

Gør rede for, at aktiviteten med tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion af tiden, og bestem en forskrift for denne funktion.

Bestem halveringstiden for aktiviteten.

Hvor lang tid går der fra den første måling, til aktiviteten er nået ned på 200 becquerel?

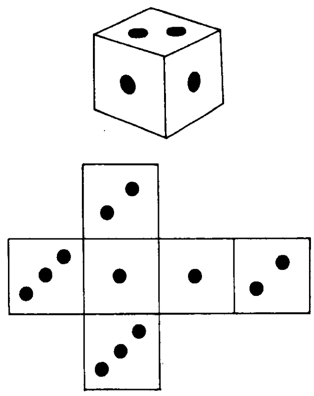
Opgave 3 (ca. 10 point)

Figuren viser en symmetrisk terning, der er indrettet således, at hvert af øjentallene 1, 2 og 3 forekommer på to af terningens seks sider. Et eksperiment består i at kaste to sådanne terninger på én gang og aflæse summen af øjentallene. Den stokastiske variabel X angiver denne sum.

Udfyld en tabel som nedenstående.

t	2	3	4	5	6
$P(X=t)$		$\frac{2}{9}$			

Bestem middelværdi og spredning for X.



»udfoldet« terning

Opgave 4 (ca. 25 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+2} \; .$$

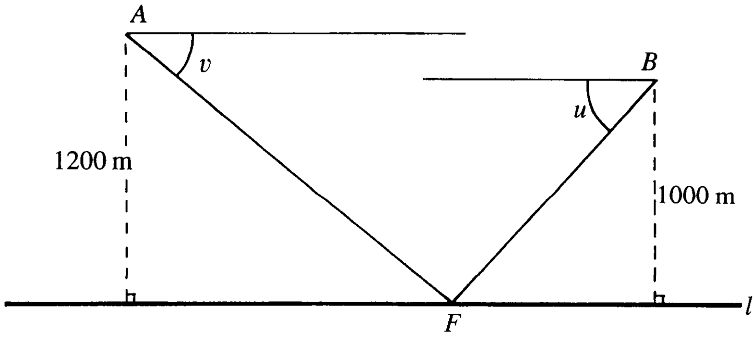
Undersøg funktionen f med hensyn til definitionsmængde, nulpunkter og fortegn.

Bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema for f.

Tegn grafen for f, og bestem værdimængden for f.

Opgave 5
(ca. 15 point)



To skibe A og B sejler med konstant hastighed parallelt med en kystlinje l. A sejler i afstanden 1200 meter fra l, mens B sejler i afstanden 1000 meter fra l. Klokken 12.00 er vinklen v mellem sejlretningen for A og sigtelinjen fra A til et fyrtårn F lig med 40°, mens det for B gælder, at den tilsvarende vinkel u er lig med 48°.

Beregn afstanden fra hvert af de to skibe til fyrtårnet.

Beregn afstanden mellem skibene.

Et halvt minut senere er $v = 42°$ og $u = 51°$.

Beregn det tidspunkt, hvor de to skibe passerer hinanden.

Opgave 6a
(ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen er tre punkter A, B og C bestemt ved

$$A(0,12)\ ,\quad B(2,1)\quad \text{og}\quad C(14,10)\ .$$

Bestem en ligning for den linje, der går gennem B og C.

Bestem en ligning for den cirkel, der har centrum i A, og som har linjen gennem B og C som tangent.

Opgave 6b
(ca. 10 point)

I et pengeinstitut indbetales hvert år 5000 kr. på en konto. Fra første indbetaling og indtil femte indbetaling er renten 8% p.a. Herefter er renten 6% p.a.

Bestem størrelsen af det beløb, som står på kontoen umiddelbart efter den sidste af i alt 10 indbetalinger.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 17. august 1994 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 10 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i rummet har en plan α ligningen

$$3x-2y+z-20=0 \ ,$$

og en linje l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathrm{R} \ .$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og α.

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem l og α.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er et parallelogram $ABCD$ bestemt ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad D(8,5) .$$

Bestem arealet af parallelogrammet.

Bestem gradtallet for hver af vinklerne i parallelogrammet.

På diagonalen AC ligger et punkt E, således at

$$|AE| = \tfrac{3}{5}|AC| .$$

Bestem koordinatsættet til E.

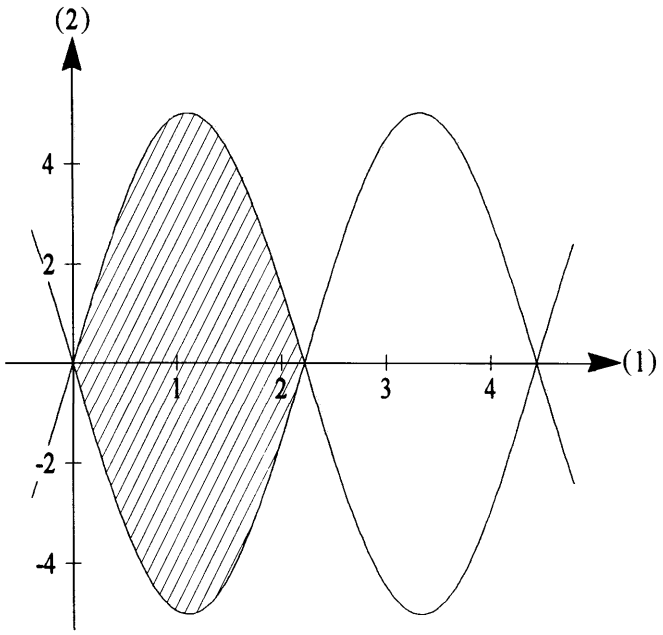
Opgave 3 (ca. 15 point)

Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y$$

har to løsninger, hvis grafer indeholder punktet $O(0,0)$, og som begge har størsteværdien 5.

Figuren viser en skitse af de to grafer.



Bestem en forskrift for hver af de to løsninger.

Gør rede for, at arealet af det skraverede område er $10\sqrt{2}$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I 1991 var verdens befolkningstal 5,4 milliarder. I en prognose forudsætter man, at det maksimale antal mennesker, der kan leve på jorden, er 20 milliarder. Endvidere går man ud fra, at den hastighed, hvormed befolkningstallet vokser til tiden t, er proportional med forskellen mellem de 20 milliarder og befolkningstallet $N(t)$.
Tiden t måles i år efter 1991, og $N(t)$ måles i milliarder.

Bestem proportionalitetsfaktoren, idet befolkningstallets væksthastighed i 1991 var 0,077 milliarder pr. år, og opstil en differentialligning, som $N(t)$ må tilfredsstille.

Bestem en forskrift for $N(t)$.

Opgave 5 (ca. 10 point)

Bestem hvert af de ubestemte integraler

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx \quad \text{og} \quad \int \frac{1+x^2}{x^3}\,dx\ .$$

Opgave 6 (ca. 20 point)

I et koordinatsystem er to linjer l og m bestemt ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathsf{R}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathsf{R}\ .$$

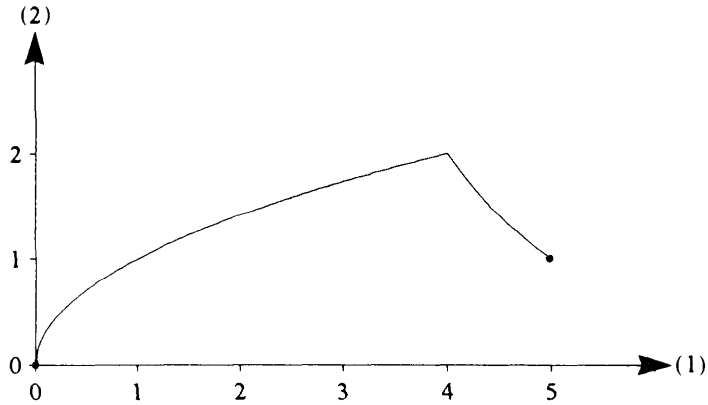
Vis, at linjerne l og m er vindskæve.

Beregn afstanden mellem l og m.

En plan α placeres således, at den er parallel med begge linjer, og således, at linjerne ligger på hver sin side af α med samme afstand til α.

Bestem en ligning for α.

Opgave 7a
(ca. 15 point)



Figuren viser grafen for funktionen f bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{for} \quad 0 \leqq x \leqq 4 \\ 32 \cdot 2^{-x} & \text{for} \quad 4 < x \leqq 5 \ . \end{cases}$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen med ligningen $x = 5$ en punktmængde M, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 7b
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^3 - t \end{aligned} \quad , \quad -2 \leqq t \leqq 2 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser samt til hvert af de punkter, hvori kurven har en tangent parallel med en af koordinatsystemets akser.

Tegn kurven.

Kurven afgrænser en punktmængde, der har et areal.

Beregn dette areal.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1994 **94-8-4**

MATEMATISK LINJE

OBLIGATORISK NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 25. august 1994 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 10 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 10 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Løs uligheden $x^2 - 9x + 14 < 0$.

b) En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 10 og sandsynlighedsparameter 0,13.

Beregn $P(X = 3)$.

c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

d) En linje l har ligningen $y = \frac{3}{4}x + 5$.

Bestem en ligning for den linje m, der går gennem $P(1,2)$, og som står vinkelret på l.

e) Et beløb indsættes på en konto og vokser i løbet af 3 år til 13 891,50 kr. Renten er i hele perioden 5% p.a.

Bestem det indsatte beløb.

Opgave 2 (ca. 10 point)

En stokastisk variabel X er normalfordelt, og der gælder, at

$$P(X \leqq 8) = 0{,}31 \quad \text{og} \quad P(X \geqq 15) = 0{,}22 \ .$$

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(5 \leqq X \leqq 10)$.

Opgave 3 (ca. 10 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin x + \ln x \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,f(1))$.

Bestem afstanden fra punktet $O(0,0)$ til denne tangent.

Opgave 4 (ca. 15 point)

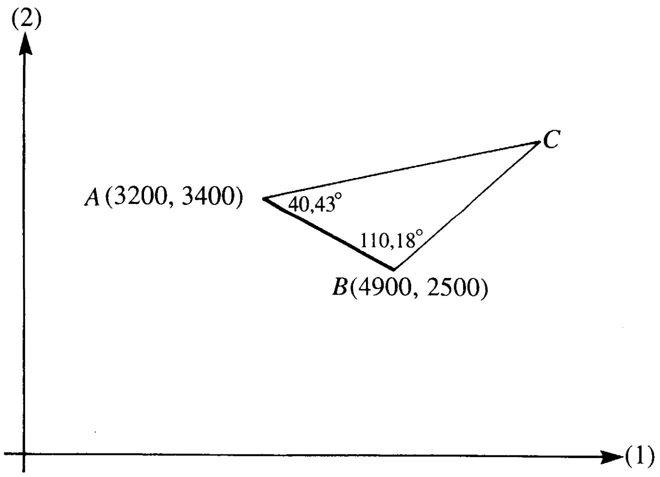
I en trafikanalyse indgår følgende model for antallet $N(v)$ af biler, der pr. minut kan passere en bro:

$$N(v) = \frac{17v}{0{,}008\,v^2 + 0{,}2v + 4} \ ,$$

hvor v (km/time) er den fart, bilerne kører med.

Vis, at funktionen N har en størsteværdi, og bestem den fart, der ifølge modellen tillader flest biler at passere broen pr. minut.

Opgave 5
(ca. 15 point)



Ved landmåling bestemmer man en række målepunkters beliggenhed i et fastlagt koordinatsystem.
Koordinatsættene til to målepunkter A og B er blevet bestemt til $A(3200, 3400)$ og $B(4900, 2500)$.
Måling af vinklerne mellem linjestykket AB og sigtelinjerne fra henholdsvis A og B til et tredje målepunkt C giver følgende resultat:

$$\angle ABC = 110{,}18^\circ \quad \text{og} \quad \angle BAC = 40{,}43^\circ \ .$$

Beregn hver af afstandene $|AB|$ og $|BC|$.

Beregn den spidse vinkel mellem linjestykket AB og linjen gennem B parallel med førsteaksen.

Beregn koordinatsættet til C.

Opgave 6
(ca. 10 point)

I det viste udklip gives et eksempel på, hvad det koster at forrente og afdrage et lån på 9000 kr.

Gør rede for, at den månedlige rente er 2,0%.

Umiddelbart efter betaling af den 30. ydelse er der en restgæld, som skal afvikles med de sidste 30 ydelser.

Beregn størrelsen af denne restgæld.

Opgave 7a (ca. 15 point)

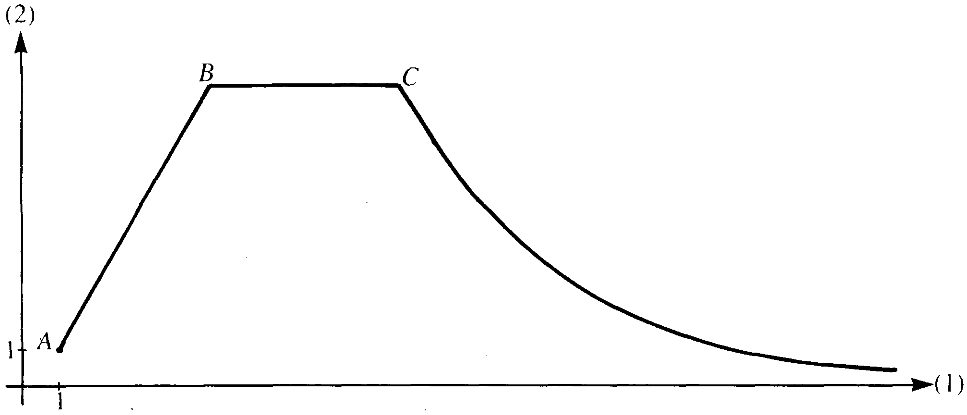
En cirkel har centrum i punktet $C(1,2)$ og går gennem punktet $A(2,4)$.

Bestem en ligning for cirklen.

Bestem koordinatsættet til hvert af cirklens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Beregn arealet af den del af cirklen, der ligger i 1. kvadrant.

Opgave 7b (ca. 15 point)



Figuren viser i et sædvanligt koordinatsystem en skitse af grafen for en funktion f med definitionsmængde $[1;\infty[$.
Grafen går gennem punkterne $A(1,1)$, $B(5,8)$ og $C(10,8)$. For $1 \leqq x \leqq 10$ er f stykkevis lineær, og for $x \geqq 10$ er f eksponentielt aftagende med halveringskonstant 3.

Bestem en forskrift for f.

Løs uligheden $f(x) \leqq \frac{1}{2}$.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1995 **95-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 18. maj 1995 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2 .... ca. 15 point
hver af opgaverne 3 og 4 .... ca. 20 point
hver af opgaverne 5 og 6 .... ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er givet vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder et parallelogram.

Beregn arealet af dette parallelogram.

Beregn længden af hver af diagonalerne i parallelogrammet.

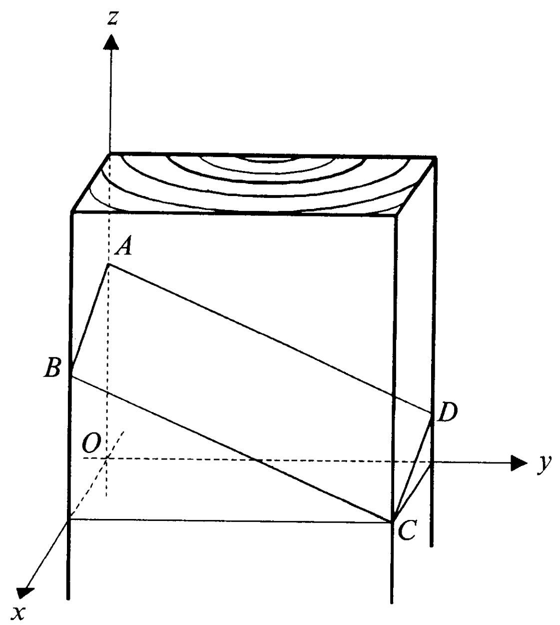
Bestem tallene s og t, således at $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^1 (x^3 + 2x)\,dx\ , \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^3}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(3x)\,dx\ .$$

Opgave 3 (ca. 20 point) Figuren viser et bræt, hvis sider er plane og parallelle to og to. Brættet er indtegnet i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. En af siderne ligger i xz-planen, og en anden af siderne ligger i yz-planen.



Der lægges et skråt snit i brættet. Snittet er bestemt ved den plan α, der indeholder punkterne $A(0,0,4)$, $B(1,0,3)$ og $C(1,5,0)$.
Snitfladen mellem planen α og brættet er et parallelogram $ABCD$.

Bestem en ligning for planen α.

Bestem den spidse vinkel mellem α og yz-planen.

Bestem koordinatsættet til punktet D.

Bestem arealet af parallelogrammet $ABCD$.

Bestem parallelogrammets vinkler.

Opgave 4 (ca. 20 point)

I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^2 + 2 \\ y = 9t - t^3 \quad , \quad t \in \mathrm{R} \ .$$

Punktet $P(11,0)$ er et dobbeltpunkt på kurven, det vil sige et punkt, der svarer til to forskellige værdier af t.

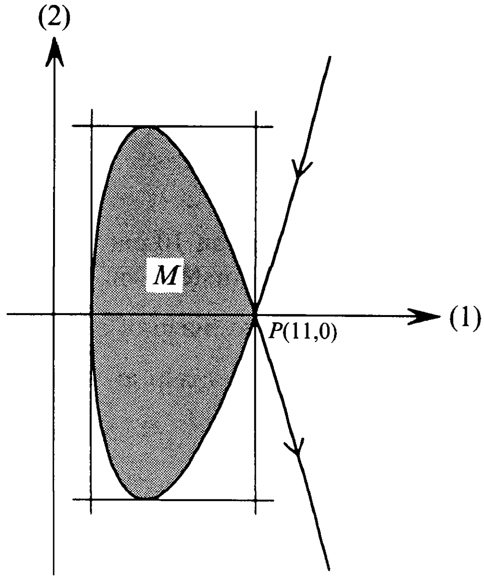
Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem kurvens to tangenter i P.

Kurven har tre tangenter, der hver for sig er parallel med en af koordinatsystemets akser. Disse tre tangenter og linjen med ligningen $x = 11$ danner et rektangel (se figuren).

Bestem den eksakte værdi af arealet af dette rektangel.

Kurven afgrænser en punktmængde M, der har et areal.

Bestem den eksakte værdi af dette areal.



Opgave 5 (ca. 15 point)

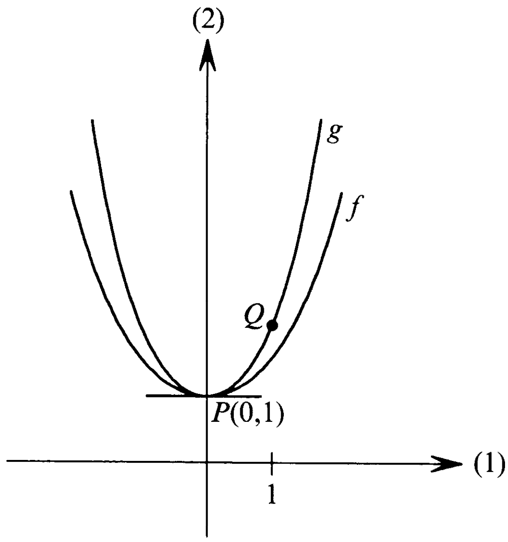
For ethvert tal a, hvor $a > 0$, betragtes differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = ay \ .$$

Figuren viser to løsningskurver til differentialligningen $(*)$ hørende til hver sin værdi af a.

Funktionen f er løsning til den differentialligning, hvor $a = 1$. Grafen for f går gennem punktet $P(0,1)$ og har vandret tangent i dette punkt.

Bestem en forskrift for f.



Grafen for funktionen g går også gennem P og har vandret tangent i dette punkt. Desuden går grafen for g gennem punktet $Q(1,2)$.

Bestem den eksakte værdi af det tal a, for hvilket g er løsning til differentialligningen $(*)$.

Opgave 6a (ca. 15 point)

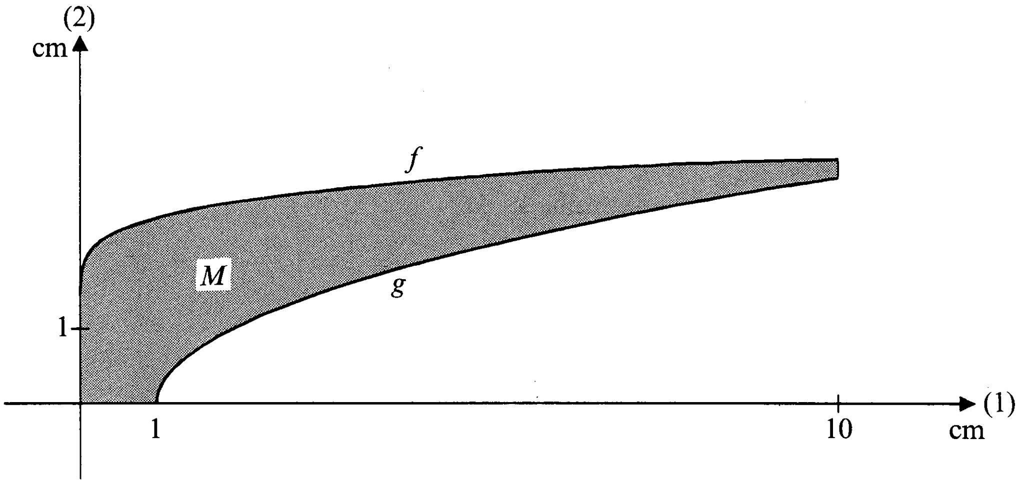
I et koordinatsystem med enheden 1 cm på begge akser er en punktmængde M afgrænset af førsteaksen, andenaksen, linjen med ligningen $x = 10$ og graferne for funktionerne f og g, hvor

$$f(x) = 1{,}5 + \sqrt[4]{x}$$
$$g(x) = \sqrt{x-1}\ .$$

Formen af en 10 cm høj vase fremkommer ved, at punktmængden M drejes 360° omkring førsteaksen.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner, hvor mange cm^3 vand der kan være i vasen.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner, hvor mange cm^3 glas vasen består af.



Opgave 6b (ca. 15 point)

Tre funktioner f, g og h er løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2\ .$$

Bestem f, når det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $A(4,1)$.

Bestem g, når det oplyses, at grafen for g går gennem punktet $B(4,-1)$.

Bestem h, når det oplyses, at grafen for h går gennem punktet $C(4,0)$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1995 **95-8-2**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Fredag den 26. maj 1995 kl. 9.00–13.00

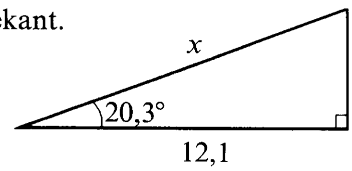
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 10 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Beregn siden x i den viste trekant.



b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

c) En parabel har ligningen $y = x^2 - 4x + 7$.

Bestem en ligning for parablens tangent i punktet $P(1,4)$.

d) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 5,4 og spredning 1,3.

Bestem $P(3{,}0 \leqq X \leqq 5{,}2)$.

e) I de første 3 år af en 7-års periode er renten på en konto 5% p.a. I de følgende 4 år er renten 1,8% p.a.

Beregn den gennemsnitlige årlige rente i procent for 7-års perioden.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en linje l bestemt ved

$$l: \; y = \tfrac{2}{3}x + 4 \; .$$

En linje m går gennem punktet $A(-1,2)$ og er parallel med l.

Bestem en ligning for m.

En linje n går gennem punktet $B(3,-1)$ og er vinkelret på linjen l.

Bestem en ligning for n.

En cirkel med centrum i punktet $C(2,10)$ har linjen l som tangent.

Bestem en ligning for denne cirkel.

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et bestemt lotteri er sandsynligheden 10% for, at en lodseddel giver gevinst. Der købes 12 lodsedler.

Bestem sandsynligheden for, at ingen af de 12 lodsedler giver gevinst.

Bestem sandsynligheden for, at mindst 2 af de 12 lodsedler giver gevinst.

Hvor mange lodsedler skal man mindst købe, hvis sandsynligheden skal være større end 50% for, at mindst 2 af lodsedlerne giver gevinst?

Opgave 4 (ca. 10 point)

Når ukrudtsmidlet mechlorprop anvendes i naturen, nedbrydes det med tiden. Ved konstant jordtemperatur gælder, at den ikke nedbrudte del aftager eksponentielt som funktion af tiden. Halveringstiden for mechlorprop i denne proces afhænger af jordtemperaturen, som det fremgår af skemaet:

Jordtemperatur (°C)	Halveringstid (døgn)
5	20
10	12
20	3

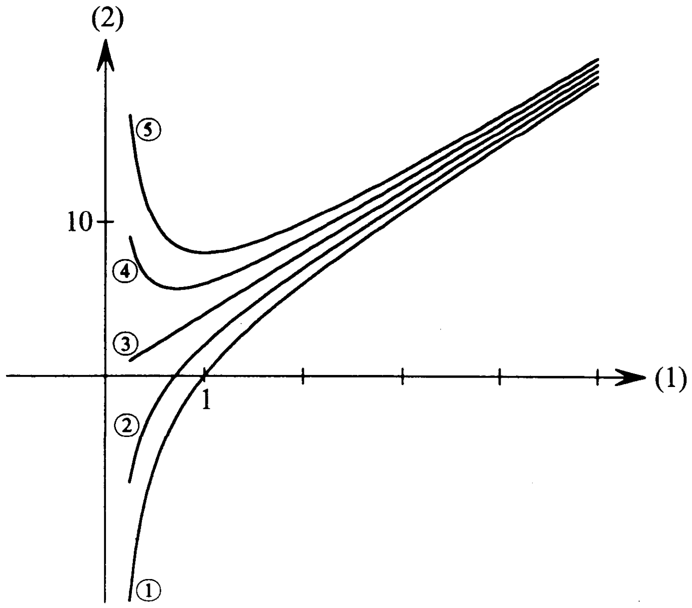
Kilde: Miljøforskning, Nyhedsbrev nr. 10, 1994.

En mark sprøjtes med 8 kg mechlorprop i en periode, hvor jordtemperaturen er 5°C.

Hvor mange procent af den oprindelige mængde ukrudtsmiddel er nedbrudt efter 10 døgn?

Hvor lang tid ville det tage at nedbryde den samme procentdel af ukrudtsmidlet, hvis jordtemperaturen var 10°C?

Opgave 5 Figuren viser en computerudskrift af graferne for nogle funktioner.
(ca. 20 point)



Den graf, der har nr. 4, er graf for funktionen

$$f(x) = \frac{2}{x} + 4x \ , \quad x > 0 \ .$$

Beregn denne funktions mindsteværdi.

Enhver af graferne på figuren er graf for en funktion af typen

$$f(x) = \frac{a}{x} + 4x \ , \quad x > 0 \ ,$$

hvor a er et tal. For grafen med nr. 4 er a således lig med 2.

Bestem a for den funktion, hvis graf går gennem punktet med koordinatsættet (1,0).

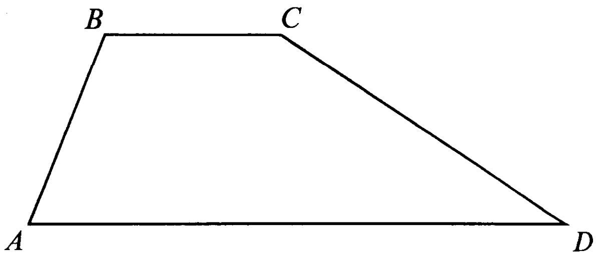
Grafen med nr. 5 har vandret tangent i et punkt, der har førstekoordinat 1.

Bestem a for den tilhørende funktion.

Vis, at alle grafer for funktioner af den angivne type har samme skrå asymptote, og bestem en ligning for denne.

Bestem de værdier af a, for hvilke den tilhørende funktion er voksende i hele sin definitionsmængde.

Opgave 6a
(ca. 15 point)



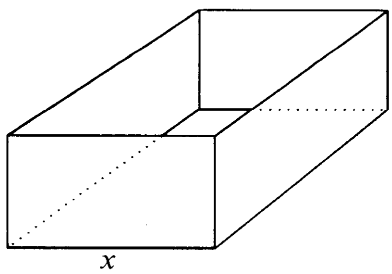
I trapezet $ABCD$ er siden AD parallel med siden BC, $\angle A = 68°$, $|AD| = 12$, $|AB| = 5$ og $|BC| = 4$.

Beregn den ukendte side og de ukendte vinkler i trapezet.

Diagonalernes skæringspunkt kaldes S.

Beregn længden af linjestykket AS.

Opgave 6b
(ca. 15 point)



En kasse uden låg skal være 1,6 gange så lang, som den er bred, og dens rumfang skal være 150 dm^3.

Bestem kassens overfladeareal som funktion af x, når x er kassens bredde, målt i dm.

Bestem kassens bredde, længde og højde, således at overfladearealet bliver mindst muligt.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 16. august 1995 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 10 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 7	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er der givet et punkt $P(2,-3,2)$ og en plan α med ligningen

$$2x-2y-z+19=0\ .$$

En kugle K har centrum i P og tangerer α.

Bestem en ligning for K.

Tangentplanen α rører K i punktet Q.

Bestem koordinatsættet til Q.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \ln t \\ y &= t^2-3t+2 \end{aligned} \quad , \quad \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 4\ .$$

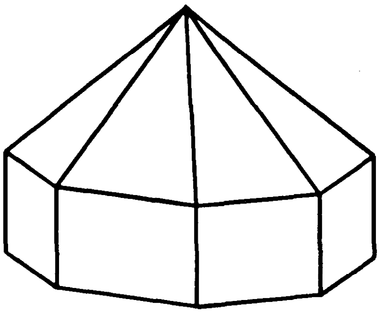
Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter på kurven, hvori den skærer en af koordinatakserne eller har en tangent, der er parallel med en af koordinatakserne.

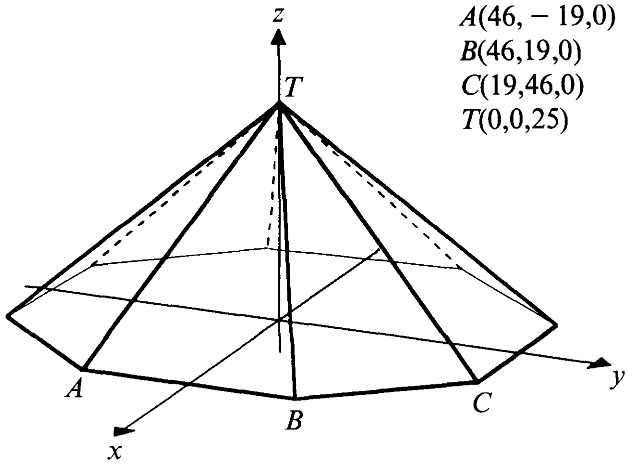
Tegn kurven.

Kurven afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Opgave 3
(ca. 15 point)





Ovenfor ses en skitse af en ottekantet bygning. Endvidere er bygningens tag indtegnet i et koordinatsystem.

Beregn arealet af tagfladen BTC.

Beregn vinklen mellem tagfladerne ATB og BTC.

Opgave 4
(ca. 15 point)

I en plan er der givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, om hvilke det oplyses, at

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 5 \quad \text{og} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 7 .$$

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ betegnes $\overrightarrow{a_b}$, og projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ betegnes $\overrightarrow{b_a}$.

Beregn $|\overrightarrow{a_b}+\overrightarrow{b_a}|$.

Opgave 5
(ca. 10 point)

Det oplyses, at for $n \geqq 2$ er

$$\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,(\sin x)^{n-1} + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}\,dx .$$

Beregn den eksakte værdi af integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^5\,dx .$$

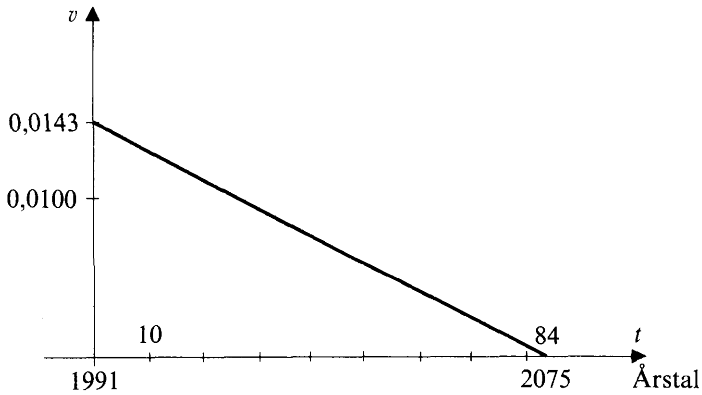
Opgave 6 (ca. 20 point)

I 1991 var verdens befolkning nået op på 5,4 milliarder mennesker og var inden for det sidste år vokset med 1,43%. FN's Befolkningsfond håber, at befolkningstilvæksten kan nedbringes til 0% i 2075.

I en model betegner N (milliarder) størrelsen af verdens befolkning til tiden t (antal år efter 1991), og den relative væksthastighed v til tiden t er bestemt ved

$$v = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} \; .$$

Det antages i modellen, at v aftager lineært fra 0,0143 i 1991 til 0 i 2075 (se figuren).



Bestem v som funktion af t, og benyt dette til at opskrive en differentialligning, som N må tilfredsstille.

Bestem N som funktion af t.

Bestem ud fra modellen størrelsen af verdens befolkning i 2075.

Opgave 7a (ca. 10 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_{e}^{2e} \frac{1}{x \ln x}\, dx \quad \text{og} \quad \int_{e}^{2e} \frac{\ln x}{x^3}\, dx \; .$$

Opgave 7b (ca. 10 point)

I et koordinatsystem er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Vis, at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder et kvadrat.

Om en vektor $\vec{c}$ oplyses det, at $\vec{c}$ sammen med $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder en terning.

Bestem de koordinatsæt, som $\vec{c}$ kan have.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 28. august 1995 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 10 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En kapital vokser i løbet af 7 terminer til 12029,04 kr. Renten er i hele perioden 6% pr. termin.

Hvor stor var den oprindelige kapital?

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = 3^{2x+1}$.

c) En symmetrisk terning kastes 10 gange.

Bestem sandsynligheden for at få mindst 3 seksere.

d) Løs uligheden $3x^2 + 7x \geqq 0$.

e) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 10. Desuden er $P(X \geqq 15) = 0{,}1$.

Bestem spredningen for X.

Opgave 2 (ca. 10 point) I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er der givet punkterne $A(4,1)$ og $B(4,-1)$. Linjen gennem O og A kaldes l, og linjen gennem O og B kaldes m. En cirkel har både l og m som tangenter, og tangenternes røringspunkter med cirklen er A og B.

Bestem en ligning for cirklen.

Opgave 3 (ca. 15 point) Arbejdsprocesser udføres ofte mere effektivt, efterhånden som udøveren af arbejdet får større erfaring.
I en model for arbejdsprocessers effektivitet gælder, at effektiviteten $f(t)$ som funktion af den tid t (uger), udøveren har været beskæftiget med arbejdet, er givet ved

$$f(t) = 1{,}00 - 0{,}60 \cdot 0{,}9^t \quad , \quad t \geqq 0 \ .$$

Vis, at funktionen f er voksende.

Vis, at grafen for f har en asymptote, og bestem en ligning for denne.

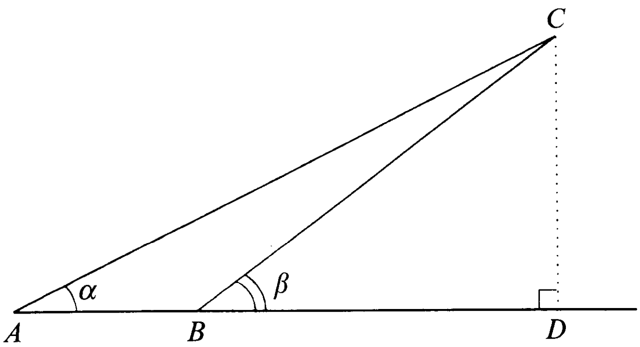
Tegn grafen for f.

Hvor længe skal udøveren have været beskæftiget med arbejdet, før effektiviteten er 0,95?

Opgave 4 (ca. 10 point) Det astronomiske fænomen »lysende natsky« kan iagttages i Danmark i perioden juni til august. En enkel metode til at bestemme afstanden fra jorden til en lysende natsky består i, at to observatører A og B måler vinklen mellem vandret og sigtelinjen til skyen C. De to observatører er anbragt, så punktet D ligger lodret under C og på den vandrette linje gennem A og B.

Beregn afstanden $|DC|$ fra jorden til skyen, når der foreligger følgende målinger:

$$\alpha = 27{,}2^\circ \quad , \quad \beta = 37{,}6^\circ \quad \text{og} \quad |AB| = 50 \text{ km}.$$



Kilde: Astronomisk Tidsskrift 1994/2.

Opgave 5 (ca. 10 point) En funktion f er bestemt ved

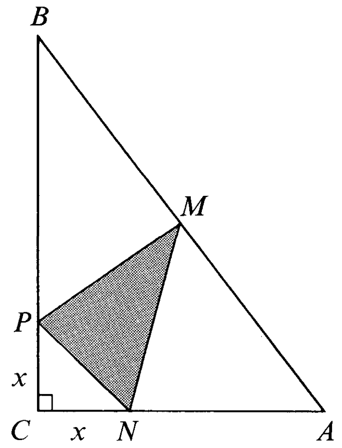
$$f(x) = x^8 - 16x \quad , \quad x \in [0;2] \; .$$

Bestem værdimængden for f.

Opgave 6 (ca. 15 point) I en retvinklet trekant ABC er siderne $|CA| = 9$ og $|CB| = 12$. Punktet M er midtpunktet af AB. Punkterne N og P placeres på henholdsvis CA og CB, så $|CN| = |CP| = x$ (se figuren).

Bestem arealet af trekant MNP som funktion af x.

Beregn den værdi af x, der giver det største areal af trekant MNP.



Opgave 7a (ca. 15 point) Udetemperaturens svingninger i løbet af et døgn i en solrig første halvdel af maj kan tilnærmelsesvis angives ved funktionen

$$f(t) = 11{,}0 + 4{,}9 \sin\left(\tfrac{\pi}{12}(t-8)\right) \quad , \quad 0 \leqq t \leqq 24 \; ,$$

hvor t er tiden, målt i timer efter midnat, og $f(t)$ er temperaturen, målt i °C.

Bestem den højeste og den laveste temperatur samt de tidspunkter i døgnet, hvor de forekommer.

Bestem de tidspunkter i døgnet, hvor temperaturen er 13°C.

Skitsér grafen for f.

Kilde: Poul Becher: Varme og ventilation, Teknisk Forlag, 1971.

Opgave 7b (ca. 15 point)

En stokastisk variabel X har følgende sandsynlighedsfordeling:

t	0	1	2	3
$P(X=t)$	0,1	0,3	0,5	0,1

Bestem middelværdi og spredning for X.

En binomialfordelt stokastisk variabel Y med sandsynlighedsparameter p antager samme værdier som X og har samme middelværdi som X.

Bestem p.

En anden binomialfordelt stokastisk variabel Z antager samme værdier som X og har samme spredning som X.

Bestem de mulige værdier af sandsynlighedsparameteren for Z.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1995 **95-8-1 V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 6. december 1995 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 25 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I en plan er der givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, om hvilke det oplyses, at

$$|\vec{a}| = 5 \ , \ |\vec{b}| = 2 \quad \text{og} \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ \ .$$

Beregn $\vec{a} \cdot \vec{b}$ og arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem tallet $t \in \mathrm{R}$, således at $\vec{a} \perp (\vec{a} + t\vec{b})$.

Bestem de værdier af t, for hvilke arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{a} + t\vec{b}$, er lig med 20.

Opgave 2 (ca. 15 point)

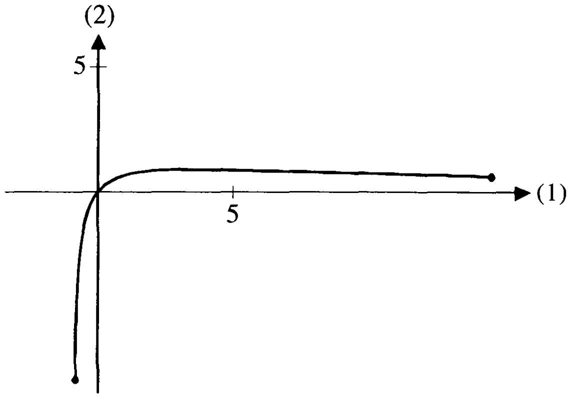
Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^1 e^{-x} dx \ , \quad \int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 x e^{-x} dx \ .$$

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, så det til tidspunktet t gælder, at

$$x = 4t^2 - 1$$
$$y = \frac{2t-1}{t^2} \quad , \quad t \in [\tfrac{1}{4};2] \ .$$



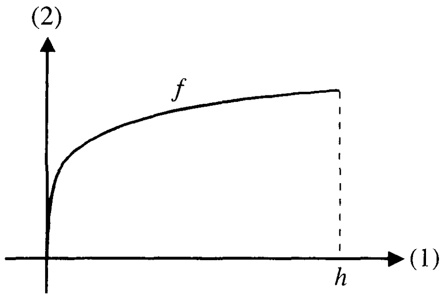
Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer koordinatakserne, eller hvori banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

Bestem vinklen mellem førsteaksen og hastighedsvektoren til tidspunktet $t = \frac{1}{2}$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Formen af en skål fremkommer ved en drejning på 360° om førsteaksen af grafen for funktionen

$$f(x) = x^{0,2} \quad , \quad x \in [0;h] \ .$$



Rumfangsberegningerne i denne opgave skal foretages ved hjælp af stamfunktioner.

Beregn skålens rumfang, når højden h er lig med 1.

Beregn h, så skålens rumfang bliver 4.

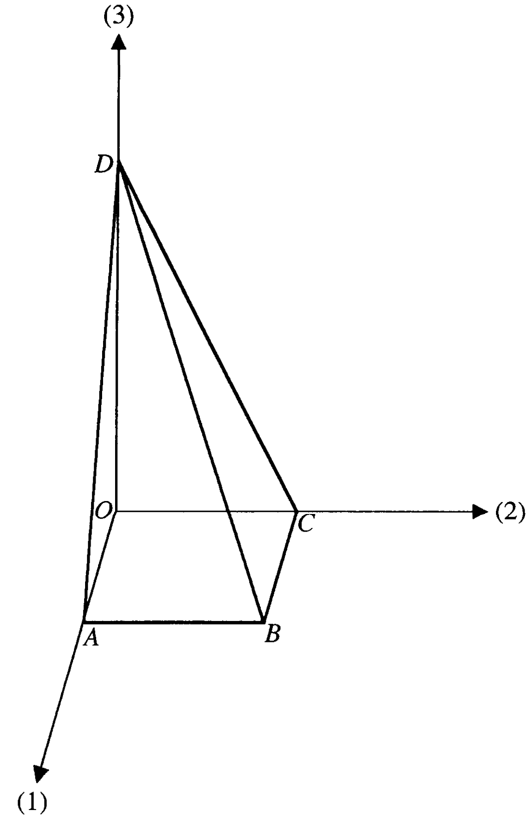
Formen af en skål med flad bund fremkommer ved en drejning på 360° om førsteaksen af grafen for funktionen

$$g(x) = x^{0,2} + a \quad , \quad x \in [0;1] \ ,$$

hvor a er et positivt tal.

Beregn a, så denne skåls rumfang bliver 4.

Opgave 5
(ca. 25 point)



$O(0,0,0)$
$A(1,0,0)$
$B(1,1,0)$
$C(0,1,0)$
$D(0,0,2)$

Figuren viser en pyramide $OABCD$ i et koordinatsystem.

Bestem arealet af pyramidens sideflade ABD.

Vis, at den plan α, der indeholder sidefladen ABD, har ligningen $2x + z - 2 = 0$, og bestem afstanden fra O til α.

Bestem koordinatsættet til projektionen af C på α.

Bestem vinklen mellem sidefladerne ABD og BCD i pyramiden.

Bestem en ligning for den kugle, som har centrum inde i pyramiden, og som tangeres af pyramidens bund og de fire sideflader.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^7}{5^y}$$

den løsning f, hvis graf indeholder punktet $P(1,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P.

Opgave 6b (ca. 15 point) I en model for bakteriesygdommes udbredelse går man ud fra, at den funktion $I(t)$, der angiver antallet af smittede til tiden t (målt i uger) er løsning til en differentialligning af formen

$$\frac{dI}{dt} = I(rN - k - rI) \ ,$$

hvor N, r og k er konstanter. N er befolkningens størrelse, og r og k afhænger af sygdommens smitsomhed og infektionens varighed.
I en bestemt situation er

$$N = 5 \cdot 10^6 \ , \quad r = 2 \cdot 10^{-6} \quad \text{og} \quad k = 8 \ .$$

Det oplyses endvidere, at antallet af smittede til tidspunktet $t = 0$ er 10^4.

Bestem en forskrift for I.

Bestem den øvre grænse for antallet af smittede.

Bestem det tidspunkt, hvor 10% af befolkningen er blevet smittet.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1995 **95-8-2 V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 11. december 1995 kl. 9.00–13.00

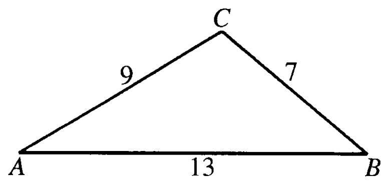
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point

Opgave 1

(ca. 25 point)



a) Beregn $\angle A$ i den viste trekant.

b) Beregn koordinatsættet til toppunktet for parablen med ligningen

$$y = -\tfrac{1}{3}x^2 + 2x + 3 \ .$$

c) Løs ligningen $3{,}2 \cdot x^{-5} = 4{,}1$.

d) I en tabel over indekstal for prisen på kaffe i perioden 1973–1986 er 1980 benyttet som basisår. Indekstallet for kaffeprisen i 1986 var ifølge tabellen 121.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i kaffeprisen i perioden 1980–1986.

e) En stokastisk variabel X med middelværdi 3 har sandsynlighedsfordelingen

t	-1	2	10
$P(X=t)$	0,2	0,6	0,2

Beregn spredningen for X.

Opgave 2 (ca. 15 point)

To linjer l og m er bestemt ved

$$l:\ y = \tfrac{1}{2}x + 5$$
$$m:\ y = -\tfrac{1}{2}x + 1\ .$$

Skæringspunktet mellem l og andenaksen kaldes P.
Skæringspunktet mellem m og andenaksen kaldes Q.
Skæringspunktet mellem l og m kaldes R.

Beregn sider og vinkler i trekant PQR.

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem højden fra P og siden QR.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3(\sin x)^2\ ,\quad x \in [-\tfrac{\pi}{4}; \tfrac{3\pi}{4}]\ .$$

Bestem $f'(x)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$.

Bestem monotoniforhold og værdimængde for f.

Opgave 4 (ca. 15 point)

En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 7 og spredning 2.

Bestem $P(5 \leqq X \leqq 8)$.

Om en anden normalfordelt stokastisk variabel Y oplyses, at $P(Y \leqq 6) = 0{,}60$ og $P(Y \leqq 8) = 0{,}80$.

Bestem middelværdi og spredning for Y.

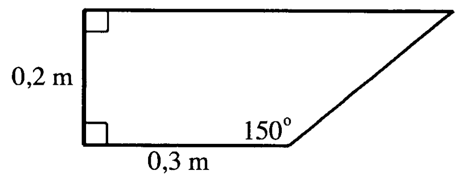
Bestem tallet a, således at $P(X \leqq a) = P(Y \leqq a)$.

Opgave 5 (ca. 20 point) Den såkaldte hydrauliske diameter d for en kanal bestemmes ud fra kanalens tværsnit, idet

$$d = \frac{4 \cdot \text{arealet af kanalens tværsnit}}{\text{omkredsen af kanalens tværsnit}} .$$

Figur 1 viser tværsnittet af en kanal.

Beregn den hydrauliske diameter for denne kanal.

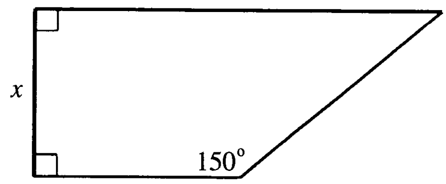


Figur 1

Figur 2 viser tværsnittet af en kanal, hvor arealet af tværsnittet er 1 m^2.

Vis, at denne kanals hydrauliske diameter kan udtrykkes ved siden x på følgende måde:

$$d = \frac{4}{\frac{2}{x} + 3x} ,$$



Figur 2

hvor x og d er målt i meter.

Beregn den værdi af x, for hvilken kanalens hydrauliske diameter er størst.

Opgave 6a (ca. 10 point) Et stereoanlæg, hvis kontantpris er 12995 kr., købes på afbetaling. De 12995 kr. afbetales over 60 måneder med en fast månedlig ydelse på 365 kr. Første ydelse betales en måned efter købet.

Bestem den månedlige rente i procent (1 dec.) ved denne afbetalingshandel.

Bestem den årlige rente i procent svarende til den fundne månedlige rente.

Opgave 6b (ca. 10 point) Tabellen viser udviklingen i antallet af indbyggere i New York i perioden 1790–1900.

år	1790	1800	1820	1840	1860	1880	1900
indbyggerantal i tusinder	33	60	124	312	813	1912	3437

Indtegn tabellens oplysninger i et passende koordinatsystem, og gør herved rede for, at indbyggerantallet i tusinder med tilnærmelse er vokset eksponentielt i den betragtede periode.

Bestem en forskrift for en eksponentielt voksende funktion f, der beskriver indbyggerantallet i tusinder som funktion af tiden, målt i år efter 1790.

Bestem fordoblingskonstanten for f.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR 1996 **95-8-3 V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 22. februar 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 15 point
opgave 3	ca. 10 point
hver af opgaverne 4, 5, 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er en kugle bestemt ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 6 = 0 \ .$$

Bestem koordinatsættet til kuglens centrum C.

Den rette linje gennem punkterne $P(0,1,2)$ og $Q(1,2,3)$ skærer kuglen i to punkter A og B.

Bestem koordinatsættet til hvert af disse punkter.

Beregn arealet af trekant ABC.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-3 \end{pmatrix} ,$$

hvor t er et tal.

Bestem t, således at de to vektorer er parallelle.

Bestem de værdier af t, for hvilke $|\vec{b}| = \sqrt{17}$, og beregn for den største af disse t-værdier gradtallet for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 3 (ca. 10 point)

De to planer, der er givet ved ligningerne

$$2x + y - 3z + 8 = 0 \quad \text{og} \quad 5x + 3y + 4z - 5 = 0 \ ,$$

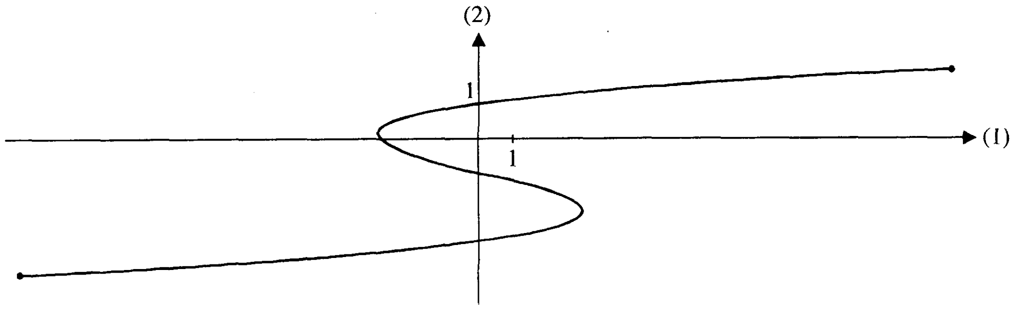
skærer hinanden i en linje l.

Bestem en parameterfremstilling for l.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x = t^3 - 4t \\ y = t - 1 \end{matrix} \quad , \quad -3 \leqq t \leqq 3 \ .$$



Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med koordinatsystemets andenakse.

Beregn t-værdien til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (2x - 6x^2)(2y + 4)$$

den løsning f, for hvilken $f(1) = -3$.

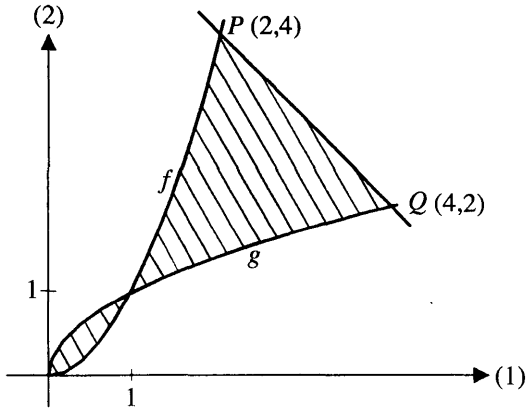
Opgave 6 (ca. 15 point)

Figuren viser graferne for funktionerne f og g bestemt ved

$$f(x) = x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

samt linjen gennem punkterne $P(2,4)$ og $Q(4,2)$.
Den på figuren skraverede punktmængde drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det derved fremkomne omdrejningslegeme.



Opgave 7a (ca. 15 point)

Vis, at enhver af funktionerne

$$f(x) = c_1 x\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-x} \ , \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R}$$

er løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = 0 \ .$$

Bestem c_1 og c_2, således at $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$.

Opgave 7b (ca. 15 point)

I et bestemt oliefelt opgjorde man i perioden 1960–1985 den årlige produktion af gas. Det viser sig, at produktionshastigheden, målt i m^3 pr. år, kan beskrives ved

$$f(t) = 6{,}0 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}052^t \ , \quad 0 \leqq t \leqq 25 \ ,$$

hvor t betegner antallet af år efter 1960.

Den gasmængde, der i alt blev produceret i de første T år efter 1960, kan beregnes som

$$\int_0^T f(t)\,dt \ .$$

Beregn ved hjælp af stamfunktion den gasmængde, der i alt blev produceret i perioden 1960–1985.

Hvor mange år gik der efter 1960, før man havde produceret halvdelen af denne gasmængde?

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN FEBRUAR 1996 **95-8-4 V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Tirsdag den 27. februar 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, 4, 5 og 6 . . . . ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) En cirkel har ligningen $x^2 + y^2 + 10x - 14y - 7 = 0$.

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

b) Funktionen $f(x) = ba^x$ har halveringskonstant 8.

Beregn a.

c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{\cos x}{2x + 17}$.

d) Bestem en ligning for den skrå asymptote til grafen for

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 + 1} \ .$$

e) Hver måned indbetales et fast beløb på en konto. Renten er 0,8% pr. måned.

Hvor stort skal det faste beløb være, hvis der umiddelbart efter den 12. indbetaling skal stå 10 000 kr. på kontoen?

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en linje l og en parabel P bestemt ved

$$l\colon\ y = \tfrac{3}{2}x - 5$$

$$P\colon\ y = -x^2 + 6x - 7\ .$$

Tegn linjen og parablen.

Beregn afstanden fra parablens toppunkt til linjen.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x$.

Bestem $f'(x)$.

Bestem en ligning for tangenten t_1 til grafen for f i punktet $O(0,0)$.

Grafen for f har en anden tangent t_2, der har samme hældningskoefficient som t_1.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet for tangenten t_2.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Koncentrationen af et bestemt medicinsk præparat i blodet hos en patient er en funktion af tiden t.
I en model er denne funktion givet ved

$$f(t) = 0{,}3\,t\,e^{-1{,}1t}\ ,\quad t \geqq 0\ ,$$

hvor t måles i timer og $f(t)$ i mg/L.

Vis, at $f'(t) = 0{,}3\,(1 - 1{,}1\,t)\,e^{-1{,}1t}$.

Beregn koncentrationens størsteværdi.

Med hvilken hastighed ændrer koncentrationen sig til tiden $t = 2$?

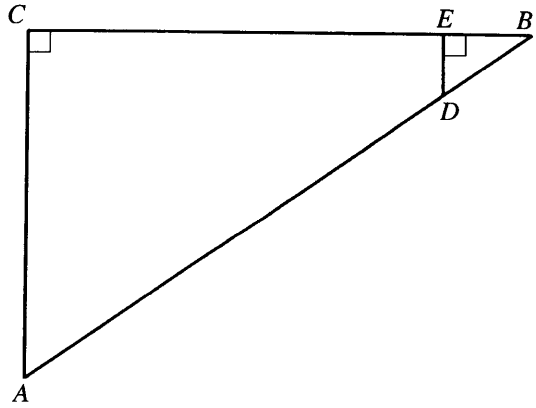
Opgave 5 (ca. 15 point)

I den retvinklede trekant ABC er $\angle C = 90°$, $\angle B = 35°$ og $|BC| = 4{,}5$.

Beregn de ukendte sider i trekant ABC.

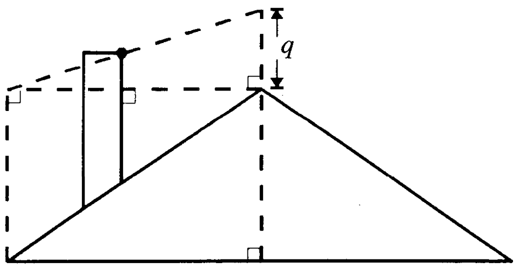
På siden AB ligger punktet D, og på siden CB ligger punktet E, således at $|DB| = 1$ og $\angle DEB = 90°$ (se figur 1).

Beregn $|DE|$ og $|CE|$.



Figur 1

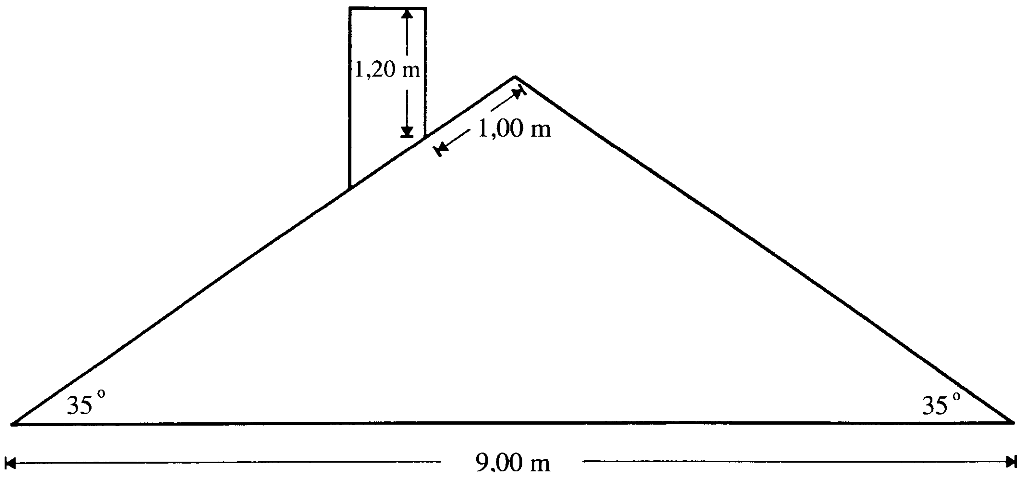
I bygningsreglementet BR-82 er et af kravene til skorstenes placering, at afstanden q, som er vist på figur 2, skal være mindst 0,80 m.



Figur 2

En skorsten ønskes opført som vist på figur 3.

Undersøg, om bygningsreglementets krav er opfyldt i dette tilfælde.



Figur 3

Opgave 6a (ca. 15 point) På en stor skole er 17% af eleverne musikudøvere, og af disse er 60% piger. Af skolens elever er 51% piger.

Gør rede for, at 20% af pigerne på skolen er musikudøvere.

Der udvælges tilfældigt 8 piger på skolen.

Bestem sandsynligheden for, at

1) højst 3 af disse er musikudøvere.
2) mindst 5 af disse er musikudøvere.

Opgave 6b (ca. 15 point) Tabellen nedenfor viser frekvensfordelingen for den 5-årige mertilvækst* af træ som følge af gødskning i skove.

mertilvækst (m^3/ha)	frekvens (procent)
]− 56,5; − 20,5]	6
]− 20,5; − 11,5]	8
]− 11,5; − 2,5]	21
] − 2,5; 6,5]	20
] 6,5; 15,5]	22
] 15,5; 24,5]	13
] 24,5; 51,5]	10

Kilde: Gødskningsrapport nr. 2, *Skovstyrelsen,* 1984.

Gør rede for, at mertilvæksten tilnærmelsesvist er en normalfordelt stokastisk variabel X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(X>0)$, og kommentér resultatet.

* Ved mertilvæksten i et område forstås afvigelsen fra tilvæksten i et naboområde, hvor der ikke gødskes. Derfor indeholder tabellen både positive og negative mertilvækster.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1996 **96-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU MATEMATIK

Onsdag den 15. maj 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 20 point
hver af opgaverne 5, 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point) I en orienteret plan er der givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, om hvilke det oplyses, at

$$|\vec{a}| = 6, \quad |\vec{b}| = 2 \quad \text{og} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 6.$$

Beregn gradtallet for vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem de værdier af tallet t, for hvilke $|\vec{a} + t\vec{b}| = 14$.

Opgave 2 (ca. 10 point) Benyt stamfunktioner til at vise, at de eksakte værdier af integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 + \cos x)dx \quad \text{og} \quad \int_0^{10} \frac{x+2}{x^2+4x+10}\,dx$$

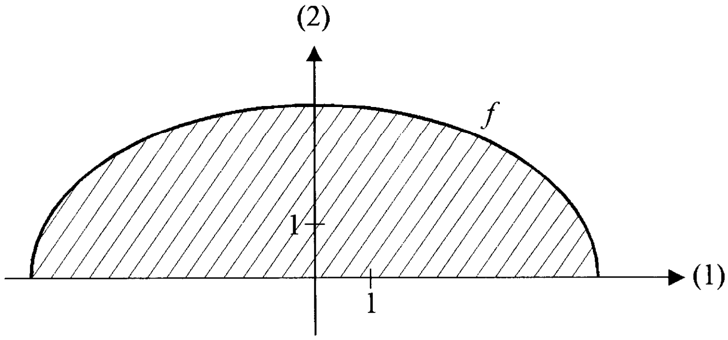
er henholdsvis

$$\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{2}\ln 15 \ .$$

Opgave 3 (ca. 10 point)

Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \sqrt{9 - \tfrac{9}{25}x^2} \ .$$



Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den skraverede punktmængde drejes 360° omkring førsteaksen.

Opgave 4 (ca. 20 point)

En plan α har ligningen

$$\alpha: \quad 3x - 8y - 7z - 3 = 0 \ .$$

En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Beregn koordinatsættet til det punkt S, hvori l skærer α.

En plan β har ligningen

$$\beta: \quad x - 3y - 2z + 3 = 0 \ .$$

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem α og β.

Planerne α og β skærer hinanden i en linje m.

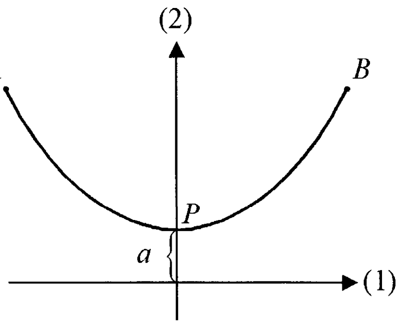
Bestem en parameterfremstilling for m.

Beregn afstanden fra punktet $P(9,-1,2)$ til linjen l.

Opgave 5 (ca. 15 point) På en væg markeres to punkter A og B i samme højde over gulvet. Når en fuldstændig bøjelig kæde ophænges i de to punkter, vil den følge en kurve, der i et passende valgt koordinatsystem er en del af en løsningskurve til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a^2}y \ ,$$

hvor tallet a angiver afstanden fra kædens nederste punkt P til førsteaksen. I punktet P har kurven vandret tangent.



Bestem en forskrift for den funktion, hvis graf beskriver kædens forløb, når $a = 4$.

Opgave 6 (ca. 15 point) En mølkugle fordamper med en hastighed, der er proportional med kuglens overfladeareal. Under fordampningen kan mølkuglens masse beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = -kM^{\frac{2}{3}} \ ,$$

hvor M er mølkuglens masse til tiden t, og k er en positiv konstant. M måles i gram, og t måles i døgn.
Til tidspunktet $t = 0$ vejer mølkuglen 1 gram, og 75 døgn senere vejer den 0,5 gram.

Bestem M som funktion af t.

Hvor lang tid varer det, før mølkuglen er fordampet?

Opgave 7a (ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{y} \ .$$

Grafen for f går gennem punktet $P(2,-2)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

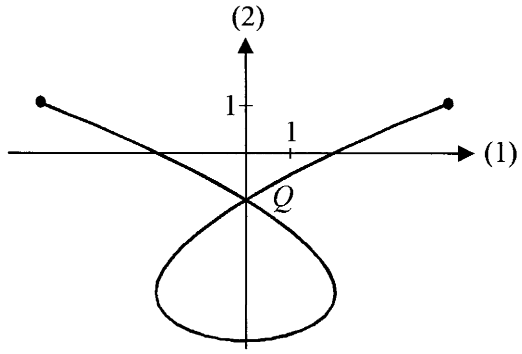
Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 7b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{matrix} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 - 4 \end{matrix} \ , \quad -2{,}25 \leqq t \leqq 2{,}25 \ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne.



Kurven har et dobbeltpunkt Q, det vil sige et punkt, der svarer til to forskellige værdier af t.

Beregn gradtallet for vinklen mellem hastighedsvektorerne svarende til disse to værdier af t.

Beregn det tidspunkt, hvor hastighedsvektoren er ensrettet med vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1996 **96-8-2**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Torsdag den 23. maj 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 .... ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, 4, 5 og 6 .... ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Bestem radius og koordinatsættet til centrum for cirklen med ligningen $x^2+y^2-4x+10y=7$.

b) Bestem afstanden fra punktet $P(2,-3)$ til linjen m med ligningen $y=-\frac{3}{4}x+1$.

c) Udfør divisionen $(4x^3+5x^2-x+2):(x^2+x+1)$.

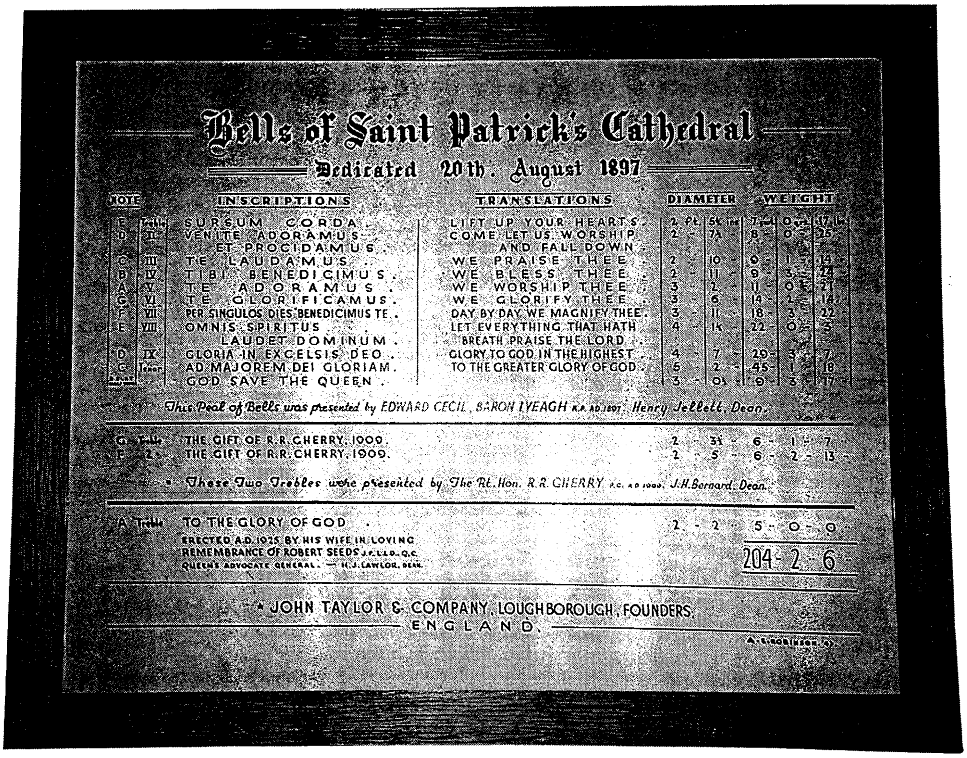
d) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 10 og spredning 2.

Bestem $P(X>7)$.

e) En konto giver en månedlig rente på 0,4%.

Bestem den årlige rente i procent (1 dec.).

Opgave 2
(ca. 15 point)



Billedet viser en oversigt over diameter og vægt af kirkeklokkerne i Saint Patrick's Cathedral i Dublin, Irland. For de elleve klokker, der blev ophængt før 1897, giver en omregning af de benyttede gamle engelske mål til tommer og pund følgende tabel:

diameter (tommer)	29,5	31,5	34,0	35,0	36,5	38,0	42,0	47,0	49,5	55,0	62,0
vægt (pund)	801	925	1050	1116	1109	1253	1638	2122	2467	3339	5089

Indtegn tabellens oplysninger i et passende koordinatsystem, og gør ved hjælp heraf rede for, at der med god tilnærmelse gælder, at vægten, målt i pund, er en eksponentielt voksende funktion f af diameteren, målt i tommer.

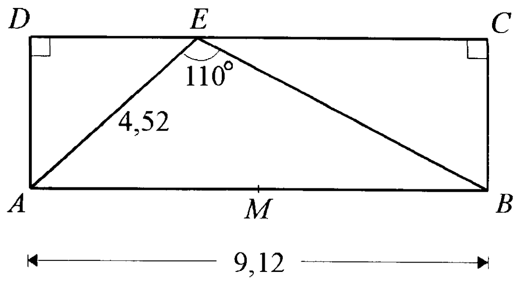
Bestem en forskrift for f.

I 1925 blev der ophængt endnu en klokke i Saint Patrick's Cathedral. Vægten af denne klokke er 560 pund.

Bestem ud fra den fundne sammenhæng den diameter, der svarer til denne vægt.

Opgave 3 (ca. 15 point)

Figuren viser et rektangel $ABCD$, hvor $|AB| = 9{,}12$.
Punktet E ligger på DC, således at det for trekant ABE gælder, at $\angle E = 110°$ og $|AE| = 4{,}52$.
M er midtpunktet af siden AB.



Beregn vinkel B i trekant ABE samt længden af siden EB.

Beregn $|EM|$ og $|EC|$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I et eksperiment E er sandsynligheden 15% for, at en bestemt hændelse H indtræffer.
Eksperimentet E udføres 22 gange, og de enkelte udførelser af eksperimentet er uafhængige af hinanden.

Beregn sandsynligheden for, at H indtræffer netop 2 gange.

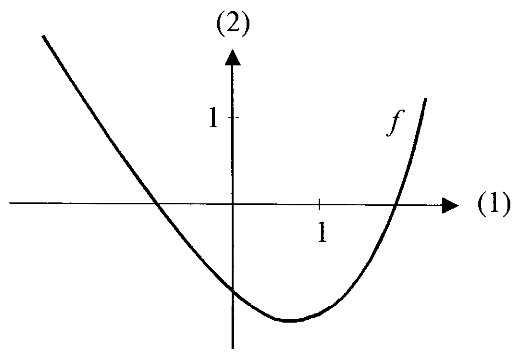
Beregn sandsynligheden for, at H indtræffer højst 2 gange.

Hvad er det største antal gange, eksperimentet E må udføres, hvis sandsynligheden for, at H indtræffer højst 2 gange, ikke må komme under 50%?

Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x - 2x - 2 \ .$$



Bestem en ligning for tangenten t_1 til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

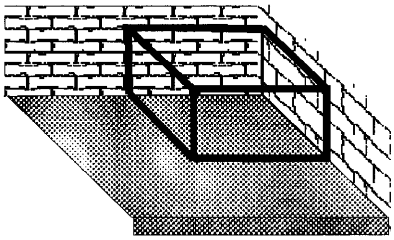
Gør rede for, at funktionen har en mindsteværdi, og bestem den eksakte værdi af denne.

Grafen for f har en tangent t_2, der er vinkelret på tangenten t_1.

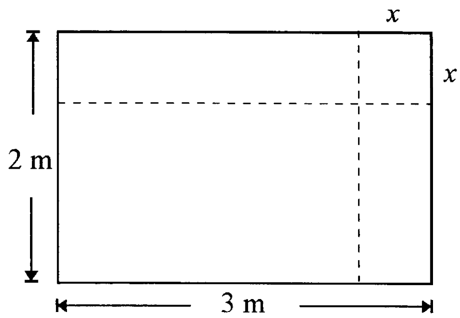
Beregn røringspunktet for t_2.

Opgave 6a (ca. 15 point)

En glasmontre skal anbringes på et bord i et hjørne af et rum, således at bordet udgør bunden, og væggene udgør to af siderne i montren (se figur 1). Toppen og de to resterende sider udskæres af en rektangulær glasplade, der er 3 m lang og 2 m bred. Dette foregår ved, at man skærer langs de stiplede linjer (se figur 2) og fjerner kvadratet med siden x.



Figur 1



Figur 2

Gør rede for, at montrens volumen V, målt i m^3, som funktion af x, målt i m, er givet ved

$$V(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \ ,$$

og gør rede for, at x tilhører intervallet $]0;2[$.

Løs ligningen $V'(x) = 0$.

Hvor lang er siden i det kvadrat, der skal bortskæres, når montrens rumfang skal være så stort som muligt?

Opgave 6b (ca. 15 point)

En funktion g har forskriften

$$g(x) = \frac{x+3}{x+5} \ , \quad x > 0 \ .$$

Bestem monotoniforholdene for g.

En funktion f har forskriften

$$f(x) = \frac{x+a}{x+b} \ , \quad x > 0 \ ,$$

hvor a og b er positive tal og $a < b$.

Bestem monotoniforholdene for f.

Afgør, eventuelt ved hjælp af monotoniforholdene for f, hvilket af tallene

$$\frac{1+10^{100}}{1+10^{102}} \quad \text{og} \quad \frac{2+10^{100}}{2+10^{102}}$$

der er størst.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 14. august 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 8a og 8b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 10 point
hver af opgaverne 6, 7 og 8	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 10 point)

En kugle har ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11 \ .$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

En linje har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Bestem afstanden fra kuglens centrum til linjen.

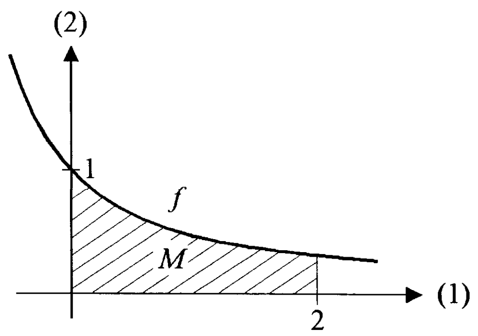
Opgave 2 (ca. 10 point)

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \ , \quad x > -1 \ .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af det skraverede område M.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.



Opgave 3 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem er der givet en linje l med ligningen $y = 3x - 2$ og en vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på linjen l.

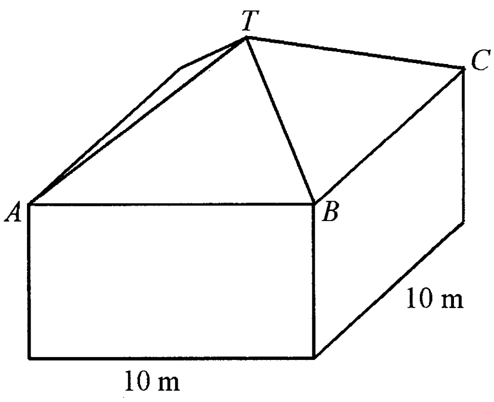
En vektor $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} ,$$

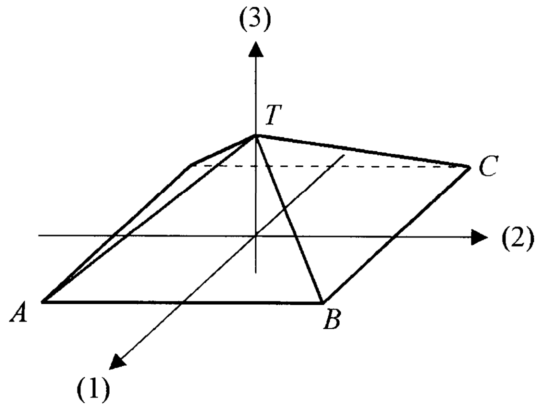
hvor t er et tal.

Bestem t, således at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Opgave 4 (ca. 15 point)



Figur 1



Figur 2

På figur 1 ses en skitse af et hus med kvadratisk grundplan med siden 10 m. Taget udgøres af fire ligebenede trekanter. På figur 2 er taget indtegnet i et koordinatsystem. Punktet T har koordinatsættet (0,0,2).
Vinklen v mellem tagfladerne ATB og BTC er stump.

Beregn vinkel v.

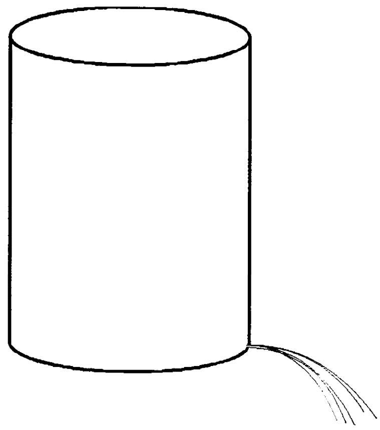
Beregn taghældningen, det vil sige den spidse vinkel mellem en af tagfladerne og vandret.

Beregn tagets areal.

Opgave 5 (ca. 10 point)

En beholder er fyldt op med vand, som i tidens løb strømmer ud gennem et hul i bunden af beholderen.
Med $R(t)$ betegnes rumfanget af den vandmængde, der er strømmet ud i tidsrummet fra 0 til t. $R(t)$ måles i m^3, og t måles i sekunder.
Udstrømningshastigheden $R'(t)$ er givet ved

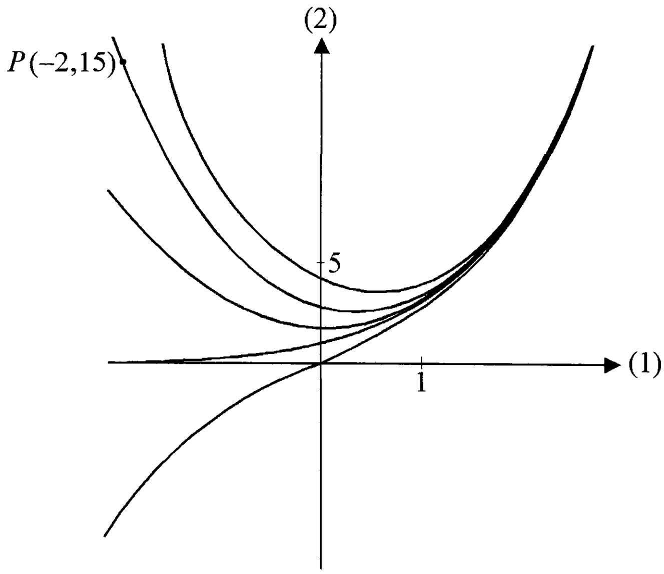
$$R'(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}05t} \ .$$



Bestem en forskrift for R.

Bestem $\lim\limits_{t \to \infty} R(t)$, og giv en tolkning af denne grænseværdi.

Opgave 6 (ca. 15 point)



Figuren viser en række løsningskurver til differentialligningen

(*) $$y' + y = 2e^x \ .$$

Vis, at enhver af funktionerne

$$f_c(x) = c \cdot e^{-x} + e^x \ ,$$

hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen (*).

For en bestemt værdi af c går grafen for f_c gennem punktet $P(-2{,}15)$.

Bestem denne værdi af c.

Nogle løsninger til differentialligningen (*) er voksende funktioner.

Bestem de værdier af c, for hvilke f_c er en voksende funktion.

Opgave 7 En funktion f er løsning til differentialligningen
(ca. 15 point)

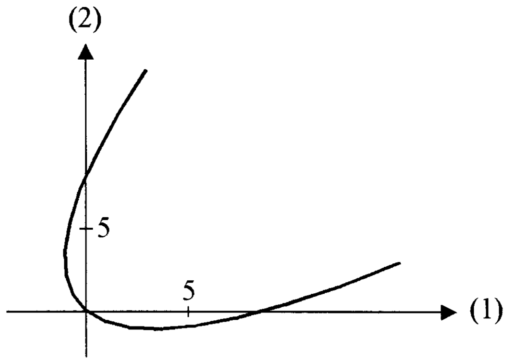
$$(x+5)\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \ ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(-4,1)$.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 8a I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen
(ca. 15 point)

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 1 \\ y &= t^2 + 4t + 3 \end{aligned} \ , \quad t \in \mathrm{R} \ .$$



Beregn koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med koordinatakserne og til hvert af de punkter, hvori kurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatakserne.

Bestem koordinatsættet til det punkt på kurven, der har den mindste afstand til linjen med ligningen $3x + 2y = -4$.

Opgave 8b Benyt stamfunktioner til at vise, at de eksakte værdier af integralerne
(ca. 15 point)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx \ , \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$$

er henholdsvis

$$\sqrt{3}, \quad 1 \quad \text{og} \quad \pi\frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 2 \ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 8a og 8b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1996 **96-8-4**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 26. august 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

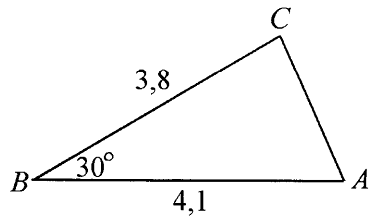
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En funktion f er bestemt ved $f(x) = 7{,}2 \cdot 1{,}7^x$.
Beregn fordoblingskonstanten.

b) Beregn $|AC|$ i den viste trekant.



c) En stokastisk variabel X har følgende sandsynlighedsfordeling:

t	-1	2	3	4
$P(X=t)$	0,3	0,4	0,1	0,2

Beregn middelværdien for X.

d) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \ln(x^2+7)$.

e) I 6 år indsættes hvert år 3500 kr. på en konto. Den årlige rente er 4,5%.
Hvor meget står der på kontoen umiddelbart efter sidste indbetaling?

Opgave 2 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en linje bestemt ved, at den går gennem punkterne $A(-1,13)$ og $B(3,10)$. En cirkel er bestemt ved, at den har centrum i punktet $C(3,2)$ og radius $r=4$.

Bestem en ligning for linjen og en ligning for cirklen.

Bestem koordinatsættet til det punkt på cirklen, der har den mindste afstand til linjen.

Opgave 3 (ca. 15 point)

I en reklame for Det Nordtyske Klasselotteri oplyses det, at sandsynligheden for at få gevinst på en lodseddel er 40%.

Bestem sandsynligheden for ikke at få gevinst, når man køber 2 lodsedler.

Bestem sandsynligheden for at få gevinst, når man køber 5 lodsedler.

Hvor mange lodsedler skal man mindst købe, hvis sandsynligheden for at få gevinst skal være over 98%?

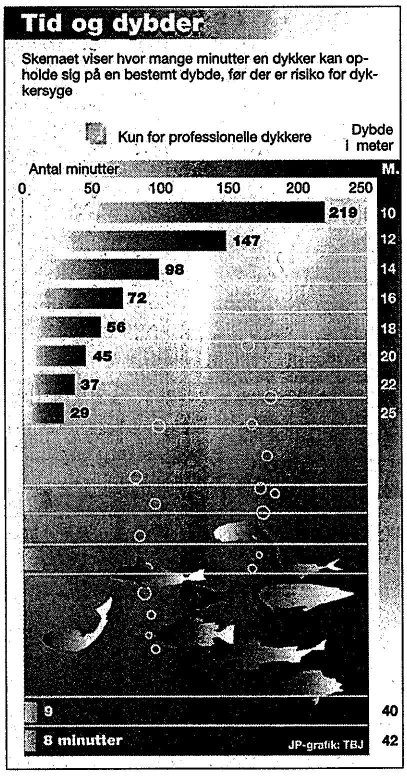
Opgave 4 (ca. 15 point)

Neddykningstiden betegner i det følgende den tid, som professionelle dykkere kan opholde sig i en bestemt dybde uden risiko for dykkersyge. Af diagrammet fremgår for eksempel, at i en dybde på 22 meter er neddykningstiden 37 minutter.

Indtegn diagrammets oplysninger i et passende koordinatsystem, og gør herved rede for, at der med tilnærmelse gælder, at neddykningstiden y er en funktion af dybden x af formen $y=bx^a$.

Bestem dernæst konstanterne a og b, når x måles i meter og y i minutter.

Hvor længe kan en dykker opholde sig i en dybde på 32 meter uden risiko for dykkersyge?



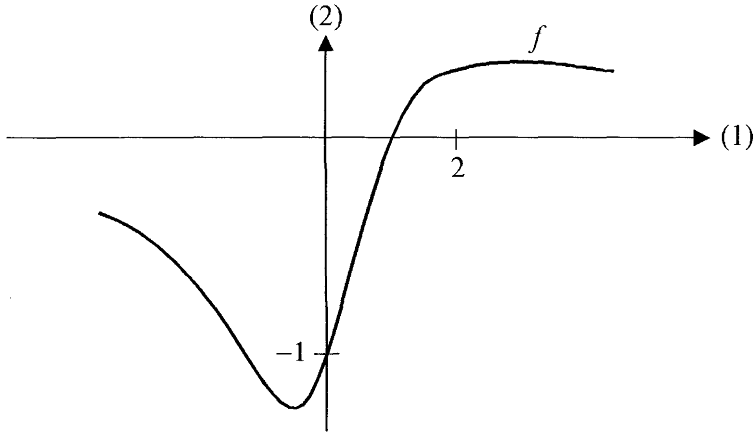
Kilde: Jyllands-Posten, 21/8 1995.

Opgave 5 (ca. 20 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \ .$$

Figuren viser grafen for f.



Gør rede for, at grafen for f skærer linjen med ligningen $y = 0{,}2$ i netop to punkter, og beregn koordinatsættene til hvert af de to punkter.

Gør rede for, at grafen for f har netop én asymptote, og bestem en ligning for denne.

Grafen for f skærer andenaksen i punktet S.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet S.

Gør rede for, at f har mindsteværdien $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-4}$ og størsteværdien $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4}$.

Opgave 6a (ca. 10 point) Om en differentiabel funktion f oplyses, at det approksimerende førstegradspolynomium for f i tallet 2 er bestemt ved

$$p(x) = -\tfrac{1}{2}x + 4 \ .$$

Bestem $f(2)$ og $f'(2)$.

En funktion g er bestemt ved $g(x) = \sqrt{15-3x}$.

Gør rede for, at også funktionen g har $p(x)$ som approksimerende førstegradspolynomium i tallet 2.

Opgave 6b (ca. 10 point) Tabellen angiver indekstal for byggeaktiviteten i en række lande.

Bestem ud fra tabellen den procentvise ændring i byggeaktiviteten fra 1990 til 1994 for henholdsvis Tyskland og Danmark.

Beregn for henholdsvis Tyskland og Danmark den gennemsnitlige årlige procentvise ændring i byggeaktiviteten i perioden 1990–1994.

Beregn indekstallet for byggeaktiviteten i Frankrig i 1991, når 1993 vælges som basisår.

Byggeaktivitet i forskellige lande

Påbegyndte boliger. Indeks 1990 = 100

	1991	1992	1993	1994
Tyskland	102,4	117,2	133,9	149,9
Storbritannien	100,0	97,8	114,2	124,6
USA	85,0	100,6	107,9	122,1
Holland	87,7	87,7	88,9	106,2
Norge	82,4	76,5	76,5	105,9
Frankrig	97,6	89,0	83,9	97,3
Japan	80,3	82,2	87,0	92,0
Danmark	77,7	75,2	62,3	58,3
Finland	75,3	60,9	53,2	51,3

Kilde: Danmarks Statistik, Statistisk Månedsoversigt, nr. 7, 1995

Kilde: Ingeniøren 34/95.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1996 **96-8-1V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 4. december 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 10 point
opgave 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 20 point
opgave 7	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er to planer α og β bestemt ved

$$\alpha\text{: } 8x-y+4z=0 \quad \text{og} \quad \beta\text{: } 3x-2z+6=0\ .$$

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem de to planer.

Bestem en parameterfremstilling for planernes skæringslinje l.

Bestem en ligning for den plan, der går gennem punktet $A(-1,6,0)$ og står vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$.

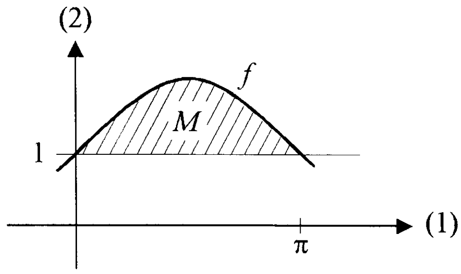
Opgave 2 (ca. 15 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x)=\sin x+1\ ,$$

og M er punktmængden

$$\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq \pi \wedge 1\leqq y\leqq f(x)\}\ .$$



Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om

1) koordinatsystemets førsteakse.

2) linjen med ligningen $y=1$.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En bestemt populations størrelse y, målt i antal individer, er en funktion af tiden t, målt i døgn. Det antages, at y er løsning til en differentialligning af typen

$$\frac{dy}{dt} = y(b-ay) \ .$$

Til tidspunktet $t=0$ er populationens størrelse 200, og efter 10 døgn er populationens størrelse 500. Den øvre grænse y_∞ for populationens størrelse er 3000.

Bestem en forskrift for y som funktion af t.

Beregn det tidspunkt, hvor populationens størrelse er 75% af y_∞.

Opgave 4 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen er der givet en linje m med ligningen

$$m\colon\ 3x+y+8=0$$

og en vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \ .$$

Bestem koordinatsættene til de to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{w}$, for hvilke

$$\vec{v} \parallel m \ , \ \vec{w} \perp m \quad \text{og} \quad \vec{a} = \vec{v} + \vec{w} \ .$$

Opgave 5 (ca. 15 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{xy}$$

den løsning f, hvis graf indeholder punktet $P(1,1)$.

Om funktionen g vides, at den er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = xy \ ,$$

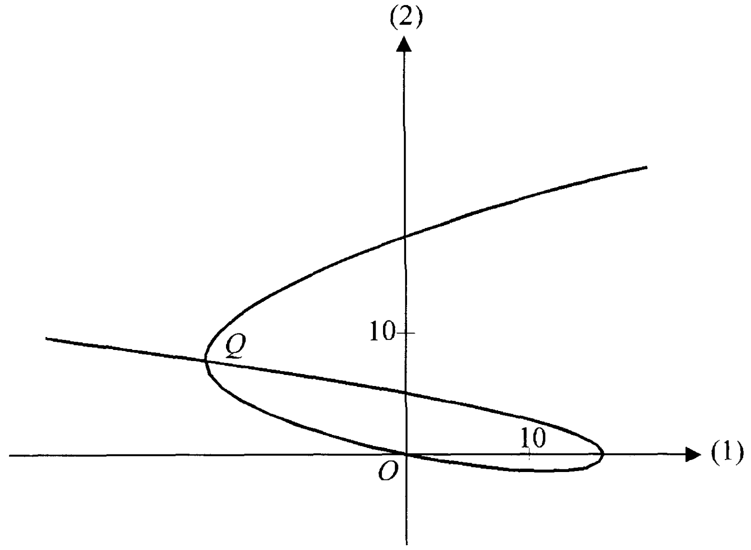
og at grafen for g også indeholder punktet P.

Gør rede for, at tangenterne til graferne for f og g i punktet P står vinkelret på hinanden.

Opgave 6 I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Et punkt $P(x,y)$
(ca. 20 point) bevæger sig i planen, således at det til tidspunktet t gælder, at

$$\begin{aligned} x &= t^3 - 12t \\ y &= t^2 + 2t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathrm{R} \; .$$

På figuren ses banekurven for bevægelsen.



Beregn koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Banekurven har et dobbeltpunkt Q, det vil sige et punkt, der svarer til to forskellige værdier af tallet t. Den ene værdi er 2, og den anden værdi betegnes med t_0.

Beregn t_0.

Beregn den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i Q.

Den del af kurven, der gennemløbes i tidsrummet fra $t = t_0$ til $t = 2$, afgrænser en punktmængde, der har et areal A. Der gælder, at

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{2} \hat{\vec{v}} \cdot \overrightarrow{OP} \, dt \; ,$$

hvor $\vec{v}$ er hastighedsvektoren til tidspunktet t.

Gør rede for, at

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{2} (t^4 + 4t^3 + 12t^2) \, dt \; ,$$

og beregn den eksakte værdi af A.

Opgave 7a (ca. 10 point)

Når fisk, der er forurenet med stoffet hexachlorbenzen, udsættes i rent vand, aftager hexachlorbenzen-koncentrationen i fiskene med tiden.
I en model betegner y hexachlorbenzen-koncentrationen til tiden t, og der gælder, at den hastighed, som y ændres med, er proportional med y.
Proportionalitetsfaktoren kaldes $-k$, hvor k er et positivt tal.
Tiden t måles i timer, og koncentrationen y måles i mikrogram pr. gram fedtvægt.

Opstil en differentialligning, der beskriver, hvordan y ændrer sig som funktion af t.

Koncentrationen y halveres i løbet af 347 timer.

Bestem k.

Kilde: Økotoksikologisk vurdering af industrispildevand, Miljøministeriet, 1992.

Opgave 7b (ca. 10 point)

En kugle skærer yz-planen i en cirkel med ligningen

$$(y-4)^2+(z-2)^2=9 \ ,$$

og den skærer xz-planen i en cirkel med ligningen

$$(x-4)^2+(z-2)^2=9 \ .$$

Bestem kuglens radius og koordinatsættet til dens centrum.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1996 **96-8-2V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 9. december 1996 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 10 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 10 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Linjen l har ligningen $y = \frac{1}{3}x + 7$.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem punktet $P(-2{,}4)$ og står vinkelret på l.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = x \cdot 3^x$.

c) Om en normalfordelt stokastisk variabel X oplyses, at $P(X \leqq 7) = 0{,}25$ og $P(X \leqq 12) = 0{,}65$.

Bestem middelværdien af X.

d) En parabel har ligningen $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$.

Bestem en ligning for tangenten til parablen i punktet $P(2,-1)$.

e) Bestem den eksakte værdi af løsningen til ligningen $e^{2x} = 5$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

I firkant $ABCD$ er $\angle C = 41°$, $|DC| = 10$ og $|BC| = 8$. Endvidere er trekant ABD ligesidet.

Beregn $|BD|$.

Beregn arealet af firkant $ABCD$.

Opgave 3 (ca. 10 point)

Det viste udklip omtaler fejl ved tyske biler.

På baggrund af oplysningerne i udklippet antages det, at sandsynligheden er 4,8% for, at en tilfældigt valgt tre år gammel tysk bil har alvorlige fejl.

Der udtages tilfældigt 50 tre år gamle tyske biler.

Bestem sandsynligheden for, at der blandt disse er netop 2 med alvorlige fejl.

Bestem det mest sandsynlige antal biler med alvorlige fejl blandt de 50 tilfældigt valgte tre år gamle tyske biler.

> Blandt sidste års tre år gamle testbiler havde 24 procent lette mangler mens 4,8 procent havde alvorlige fejl. Når bilerne når en alder af otte til ni år, har de gennemsnitlig dobbelt så mange mindre fejl, mens antallet af alvorlige fejl er 3,5 gange så stort.

Kilde: Motor nr. 9, 1995.

Opgave 4 (ca. 15 point)

I en model for det globale CO_2-udslip beskrives det årlige CO_2-udslip ved en funktion af formen $N(t) = a^t$, hvor t er antallet af år efter 2000. Da $N(0) = 1$, har man således valgt udslippets størrelse i år 2000 som enhed.
Det antages, at det årlige globale CO_2-udslip nedsættes med 1% om året i perioden 2000–2150.

Bestem en forskrift for N.

Beregn det årstal, hvor det årlige CO_2-udslip ifølge modellen vil være reduceret til halvdelen af udslippet i år 2000.

Løs dobbeltuligheden $0{,}40 < N(t) < 0{,}80$, og beskriv, hvad løsningen fortæller om CO_2-udslippet ifølge modellen.

I en anden model for CO_2-udslippet skal det årlige globale udslip nedsættes med ialt 20% i perioden 1995–2020.

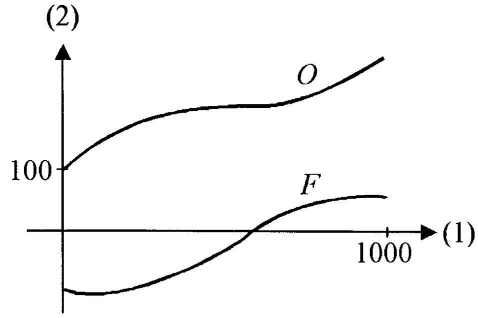
Beregn, hvor mange procent det årlige CO_2-udslip i gennemsnit skal nedsættes med pr. år i denne model.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Med $O(x)$ betegnes de samlede omkostninger, angivet i mio. kroner, ved produktion af x enheder af en vare. $O(x)$ er givet ved følgende udtryk:

$O(x) = 0{,}2x + 100 + 30\sin(0{,}006x)$,
hvor $x \in [0;1000]$.

Vis ved at benytte $O'(x)$, at $O(x)$ er en voksende funktion af x.



Hver produceret enhed sælges for 0,35 mio. kroner. Fortjenesten F som funktion af antallet x af producerede enheder er derfor bestemt ved

$$F(x) = 0{,}35x - O(x) \ .$$

Vis ved at benytte $F'(x)$, at fortjenesten har en størsteværdi, og bestem denne.

Opgave 6 (ca. 10 point)

En differentiabel funktion f med definitionsmængde $]-1;\infty[$ opfylder følgende tre betingelser:

f er aftagende i intervallet $]-1;1]$
f er voksende i intervallet $[1;\infty[$
$f'(x)$ har netop ét nulpunkt.

Bestem fortegnet for $f'(0)$ og $f'(2)$, og bestem $f'(1)$.

Vis, at funktionen g bestemt ved

$$g(x) = x^3 - 3x \ , \quad x \in \,]-1;\infty[$$

opfylder ovennævnte tre betingelser.

Opgave 7a (ca. 15 point)

Beregn den månedlige ydelse på et lån med en hovedstol på 10.000 kroner, som forrentes med 1,5% pr. måned, og som tilbagebetales med 48 lige store månedlige ydelser.

Undersøg dernæst, om reklamens oplysning om administrationsgebyret er korrekt i det tilsvarende tilfælde, når den månedlige ydelse afrundes til hele kroner.

Hvor stort et lån ville man kunne tilbagebetale med 48 månedlige ydelser på 25 kroner, hvis renten stadig er 1,5% pr. måned?

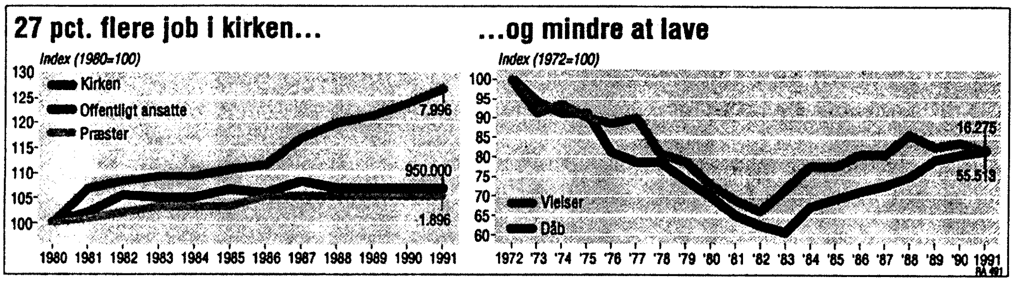
Bestem selv renten!
Vi formidler et lån på Danmarks bedste vilkår.

Løbetid I mdr.	Rente Pr. md.	Lån 4.000,- Betal pr. md.	Lån 7.000,- Betal pr. md.	Lån 10.000,- Betal pr. md.
6	0,75%	710,-	1.223,-	1.737,-
12	1.00%	381,-	647,-	914,-
24	1,25%	219,-	365,-	510,-
48	1,50%	143,-	231,-	319,-

Administrationsgebyr 25 kr. pr. md. er indregnet i ydelsen.

Husstandsomdelt reklame for TV-apparater.

Opgave 7b (ca. 15 point) Figurerne viser blandt andet indeks for antal ansatte i folkekirken i perioden 1980–1991 og indeks for antal kirkelige vielser i perioden 1972–1991.



Kilde: Politiken, den 3. *april* 1994.

Af figurerne kan aflæses følgende tabel:

år	1980	1983	1986	1989	1991
indeks for antal ansatte	100	108	112	122	127
indeks for antal vielser	72	72	81	84	81

Det fremgår endvidere, at der i 1991 var 7996 ansatte i folkekirken, og at der samme år blev foretaget 16275 vielser.

Hvor mange ansatte var der i folkekirken i 1980, og hvor mange vielser blev der foretaget i 1980?

Beregn antal vielser pr. ansat i 1989, og omregn dette tal til indekstal med 1980 som basisår.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN JANUAR–FEBRUAR 1997 **96-8-4V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Tirsdag den 4. februar 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

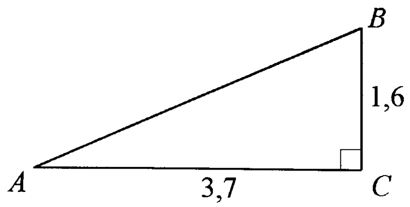
opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 10 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 15 point
opgave 6	ca. 10 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter 17 og sandsynlighedsparameter 0,10.

Bestem $P(X \geqq 3)$.

b) Beregn vinkel A i den viste trekant.



c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$.

d) Udfør divisionen $(3x^3 + 2x^2 - 4x - 24) : (x - 2)$.

e) Løs uligheden $\log(2x) > 1{,}1$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem er en linje l givet ved ligningen

$$y = \tfrac{1}{2}x + 4 \ .$$

Linjen l er tangent til en cirkel, der har centrum i punktet $C(5,-1)$.

Bestem en ligning for denne cirkel.

Bestem en ligning for den rette linje, der går gennem C og står vinkelret på l.

Opgave 3 (ca. 10 point)

I 1990 var salgsprisen på en vare 72,50 kr, og fremstillingsprisen var 51,00 kr. Siden 1990 er salgsprisen på varen faldet med 1,2% om året, mens fremstillingsprisen er steget med 1,5% om året.
Det antages, at denne udvikling fortsætter uændret.

Beregn salgspris og fremstillingspris i år 2000.

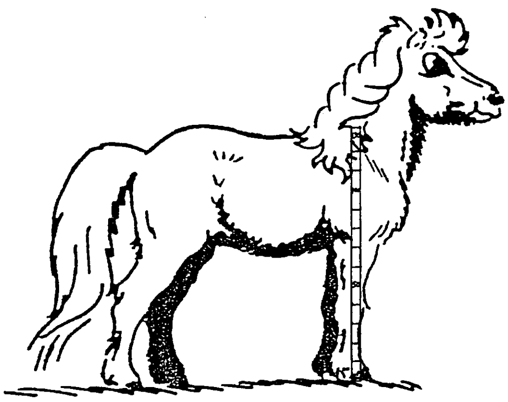
Beregn det år, hvori salgspris og fremstillingspris vil være lige store.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Som mål for en islandsk hests størrelse benyttes det såkaldte båndmål (se figuren).
Ved en hestekåring i Island i 1992 var der følgende fordeling for 6-års hopper:

båndmål i cm	procentdel af hopper
127–130	5,6%
130–132	14,8%
132–134	24,6%
134–136	26,8%
136–138	18,3%
138–140	7,7%
140–144	2,1%

Kilde: Hrossarræktin 1992



Gør rede for, at båndmålet for 6-års hopper ved kåringen i 1992 med tilnærmelse er normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for denne normalfordeling.

Benyt den fundne normalfordeling til at bestemme sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt 6-års hoppe fra kåringen i 1992 har et båndmål over 133 cm.

Af 6-års hopperne ved kåringen i 1992 udtages der tilfældigt 10.

Beregn sandsynligheden for, at de alle har et båndmål over 133 cm.

Opgave 5
(ca. 15 point)

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - 6x + a \ ,$$

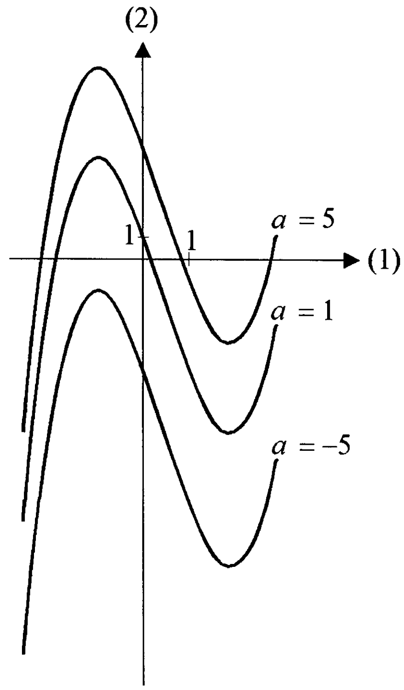
hvor a er et tal.

På figuren ses grafen for f for tre forskellige værdier af tallet a.

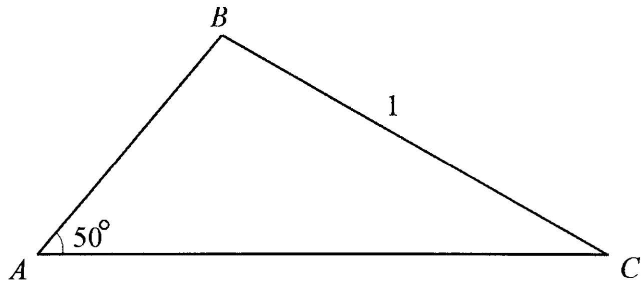
Bestem ved hjælp af $f'(x)$ monotoniforholdene for f.

Bestem udtrykt ved a de lokale ekstremumsværdier for f.

Bestem for enhver værdi af tallet a antallet af nulpunkter for f.



Opgave 6
(ca. 10 point)



I trekant ABC er $\angle A = 50°$ og $|BC| = 1$.

Beregn længden af siden AC, når $\angle B = 100°$.

Beregn længden af siden AC, når $\angle B = 60°$.

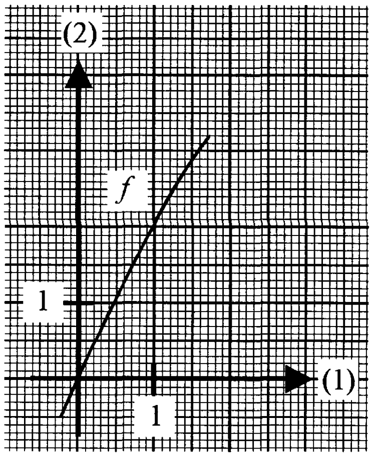
Bestem den størrelse, vinkel B skal have, for at længden af siden AC bliver størst mulig.

Opgave 7a (ca. 15 point)

Figuren nedenfor viser en del af grafen for den harmoniske svingning

$$f(x) = A \sin(bx) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Det oplyses, at f har perioden $T = 12$.



Bestem konstanterne b og A ud fra de givne oplysninger.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Løs ved beregning ligningen

$$f(x) = 3{,}5 \quad , \quad x \in [0;3] \ .$$

Opgave 7b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem med begyndelsespunkt O er der for ethvert tal $t \in]0;2[$ givet to punkter $A(t,0)$ og $B(0, 2t - t^2)$.

Bestem arealet af trekant OAB, når $t = 1$.

Bestem den værdi af t, for hvilken arealet af trekant OAB er størst.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1997 **97-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 16. maj 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 25 point
hver af opgaverne 5 og 6	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Vis, at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{a}+\vec{b}$.

Bestem længden af $\vec{b}$'s projektion på $\vec{a}+\vec{b}$.

Opgave 2
(ca. 15 point)

Angivet med 2 decimaler er værdierne af integralerne

$$\int_0^1 (x+2^x)\,dx \ , \quad \int_0^1 x\cdot 2^x\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot 2^{\sin x}\,dx$$

henholdsvis 1,94, 0,80 og 1,44.

Beregn den eksakte værdi af hvert af de tre integraler.

Opgave 3
(ca. 15 point)

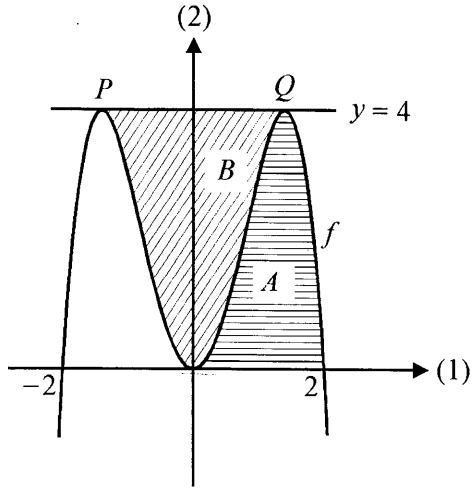
Funktionen f er givet ved

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 \ .$$

Beregn den eksakte værdi af arealet af det skraverede område A (se figuren).

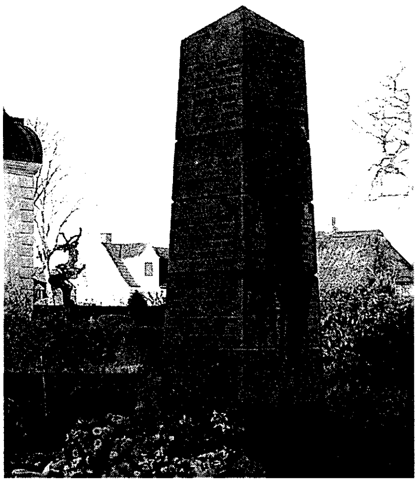
Linjen med ligningen $y = 4$ er tangent til grafen for f i punkterne $P(-\sqrt{2},4)$ og $Q(\sqrt{2},4)$.

Vis, at arealet af det skraverede område B er $\sqrt{2}$ gange arealet af A.



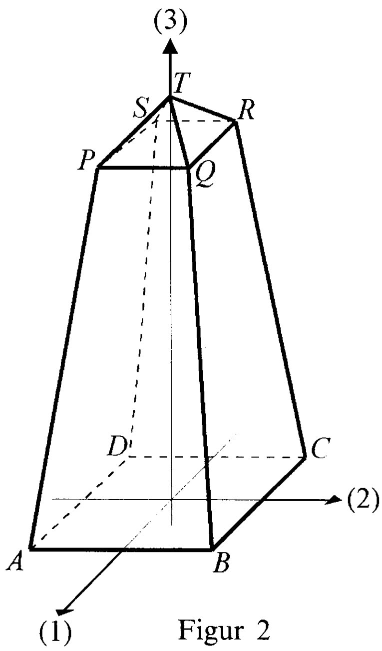
Opgave 4
(ca. 25 point)

Mange mindesmærker har form som en obelisk (figur 1).
Figur 2 viser en obelisk indtegnet i et koordinatsystem.



Obelisk ved kirken i Møgeltønder.

Figur 1



Figur 2

$A(2,-2,0)$
$B(2,2,0)$
$C(-2,2,0)$
$D(-2,-2,0)$
$P(1,-1,8)$
$Q(1,1,8)$
$R(-1,1,8)$
$S(-1,-1,8)$
$T(0,0,9)$

Bestem en ligning for den plan, der indeholder punkterne T, P og Q.

Beregn arealet af trekant TPQ.

Beregn vinklen mellem fladerne $ABQP$ og TPQ.

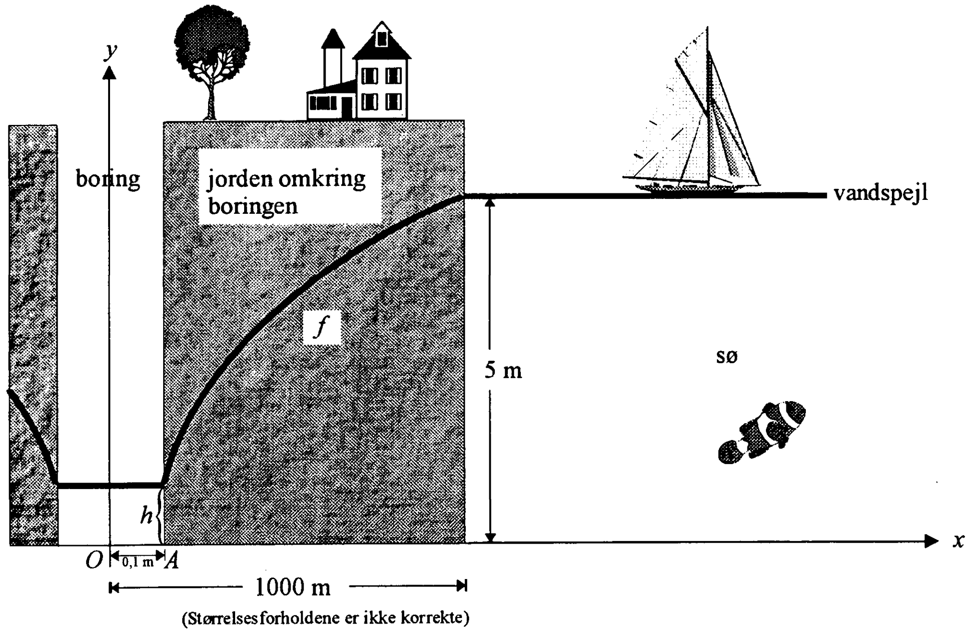
Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne P og C.

Linjen gennem A og R skærer m i et punkt U.

Beregn koordinatsættet til U.

Beregn afstanden fra punktet U til den plan, der indeholder fladen $ABQP$.

Opgave 5
(ca. 15 point)



Figuren viser en skematisk tegning af en vandboring på en ø i en sø. Radius OA i boringen er 0,1 m. På tegningen er indlagt et koordinatsystem. Den optrukne kurve i koordinatsystemet viser det såkaldte vandspejl i boringen, i jorden omkring boringen og i søen.
Højden h(målt i meter) af vandspejlet i boringen (se figuren) afhænger af den hastighed Q(målt i m^3/sek), hvormed der pumpes vand op fra boringen.
Vandspejlet i jorden omkring boringen afhænger ligeledes af Q. I en model er vandspejlet i jorden omkring boringen en del af grafen for en funktion f, som er løsning til differentialligningen

$$xy\frac{dy}{dx} = 100Q \ ,$$

og som opfylder $f(1000) = 5$.

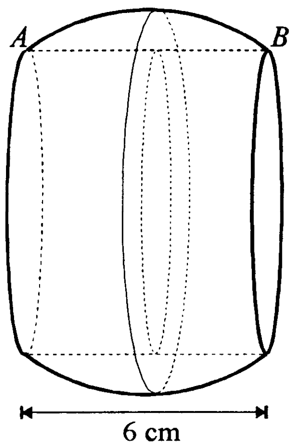
I en given pumpesituation er $Q = 0{,}006$.

Bestem i denne situation en forskrift for f, og beregn højden h af vandspejlet i boringen.

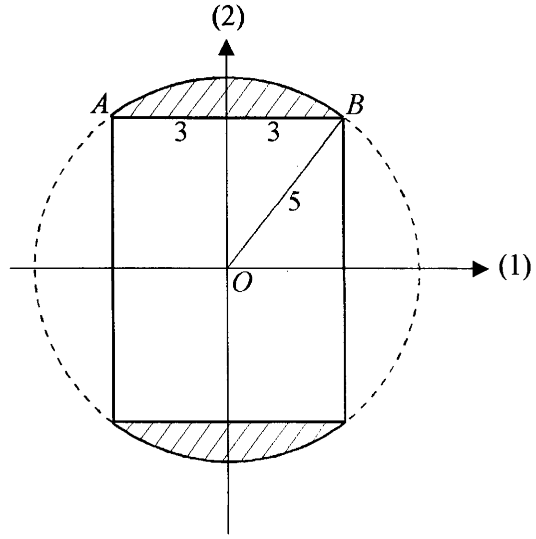
Ved samme boring, men i en anden pumpesituation, er $h = 2{,}5$.

Beregn i denne situation værdien af Q.

Opgave 6a
(ca. 15 point)



Figur 1



Figur 2

Midt gennem en massiv kugle med radius 5 cm bores et hul. Herved dannes en ring, hvis bredde er 6 cm. Figur 1 viser denne ring. I koordinatsystemet på figur 2 ses et tværsnit af ringen, hvor $|AB| = 6$ og $|OB| = 5$.

Beregn ringens rumfang.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er givet punkterne $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(6,2)$ og $D(7,4)$. Punktet $P(x,y)$ bevæger sig således, at der til tiden t gælder

$$x = 2t$$
$$y = t + 10 \ .$$

Bestem P's koordinatsæt til tidspunktet $t = 2$, og bestem arealet af trekant ABP til dette tidspunkt.

Bestem de tidspunkter t, for hvilke arealet af trekant ABP er lig med arealet af trekant CDP.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Torsdag den 22. maj 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 10 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 13$ og sandsynlighedsparameter $p = 0{,}21$.

Beregn $P(X = 3)$.

b) Løs ligningen $\cos x = 0{,}2443$, $x \in [0;2\pi]$.

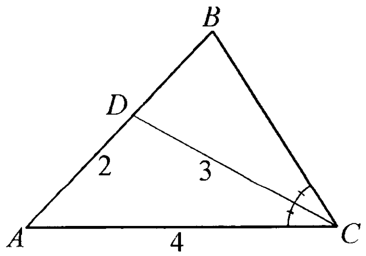
c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$.

d) Et lån på 10 000 kr. til en månedlig rente på 0,9% tilbagebetales med 18 lige store månedlige ydelser.

Beregn den månedlige ydelse.

e) Bestem fordoblingskonstanten for funktionen $f(x) = 2{,}8 \cdot 1{,}7^x$.

Opgave 2
(ca. 10 point)



Figuren viser trekant ABC, hvori D er skæringspunktet mellem siden AB og vinkelhalveringslinjen for vinkel C. Det oplyses, at $|AC| = 4$, $|DC| = 3$ og $|AD| = 2$.

Beregn vinklerne i trekant ABC samt $|AB|$.

Opgave 3
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en parabel bestemt ved ligningen

$$y = -2x^2 - 2x + 5 \; .$$

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt, og tegn parablen.

Gør rede for, at linjen t med ligningen $y = -6x + 7$ er tangent til parablen i punktet $P(1,1)$.

Gør rede for, at t også er tangent til den cirkel, der har ligningen

$$x^2 + y^2 + 10x - 12 = 0 \; .$$

Opgave 4
(ca. 10 point)

Fra undersøgelser af svin, der er inficeret med parasitter (Ascaris suum ♀), foreligger følgende fordeling for parasitternes længde:

Længde i cm	procentdel af parasitter
-17	19,0%
$17-19$	23,2%
$19-21$	24,5%
$21-23$	17,0%
$23-25$	12,9%
$25-$	3,4%

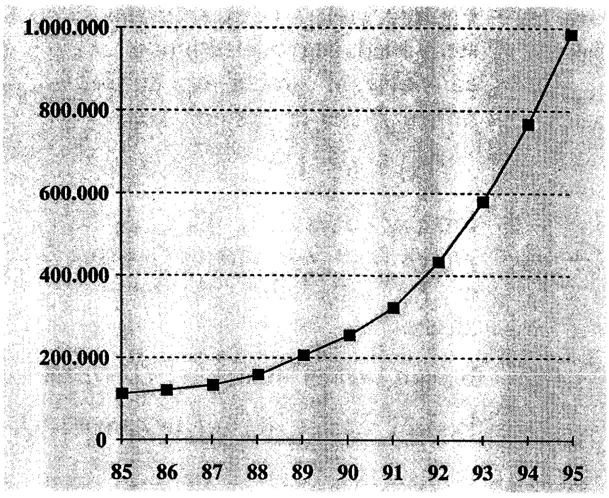
Vis, at længden med tilnærmelse er normalfordelt.

Bestem middelværdi og spredning for denne normalfordeling.

Kilde: Bjørn, Roepstorff, Nansen. Unpublished Results, KVL 1995.

Opgave 5
(ca. 10 point)

I EU-landene bliver landbrugsarealer omlagt fra almindelig drift til økologisk drift. I perioden 1985–1995 voksede det omlagte landbrugsareal i gennemsnit med 25% pr. år. I 1995 var der i EU-landene omlagt 1 000 000 hektar.



Udviklingen i omlagt areal i EU-landene.

Hvor mange hektar var omlagt i EU-landene i 1985?

I Danmark er det landbrugsareal, der er omlagt til økologisk drift, i samme periode vokset med 22% pr. år. I det følgende antages, at denne vækstrate ikke ændres, og at det samlede antal hektar landbrugsareal i Danmark er konstant.

I hvilket år vil halvdelen af det danske landbrugsareal være omlagt, når 1,7% af arealet var omlagt i 1996?

Kilde: Aktuelt Miljø, 1. *august* 1996.

Opgave 6
(ca. 15 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c \ ,$$

hvor c er et tal.

Bestem $f'(x)$.

Bestem monotoniintervallerne for f, og bestem i hvert af de lokale ekstremumspunkter funktionsværdien udtrykt ved c.

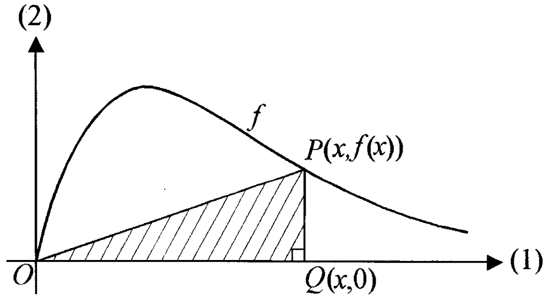
Bestem de værdier af c, for hvilke ligningen $f(x) = 0$ har en løsning i intervallet $[-1;3]$.

Opgave 7a
(ca. 15 point)

Figuren viser i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O en skitse af grafen for funktionen f, der er bestemt ved

$$f(x) = 6x \cdot (\tfrac{1}{2})^x \ , \quad x \geqq 0 \ .$$

Punktet $P(x,f(x))$ ligger på grafen for f, og punktet $Q(x,0)$ er P's projektion på førsteaksen.



Beregn arealet af trekant OPQ, når $x = 2$.

Bestem arealet $A(x)$ af trekant OPQ, når x er et vilkårligt positivt tal.

Bestem den eksakte værdi af x, for hvilken arealet af trekant OPQ er størst muligt.

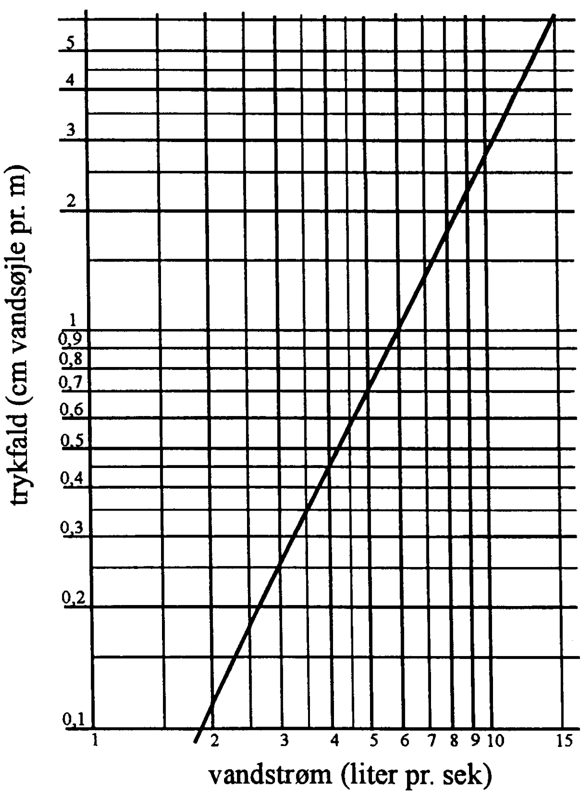
Opgave 7b
(ca. 15 point)

Trykfaldet i et vandrør afhænger af vandstrømmen gennem røret.
I en model for støbejernsrør med radius 100 mm er trykfaldet $f(x)$ en funktion af vandstrømmen x. På figuren ses grafen for f i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bestem en forskrift for f.

Bestem trykfaldet i røret, når vandstrømmen gennem det er 20 liter pr. sekund.

Beregn den procentvise stigning i trykfaldet, når vandstrømmen gennem røret øges med 15%.



Kilde: J. J. Linde-Jensen m.fl.: Vandforsyningsteknik, Teknisk Forlag, 1992.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1997 **97-8-3**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU MATEMATIK

Torsdag den 28. august 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1 og 2	ca. 15 point
opgave 3	ca. 25 point
hver af opgaverne 4, 5 og 6	ca. 15 point

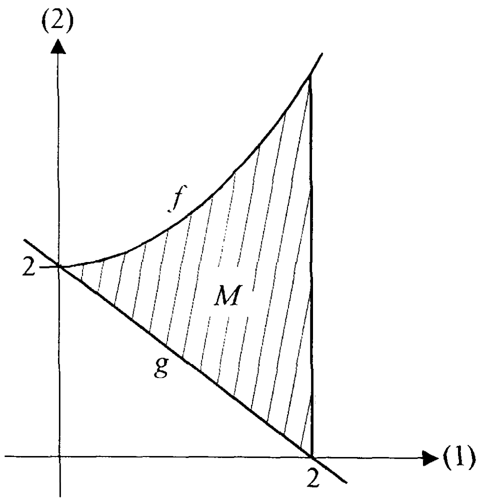
Opgave 1
(ca. 15 point)

På figuren er skraveret en punktmængde M, der er afgrænset af linjen med ligningen $x=2$ samt graferne for f og g, hvor

$$f(x)=\tfrac{1}{2}x^2+2 \quad \text{og} \quad g(x)=2-x \; .$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.



Opgave 2
(ca. 15 point)

Tilnærmede værdier af integralerne

$$\int_0^1 (x+5+3^x)\,dx \ , \quad \int_0^1 (x+3)e^{2x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{3x+4}}\,dx$$

er henholdsvis 7.32 , 11.68 og 1.33.

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne.

Opgave 3
(ca. 25 point)

I et koordinatsystem i rummet er $P(5,1,4)$ et punkt på en kugle, der har centrum i punktet $C(1,-3,2)$.

Bestem en ligning for kuglen.

Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen i P.

Planerne α og β har følgende ligninger:

$$\alpha: \quad x+2y-2z-9=0$$

$$\beta: \quad 2x+2y-z+24=0 \ .$$

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem planerne α og β.

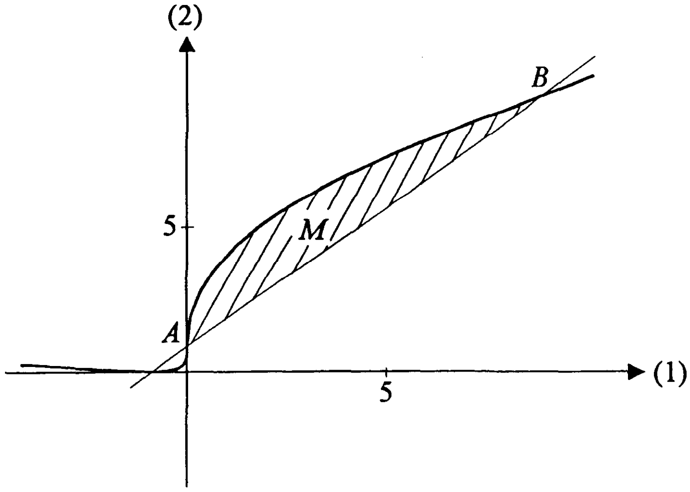
Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen m mellem α og β.

Beregn afstanden fra punktet $P(5,1,4)$ til linjen m.

Planen α er tangentplan til kuglen i punktet Q.

Beregn koordinatsættet til Q.

Opgave 4
(ca. 15 point)



I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^3 \\ y &= (t+1)^2 \end{aligned} \quad , \; t \in \mathrm{R} \; .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori kurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

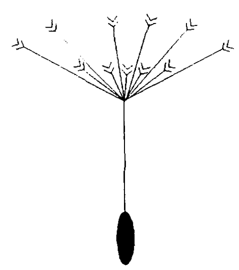
Punkterne A og B ligger på kurven, således at A svarer til parameterværdien $t = 0$, og B svarer til parameterværdien $t = 2$.
Den rette linje gennem A og B afgrænser i første kvadrant sammen med kurven en punktmængde M, der har et areal.

Beregn arealet af M.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Når et mælkebøttefrø med »faldskærm« falder ned gennem luften, er dets hastighed v som funktion af tiden t en løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt} = 10(1-2v) \; .$$



Tiden t måles i sekunder, og hastigheden v måles i meter pr. sekund.

Bestem en forskrift for v, når det oplyses, at $v(0) = 0$.

Med $s(t)$ betegnes den strækning, målt i meter, som frøet har tilbagelagt til tidspunktet t. Det oplyses, at s er stamfunktion til v, og at $s(0) = 0$.

Bestem en forskrift for s.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I en orienteret plan er givet en vektor $\vec{a}$. To andre vektorer $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er bestemt ved

$$\vec{b} = \tfrac{3}{2}\vec{a} + \widehat{\vec{a}} \quad \text{og} \quad \vec{c} = -\vec{a} + \widehat{\vec{a}}\ .$$

Beregn vinklen mellem vektorerne $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

Beregn længden af $\vec{a}$, når det oplyses, at arealet af det af $\vec{b}$ og $\vec{c}$ udspændte parallelogram er 5.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

To funktioner f og g er begge løsning til differentialligningen

$$y'' = -\frac{\pi^2}{4}\, y\ .$$

Grafen for f har vandret tangent i punktet $P(0,2)$.

Bestem funktionen f.

Grafen for g går gennem punktet $Q(1,3)$ og har i dette punkt en tangent med hældningen $-\pi$.

Løs ligningen $f(x) = g(x)$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST–SEPTEMBER 1997 **97-8-4**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 25. august 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En stokastisk variabel X er normalfordelt med middelværdi 7 og spredning 3.

Bestem $P(5 \leqq X \leqq 8)$.

b) Beregn afstanden fra punktet $P(2,4)$ til linjen med ligningen $y = -\frac{3}{4}x + 8$.

c) Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen med ligningen $y = 2x^2 + 5x + 3$.

d) Forkort brøken $\dfrac{(2x+1)\,(x+1)}{3(x^2-1)}$.

e) Bestem amplituden og perioden for den harmoniske svingning $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(3x+5)$.

Opgave 2
(ca. 10 point)

For en stokastisk variabel X, der kan antage værdierne 1, 2, 3, 4, 5 og 6, er de kumulerede sandsynligheder givet ved følgende tabel:

t	1	2	3	4	5	6
$P(X \leqq t)$	0,10	0,23	0,34	0,51	0,83	1,00

Beregn $P(3 \leqq X \leqq 5)$ og $P(X=3)$.

Udfyld en tabel som nedenstående over sandsynlighedsfordelingen for X:

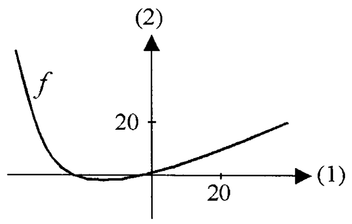
t	1	2	3	4	5	6
$P(X=t)$						

Beregn middelværdien for X.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + (\tfrac{9}{10})^x \ .$$



Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0,f(0))$.

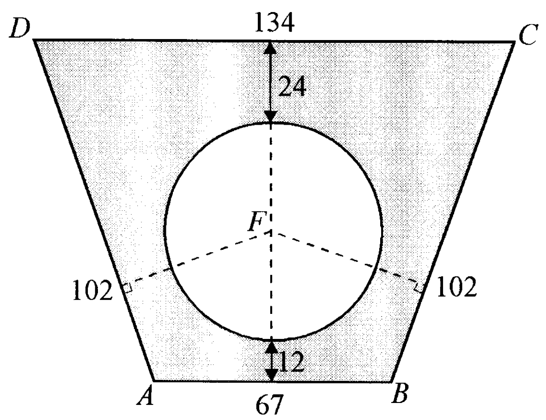
Bestem den eksakte værdi af førstekoordinaten til skæringspunktet mellem grafen for f og linjen med ligningen $y = \tfrac{1}{2}x + 2$.

Grafen for f har en skrå asymptote.

Bestem en ligning for denne asymptote.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En del af grundplanen over Københavns Politigård har form som et trapez $ABCD$. En cirkulær gårdsplads med centrum i punktet F er beliggende således, at F har samme afstand til siderne AD og BC. Politigårdens mål i meter ses på figuren.

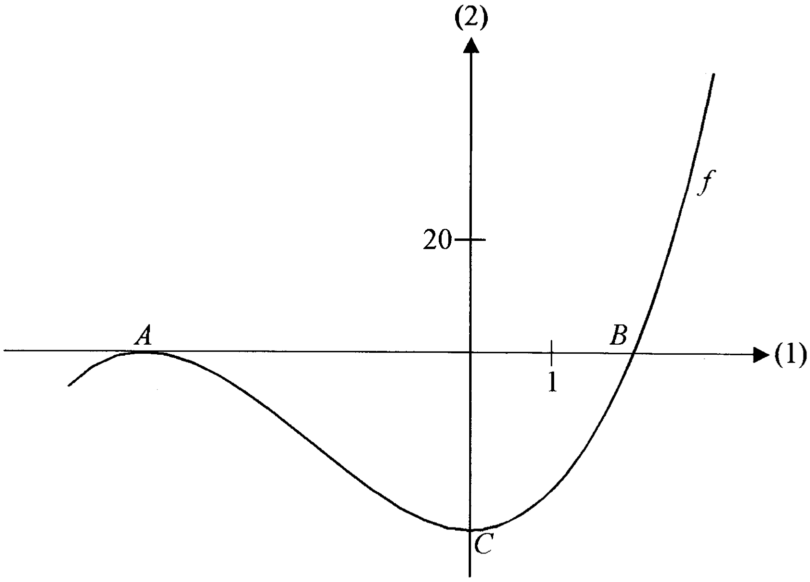


Beregn vinklerne i trapezet $ABCD$.

Beregn radius i cirklen.

Beregn afstanden fra F til siden AD.

Opgave 5
(ca. 20 point)



Figuren viser grafen for funktionen f bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 32 \ .$$

Beregn hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet $P(3,f(3))$.

Grafen for f har to tangenter m og n med hældningskoefficient 9.

Beregn førstekoordinaten til røringspunktet for m og førstekoordinaten til røringspunktet for n.

Grafen for f har førsteaksen som tangent i punktet A. Endvidere skærer grafen for f førsteaksen i punktet B og andenaksen i punktet C.

Beregn koordinatsættene til A, B, og C.

Funktionen g er defineret ved

$$g(x) = x^3 + ax^2 + b \ ,$$

hvor a og b er tal.

Beregn a og b, når det oplyses, at grafen for g har førsteaksen som tangent i punktet $Q(100,0)$.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I Merlin's annonceblad august/september 1995 gives et eksempel på en afbetalingshandel ved køb af en computer. Merlin-prisen for computeren er 14 999 kr. Udbetalingen er 3000 kr., og 48 gange betales der en månedlig ydelse på 394 kr.

Vis, at disse vilkår svarer til, at den månedlige rente ligger mellem 1,95% og 2,04%.

I et pengeinstitut indsættes der 3000 kr. på en konto til en månedlig rente på 0,5%. En måned senere startes en annuitetsopsparing på kontoen med 48 månedlige indbetalinger hver på 394 kr.

Hvor meget står der i alt på kontoen umiddelbart efter sidste indbetaling?

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Når en bestemt type gammastråling har passeret et x millimeter tykt stoflag, er strålingens intensitet $I(x)$ givet ved

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x} \ ,$$

hvor I_0 er intensiteten, inden strålingen trænger ind i stoffet, og μ er en konstant, der afhænger af det pågældende stof.
For vand er $\mu = 0{,}0069$.

Med hvor mange procent reduceres intensiteten ved passage af et 200 mm tykt vandlag?

Hvor tykt skal et vandlag være for at halvere intensiteten?

For bly er $\mu = 0{,}087$.

Hvor tykt skal et blylag være for at reducere intensiteten lige så meget som et 200 mm tykt vandlag?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1997 **97-8-1V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Onsdag den 3. december 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 20 point
opgave 5	ca. 15 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 10 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

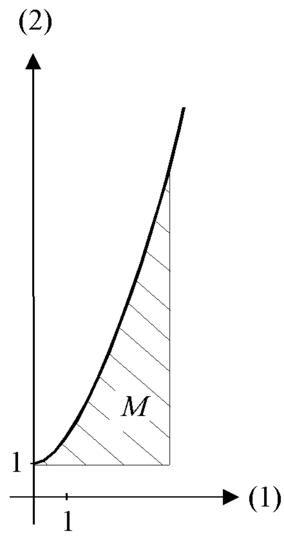
En linje m går gennem punktet $P(3,7)$ og står vinkelret på $\vec{a}$.

Bestem en parameterfremstilling for m.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem m og $\vec{b}$.

Beregn koordinatsættet til $\vec{b}$'s projektion på m.

Opgave 2
(ca. 15 point)



En punktmængde M er bestemt ved

$$M = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 4 \wedge 1 \leqq y \leqq x^{\frac{3}{2}} + 1\} \ .$$

Benyt stamfunktioner til at beregne arealet af M samt til at beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 3
(ca. 15 point)

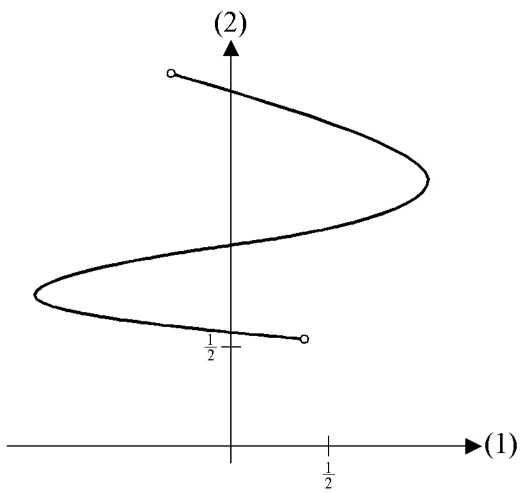
I et koordinatsystem er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ y &= 1{,}2^t \end{aligned} \quad , \qquad -3{,}5 < t < 3{,}5 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af kurvens skæringspunkter med andenaksen.

Bestem koordinatsættet til hvert af de to punkter på kurven, hvori kurvens tangent er parallel med andenaksen.

Kurven indeholder to punkter P og Q, om hvilke det gælder, at stedvektoren til punktet er parallel med hastighedsvektoren i punktet.

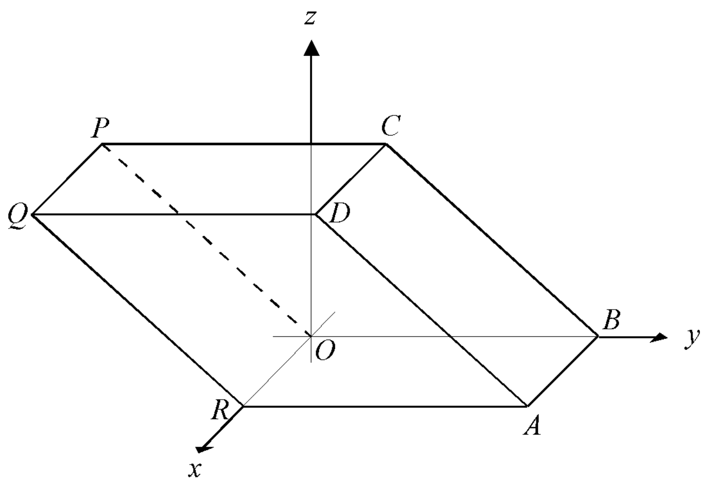


Bestem for hvert af punkterne P og Q den tilhørende værdi af tallet t.

Opgave 4
(ca. 20 point)

Figuren viser et prisme indlagt i et koordinatsystem.

$A(4,8,0)$
$B(0,8,0)$
$C(4,4,8)$
$D(8,4,8)$
$O(0,0,0)$
$P(4,-4,8)$
$Q(8,-4,8)$
$R(4,0,0)$



Beregn arealet af parallelogrammet $ABCD$.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og D.

Beregn afstanden fra punktet O til planen α.

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem xz-planen og den rette linje gennem A og D.

Beregn vinklen mellem de to sideflader, der har CD som fælles kant.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Vis, at

$$F(x) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) \ , \quad x \in \,]0;2[$$

er stamfunktion til

$$f(x) = \frac{1}{9-x^2} \ , \quad x \in \,]0;2[\ .$$

Bestem den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{9-x^2} \ , \quad x \in \,]0;2[\ ,$$

hvis graf indeholder punktet $P(1,2)$.

Bestem en ligning for tangenten til løsningskurven i punktet P.

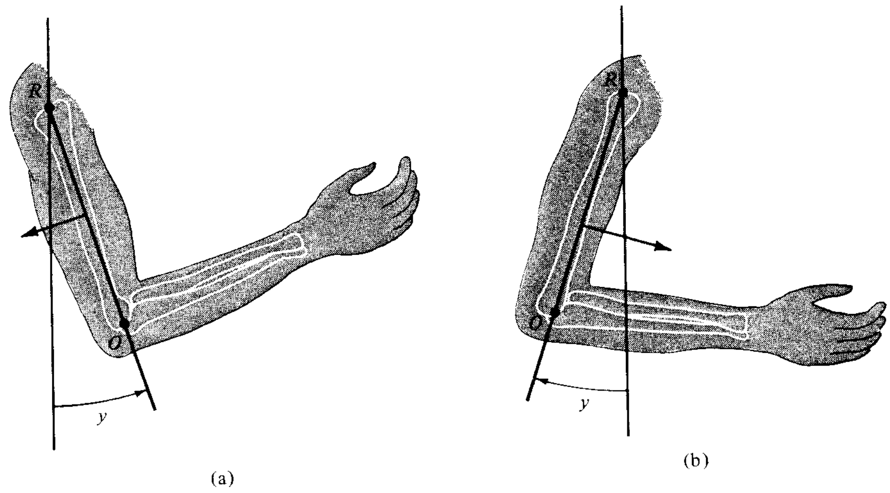
Opgave 6
(ca. 10 point)

I en model for rygtespredning inden for en gruppe på 500 personer er antallet af personer y, der har hørt et bestemt rygte, en funktion af tiden t. Der gælder, at den hastighed, hvormed y vokser, er proportional med produktet af y og det antal personer, der ikke har hørt rygtet. Proportionalitetsfaktoren er 0,0014, når tiden t måles i døgn.

Opstil en differentialligning, som y må opfylde.

Med hvilken hastighed vokser y til det tidspunkt, hvor 125 personer i gruppen har hørt rygtet?

Opgave 7a
(ca. 10 point)



Bevægelsen af en bestemt løbers arm kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9\pi^2 y = 0 \ ,$$

hvor y angiver vinklen (målt i radianer) mellem overarmen og lodret, og t angiver tiden (målt i sekunder).

Bestem y som funktion af t, når det oplyses, at y har maksimum $\frac{\pi}{8}$ for $t = \frac{1}{2}$.

Opgave 7b
(ca. 10 point)

Bestem hvert af integralerne

$$\int 2x \cdot \ln(x^2+3)\, dx \quad \text{og} \quad \int \sqrt[5]{x^3} \cdot \ln x \, dx \ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1997 **97-8-2V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 8. december 1997 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, 4, 5 og 6 . . . . ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Løs uligheden $2x^2 + 7x - 4 < 0$.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

c) Udfør divisionen $(2x^3 - 7x^2 + 2x + 10) : (2x + 1)$.

d) Sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X med middelværdi 5,8 fremgår af nedenstående tabel:

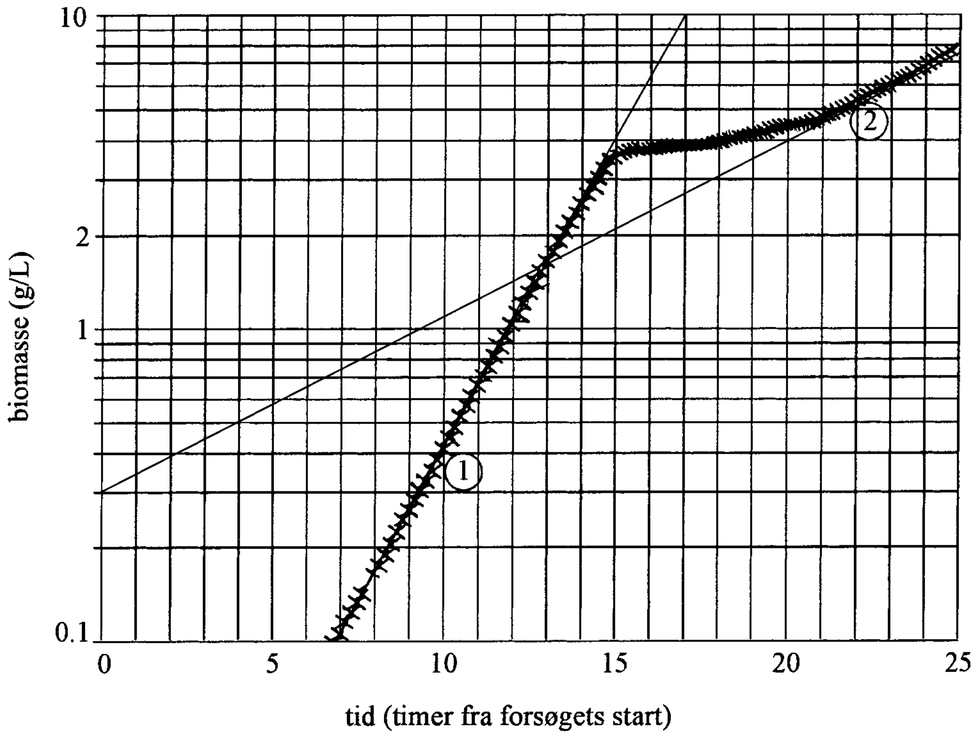
t	2	4	6	8
$P(X = t)$	0,1	0,1	0,6	0,2

Beregn spredningen for X.

e) Et beløb på 5000 kr. indsættes på en konto.

Hvor mange hele år skal der gå, før beløbet på kontoen overstiger 7000 kr., når renten i hele perioden er 3,5% p.a.?

Opgave 2
(ca. 15 point)



På figuren vises måleresultater fra en bioreaktor, hvor gærproduktet S. Cerevisiae dyrkes. Biomassen y (g/L) er vist som funktion af tiden t (målt i timer fra forsøgets start). Figuren viser, at forsøgsresultaterne i perioden mellem 7 og 14 timer efter forsøgets start med god tilnærmelse ligger på den rette linje angivet med nr. 1 i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem.

Bestem for denne periode biomassen y som funktion af tiden t, og bestem fordoblingstiden for biomassen.

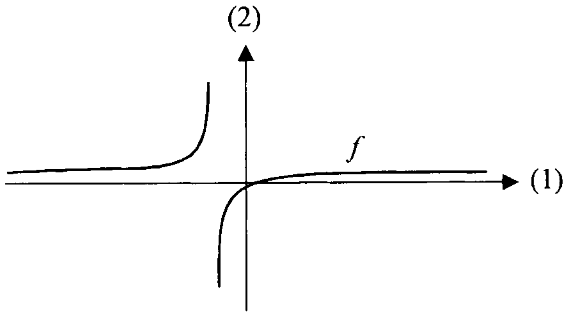
I den sidste periode af forsøget fås resultater, der ligger på den rette linje angivet med nr. 2 i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem.

Bestem fordoblingstiden for biomassen i denne periode.

Med hvor mange procent vokser biomassen pr. time i denne sidste periode?

Kilde: Naturens Verden nr. 4, 1996.

Opgave 3
(ca. 15 point)



En funktion f er givet ved $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.

Bestem definitionsmængden for f.

Gør rede for, at grafen for f har netop to asymptoter, og bestem en ligning for hver af disse.

Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforholdene for f.

Angiv værdimængden for f.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En cirkel har centrum i punktet $C(-3,-4)$ og radius 13, og en ret linje m er givet ved ligningen

$$m: \quad y = -\tfrac{12}{5}x + 10 \ .$$

Beregn afstanden fra C til m.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem førsteaksen og linjen m.

Bestem en ligning for den rette linje n, som går gennem C og er parallel med m.

Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem n og cirklen.

Opgave 5
(ca. 15 point)

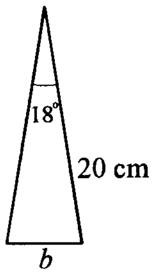
Fra et bestemt firma sendes der hver dag breve med vareprøver. Brevenes vægt, målt i gram, kan med god tilnærmelse beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi 17 og spredning 2.

Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt brev vejer over 20 gram.

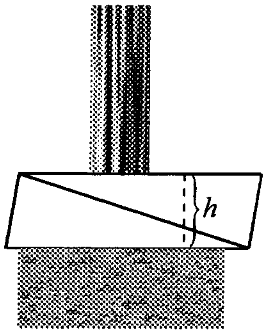
En dag, hvor der afsendes 75 breve, frankeres alle brevene uanset vægt med 3,75 kr., hvilket er portoen for breve, der vejer 20 gram eller derunder.

Bestem sandsynligheden for, at højst 1 af de 75 breve vejer over 20 gram og dermed er underfrankeret.

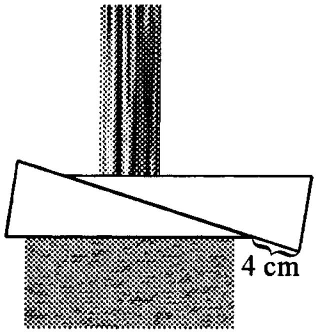
Opgave 6a
(ca. 15 point)



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Figur 1 viser tværsnittet af en trækile. Tværsnittet har form som en ligebenet trekant, hvori topvinklen er 18°, og længden af de to lige lange sider er 20 cm.

Beregn kilens bredde b.

En stolpe hviler på to af disse trækiler, som vist på figur 2. Stolpen er herved hævet stykket h over underlaget.

Beregn h.

Kilerne skrider fra hinanden til den position, der er vist på figur 3.

Hvor meget er stolpen nu hævet over underlaget?

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Et annuitetslån på 2000 kr. afdrages over 18 måneder. Renten er 1,3% pr. måned.

Bestem den månedlige ydelse.

En bestemt forretning tilbyder et lån på 2000 kr. på følgende vilkår:

> Hvis lånet tages den 1. august, kan man vente med første ydelse til den 1. december. Herefter afdrages lånet med 130 kr. om måneden, således at der i alt betales 18 ydelser.

Gør rede for, at forretningens månedlige rente under disse betingelser kan bestemmes ud fra ligningen

$$130 = 2000 \cdot (1+r)^3 \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-18}} \; .$$

Vis, at forretningens månedlige rente ligger mellem 1,2% og 1,3%.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN JANUAR-FEBRUAR 1998 **97-8-3V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 29. januar 1998 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 20 point
opgave 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point

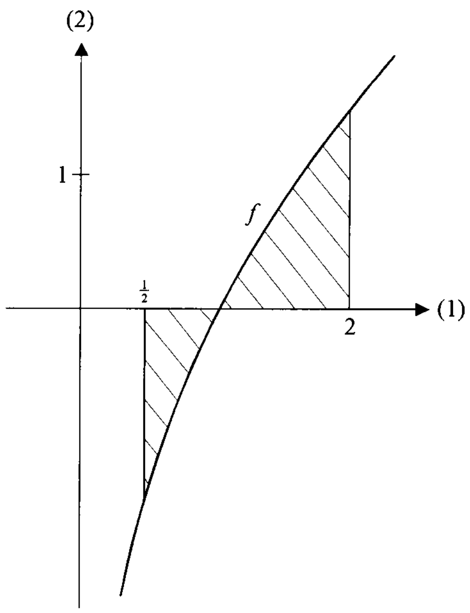
Opgave 1
(ca. 15 point)

Figuren viser en skitse af grafen for funktionen

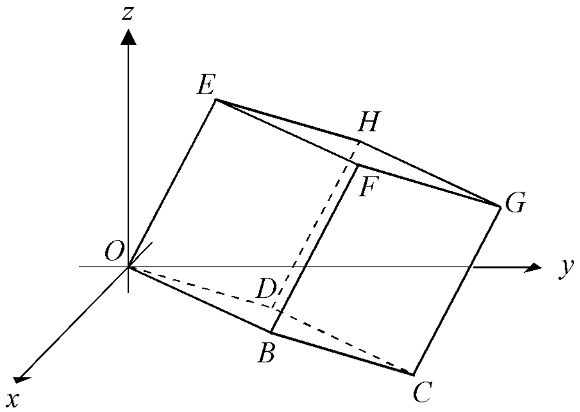
$$f(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x > 0 .$$

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af den punktmængde, der er skraveret på figuren.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når den skraverede punktmængde drejes 360° om førsteaksen.



Opgave 2
(ca. 20 point)



$O(0,0,0)$
$B(2,2,1)$
$C(1,4,-1)$
$D(-1,2,-2)$
$E(-2,1,2)$

På figuren ses en terning med hjørnerne O, B, C, D, E, F, G og H indtegnet i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O.

Beregn $|BC|$.

Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem C og E.

Beregn den spidse vinkel mellem m og xy-planen.

Beregn koordinatsættet til G.

Diagonalerne CE og GO skærer hinanden i et punkt M.

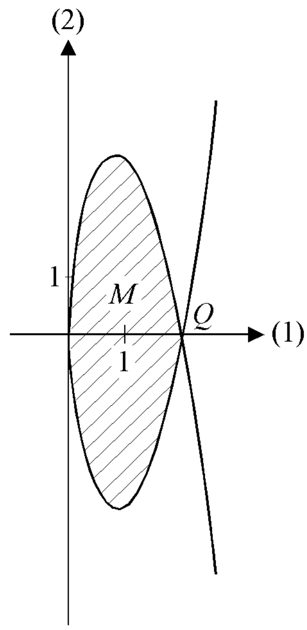
Beregn koordinatsættet til M.

Bestem en ligning for den kugle, der går gennem terningens hjørner.

Opgave 3
(ca. 20 point)

I planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig således, at der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= 4t - t^5 \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$



Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem banekurven og den rette linje med ligningen $x = 4$.

Punktet $Q(2,0)$ er et dobbeltpunkt på kurven, det vil sige et punkt, der svarer til to forskellige værdier af t.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af de to hastighedsvektorer i Q.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori hastighedsvektoren er parallel med førsteaksen.

Kurven afgrænser en punktmængde M. En tilnærmet værdi for arealet af M er 8,62.

Beregn den eksakte værdi af arealet.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y'' = 9y \ .$$

Grafen for f går gennem punktet $P(\frac{1}{3}, \mathrm{e})$ og har vandret tangent i dette punkt.

Bestem en forskrift for f.

Bestem en stamfunktion til f.

Opgave 5
(ca. 20 point)

Når et opvarmet legeme anbringes i et rum med lavere temperatur, afkøles det. Legemets temperatur y (målt i °C) er en funktion af tiden t (målt i minutter). For et bestemt legeme L_1, som er opvarmet til 75°C og anbragt i et rum, hvor temperaturen er konstant, gælder

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}183(18 - y) \ .$$

Beregn den hastighed, hvormed temperaturen falder, når legemets temperatur er 53°C.

Bestem den løsning til ovenstående differentialligning, for hvilken $y = 75$, når $t = 0$.

Beregn det tidspunkt, hvor temperaturen af legemet L_1 er 20°C.

Der gælder, at den hastighed, hvormed temperaturen y af et legeme ændrer sig, når det anbringes i et rum med en konstant temperatur R, er proportional med differensen mellem R og y.
For et bestemt legeme L_2 er proportionalitetsfaktoren 0,213.

Opstil en differentialligning for dette legemes temperatur som funktion af tiden.

Legemet L_2 opvarmes til 60°C og anbringes i et rum, hvor temperaturen er konstant. Efter 5 minutter er legemets temperatur 36°C.

Beregn rummets temperatur.

Opgave 6a
(ca. 10 point)

I planen er givet tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$, om hvilke det oplyses, at

$$|\vec{u}| = 1,\ |\vec{v}| = 2, \quad \angle(\vec{u},\vec{v}) = 60^\circ \quad \text{og} \quad \vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{o}\ ,$$

hvor $\vec{o}$ betegner nulvektoren.

Beregn $|\vec{w}|$.

Beregn vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{w}$.

Opgave 6b
(ca. 10 point)

Bestem for $x > 0$ og $y > 1$ den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 1\ .$$

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN JANUAR-FEBRUAR 1998 **97-8-4V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Tirsdag den 3. februar 1998 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

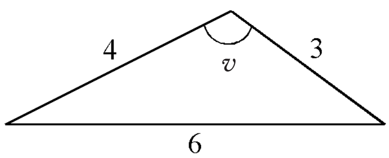
Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, og 4 . . . . ca. 15 point
opgave 5 . . . . ca. 20 point
opgave 6 . . . . ca. 10 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 10 og spredning 3.
Bestem $P(7 \leqq X \leqq 16)$.

b) Beregn vinkel v i den viste trekant.



c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = (x^2 + 3x)^7$.

d) Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem linjerne med ligningerne

$$3x - y = 4$$
$$2x + y = 10 \ .$$

e) En gæld på 10 000 kr. tilbagebetales med 5 lige store årlige ydelser. Renten er 14% p.a.

Bestem størrelsen af ydelsen.

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem har en linje m ligningen

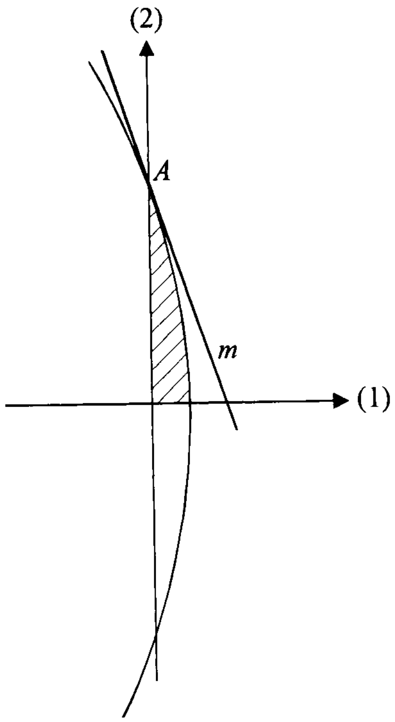
$$m\colon\ y = -3x + 12 \quad .$$

Bestem den spidse vinkel mellem m og koordinatsystemets førsteakse.

Skæringspunktet mellem linjen og andenaksen betegnes med A. En cirkel med centrum på koordinatsystemets førsteakse har m som tangent i punktet A.

Bestem en ligning for cirklen.

Beregn arealet af det skraverede område.



Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x \cdot \ln x \quad , \qquad x > 0 \quad .$$

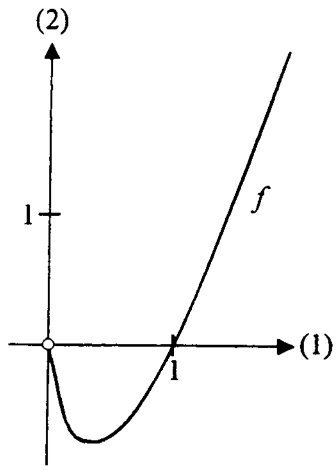
Bestem $f'(x)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Grafen for f har netop én vandret tangent.

Bestem en ligning for denne tangent.

Angiv værdimængden for f.



Opgave 4 (ca. 15 point)

Af en artikel i Politiken den 17. september 1996 fremgår det, at 20% af indbyggerne i Danmark lider af astma eller allergi. I det følgende antages derfor, at sandsynligheden er 0,2 for, at en tilfældigt valgt dansker har astma eller allergi.

Bestem sandsynligheden for, at der i en forsamling på 30 tilfældigt valgte danskere er netop 10, der har astma eller allergi.

En forsamling består af n tilfældigt valgte danskere.

Bestem sandsynligheden for, at ingen af disse har astma eller allergi, når $n = 27$.

Beregn den mindste værdi, som n kan have, når sandsynligheden for, at ingen personer i forsamlingen har astma eller allergi, skal være under 0,0003.

Opgave 5 (ca. 20 point)

Mængden af et bestemt radioaktivt stof aftager eksponentielt som funktion af tiden med en halveringstid på 21 år. Med $f(t)$ betegnes det antal gram af det radioaktive stof, der er tilbage til tiden t (målt i år).

Tegn i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem grafen for f, når det oplyses, at $f(0) = 120$.

Aflæs det tidspunkt, hvor der er 50 gram tilbage af stoffet.

Hvor mange gram af stoffet er der tilbage til tiden $t = 42$?

Bestem en forskrift for f.

Beregn det tidspunkt, hvor der er 1 gram tilbage af stoffet.

For et andet radioaktivt stof gælder, at det antal gram af stoffet, der er tilbage til tiden t, kan angives ved en funktion g med forskriften

$$g(t) = 50\,\mathrm{e}^{-0{,}02476\,t} \quad .$$

Til hvilket tidspunkt er der lige mange gram tilbage af de to radioaktive stoffer?

Opgave 6a (ca. 10 point)

En funktion f er bestemt ved

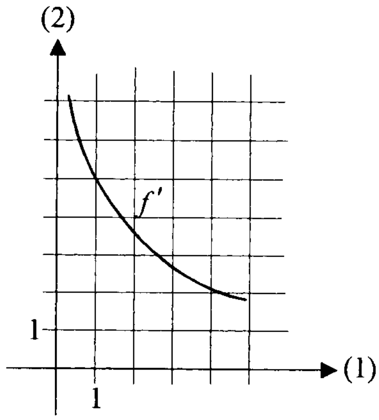
$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 7}{x^2 - 4x + 4} \ .$$

Bestem definitionsmængden for f.

Bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

Opgave 6b (ca. 10 point)

Der er givet en differentiabel funktion f.
Figuren viser grafen for den afledede funktion f'.



Gør rede for, at f er voksende i intervallet $[1;4]$.

Det oplyses, at $f(1) = 2$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ–JUNI 1998 **98-8-1**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 15. maj 1998 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
opgave 2	ca. 20 point
opgave 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 25 point
hver af opgaverne 5 og 6	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen gælder, at $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 10$ og $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

Beregn skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn den værdi af tallet t, for hvilken $(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{a}$.

Opgave 2
(ca. 20 point)

Gør rede for, at funktionen $f(x) = \sqrt{2 \cdot \sin x + 9}$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y} \ .$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse, linjen med ligningen $x = 0$ og linjen med ligningen $x = \pi$ en punktmængde M.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

En anden løsning til differentialligningen er funktionen g, hvis graf går gennem punktet $P(0,2)$.

Bestem en forskrift for g.

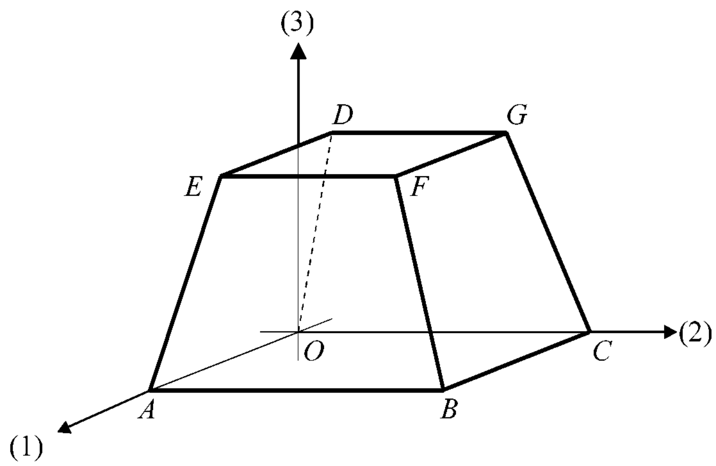
Opgave 3 (ca. 10 point)

Bestem hvert af integralerne

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad \text{og} \quad \int e^x \cdot \ln(5+e^x)\,dx \ .$$

Opgave 4 (ca. 25 point)

$A\,(6,0,0)$
$B\,(6,6,0)$
$C\,(0,6,0)$
$D\,(1,1,5)$
$E\,(5,1,5)$
$F\,(5,5,5)$
$G\,(1,5,5)$



På figuren ses en pyramidestub, som er indlagt i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder sidefladen $ABFE$.

Bestem vinklen mellem fladerne $ABFE$ og $ABCO$.

Bestem afstanden fra C til planen α.

Diagonalerne BD og OF skærer hinanden i et punkt S.

Bestem koordinatsættet til S.

En kugle har pyramidestubbens fire skrå sideflader og fladen $DEFG$ som tangentplaner. Kuglens centrum P ligger inden i pyramidestubben på linjen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Bestem koordinatsættet til kuglens centrum P.

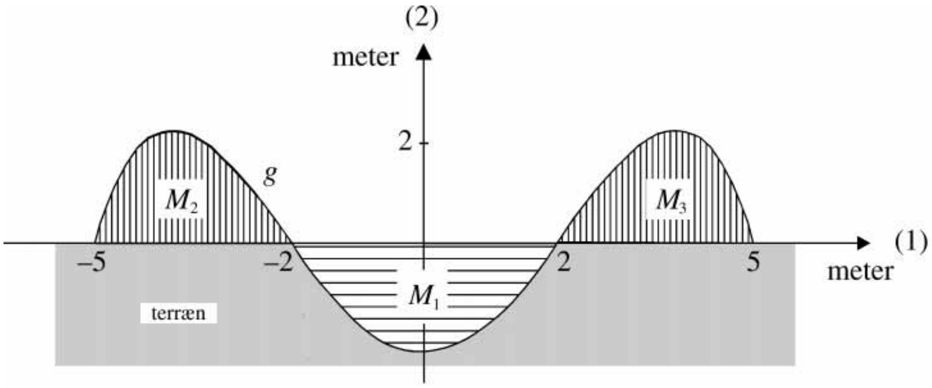
Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er defineret ved $f(x) = -x^4+29x^2-100$. Tallene a og b er givet ved

$$a = \int_{-2}^{2} f(x)dx \quad \text{og} \quad b = \int_{-5}^{5} f(x)dx \ .$$

Med 1 decimals nøjagtighed er $a = -258{,}1$.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner værdien af b med 1 decimals nøjagtighed.



I et vandret terræn skal der anlægges en 100 meter lang, lige kanal. Kanalen skal i hele sit forløb have samme lodrette tværsnit. På figuren er dette tværsnit indtegnet i et koordinatsystem, således at førsteaksen ligger i terrænets overflade. Kurven på figuren er en del af grafen for funktionen

$$g(x) = \tfrac{1}{50} f(x) \ .$$

Punktmængden M_1 er tværsnit af den jord, der skal graves væk, mens M_2 og M_3 er tværsnit af den jord, der skal fyldes på.
Rumfanget af den jord, der skal graves væk, er arealet af M_1 ganget med kanalens længde.

Bestem rumfanget af den jord, der skal graves væk.

Hvor mange m^3 jord skal der fyldes på?

Opgave 6a (ca. 15 point)

I en sø er fosforkoncentrationen (målt i mg/m^3) en funktion f af tiden t (målt i døgn).
I en model forudsættes det, at der pr. døgn udledes en konstant mængde fosfor i søen. I denne model er f den løsning til differentialligningen

$$\frac{du}{dt} = 0{,}001(200 - u) \ , \quad u < 200 \ ,$$

der opfylder, at $f(475) = 107$.

Bestem en forskrift for f, og beregn $f(1000)$.

I en prognose forudsættes det, at fosforudledningen i søen kan bringes til ophør, når $t = 1000$. I tidsrummet indtil $t = 1000$ kan fosforkoncentrationen beskrives ved den fundne løsning ovenfor. I tidsrummet efter $t = 1000$ kan fosforkoncentrationen beskrives ved den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}001y \ ,$$

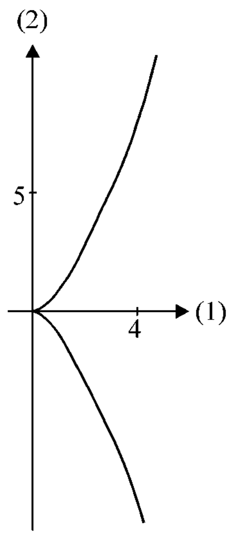
som opfylder, at $y = 145$, når $t = 1000$.

Til hvilket tidspunkt er fosforkoncentrationen ifølge prognosen nået ned på 10 mg/m^3?

Opgave 6b (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig således, at der til tidspunktet t gælder

$$x = t^2$$
$$y = t^3 \ .$$



Figuren viser en skitse af banekurven.

Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem banekurven og den linje, der har ligningen $x = 4$.

Bestem gradtallet for vinklen mellem hastighedsvektoren til tiden $t = 1$ og vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Hastighedsvektoren til tidspunktet t betegnes med $\vec{v}(t)$. Fra tiden $t = 0$ til tiden $t = 2$ gennemløber punktet P en del af banekurven. Længden L af denne del af banekurven er givet ved

$$L = \int_0^2 |\vec{v}(t)| \, dt \ .$$

Beregn den eksakte værdi af L.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Onsdag den 20. maj 1998 kl. 9.00–13.00

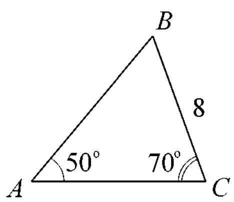
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, 4, 5 og 6 . . . . ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a)



Beregn $|AB|$ i den viste trekant.

b) En cirkel har ligningen

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y = 15 \quad .$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

c) Om en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi 7,5 oplyses, at $P(X \leqq 4) = 25\%$.

Bestem $P(X \geqq 9)$.

d) Løs ligningen $\cos x = 0{,}2345 \;,\; x \in [0;2\pi]$.

e) På en konto indsættes 7000 kr. Efter 5 år er beløbet vokset til 7919,86 kr.

Beregn den gennemsnitlige årlige rente i procent.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + 6 \ .$$

Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforhold for f.

Funktionen har et lokalt maksimum og et lokalt minimum. De tilhørende punkter på grafen kaldes henholdsvis A og B.

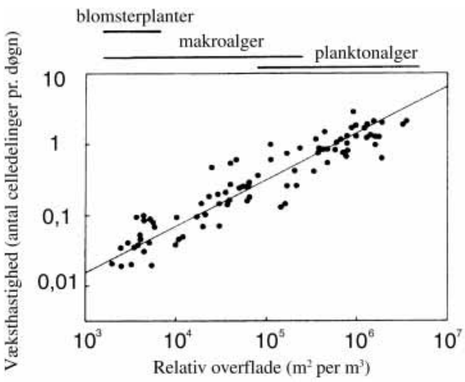
Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A og B.

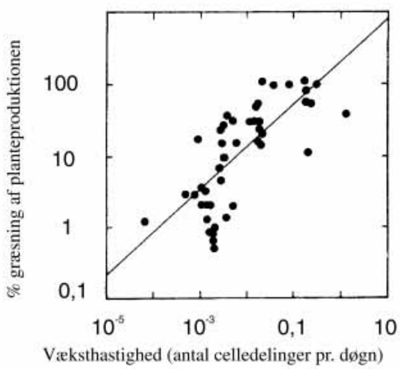
Linjen gennem A og B skærer grafen for f i A og B samt i et tredje punkt C.

Beregn førstekoordinaten til C.

Opgave 3 (ca. 15 point)

De følgende figurer viser resultater fra en undersøgelse af, hvordan visse havplanter vokser og bliver spist (græsset) af mikroorganismer.





Kilde: Naturen Verden, 1996/1.

I en model, som bygger på de viste resultater, beskrives sammenhængen mellem planters væksthastighed v (antal celledelinger pr. døgn) og deres relative overflade x (m^2 pr. m^3) ved

$$v = 1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot x^{0{,}66} \ .$$

Beregn den relative overflade, der svarer til en væksthastighed på 0,1.

Beregn den procentvise stigning i v, når x stiger med 30%.

I samme model beskrives sammenhængen mellem den procentdel af planteproduktionen y, der spises, og væksthastigheden v ved

$$y = 1{,}89 \cdot 10^2 \cdot v^{0{,}58} \ .$$

Bestem y udtrykt ved x.

Opgave 4
(ca. 15 point)

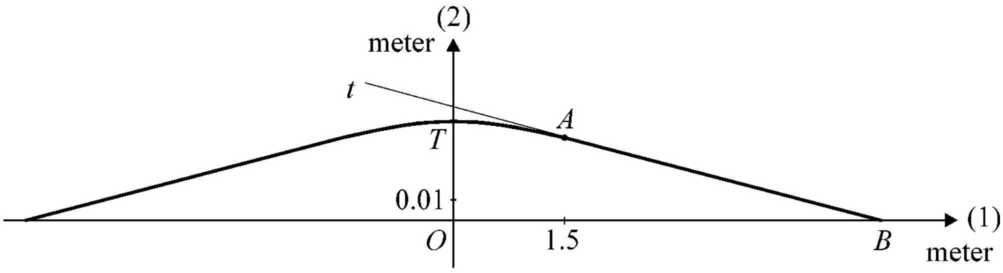
Om et lotteri oplyses det, at der er gevinst på hver femte lodseddel. Sandsynligheden for gevinst på en lodseddel sættes derfor i det følgende til 0,2.

Bestem sandsynligheden for at få netop 2 gevinster ved køb af 10 lodsedler.

Bestem sandsynligheden for at få mindst én gevinst ved køb af 10 lodsedler.

Hvor mange lodsedler skal man mindst købe, hvis sandsynligheden for at få mindst én gevinst skal være over 95%?

Opgave 5
(ca. 15 point)



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Figuren viser en vejprofil indtegnet i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Vejprofilen er symmetrisk om koordinatsystemets andenakse. Punktet B angiver vejkanten, $|OB|$ er den halve vejbredde, og $|OT|$ kaldes vejens pilhøjde. For $0 \leqq x \leqq 1.5$ følger vejprofilen grafen for en funktion f. For $x \geqq 1.5$ følger vejprofilen tangenten t til grafen for f i punktet $A(1.5,\ f(1.5))$. Punktet B er skæringspunkt mellem tangenten t og førsteaksen.

For én vejprofil er

$$f(x) = -0.01 \cdot x^{\frac{3}{2}} + 0.05 \ .$$

Bestem $f'(x)$.

Bestem en ligning for tangenten t, og bestem vejens bredde.

For en anden vejprofil er

$$f(x) = k \cdot x^{\frac{3}{2}} + c \ ,$$

hvor k og c er konstanter. Hældningskoefficienten for tangenten t til grafen for f i punktet A er for denne vejprofil lig med -0.028, og vejens bredde er 10 m.

Beregn pilhøjden $|OT|$ for denne vejprofil.

Kilde: R. Honoré: Vejbygning, 2. udgave, Teknisk Forlag, 1971.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

I trekant ABC er $a = 9$, $b = 12$ og $c = 6$.

Beregn vinkel A.

Højden fra B skærer siden AC i punktet D.

Beregn $|AD|$.

Bestem forholdet mellem arealerne af trekant ABD og trekant DBC.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Tabellen viser sammenhængen mellem to størrelser x og y.

x	6	9	10	11	12
y	800	1500	1800	2200	2700

Vis ved indtegning i et passende koordinatsystem, at y med god tilnærmelse er en eksponentielt voksende funktion af x.

Bestem en forskrift for denne funktion, og angiv fordoblingskonstanten for funktionen.

Benyt forskriften til at bestemme x, når det oplyses, at $y = 5900$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 27. august 1998 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3, 4, 5, 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Punktet A har koordinatsættet $(1,1)$, og punkterne B og C er bestemt ved, at

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \ , \quad \text{og} \quad \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} \ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne B og C.

Et punkt D er bestemt ved, at $\overrightarrow{AD}$ er ensrettet med $\vec{b}$, og at $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.

Beregn arealet af firkant $ABCD$.

Opgave 2
(ca. 10 point)

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$y'' = 6x - 12 \ .$$

Bestem den løsning, hvis graf går gennem punkterne $A(1,3)$ og $B(2,-5)$.

Opgave 3 (ca. 15 point)

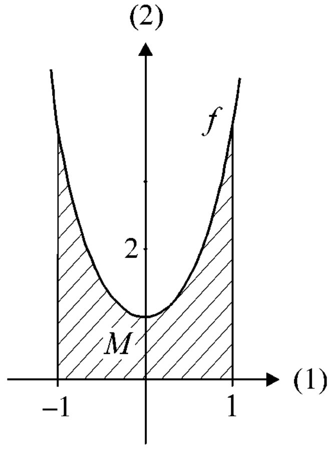
En funktion f er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) \ .$$

Den på figuren skraverede punktmængde M har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.



Opgave 4 (ca. 15 point)

I rummet er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O.

Gør rede for, at punkterne $A(5,0,0)$, $B(4,0,2)$, $C(0,4,2)$ og $D(1,4,0)$ er vinkelspidser i et parallelogram.

Beregn arealet af dette parallelogram.

Beregn vinklen mellem parallelogrammets plan og den plan, der indeholder punkterne O, B og C.

Opgave 5 (ca. 15 point)

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y(1+x^4)} \quad ,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2,1)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Opgave 6 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem er der givet punkterne $O(0,0,0)$, $C(3,4,12)$ og $P(39,0,0)$.

Bestem en ligning for den plan α, der går gennem P og har $\overrightarrow{OC}$ som normalvektor.

En kugle har centrum i O, og en anden kugle har centrum i C. De to kugler rører hinanden i et punkt S. I punktet S har kuglerne en fælles tangentplan, som indeholder punktet P.

Beregn koordinatsættet til S.

Bestem en ligning for hver af de to kugler.

Opgave 7a (ca. 15 point)

I planen er givet et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. To punkter P og Q bevæger sig således, at det til tidspunktet t gælder, at

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2+4t \\ 9-2t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -5+3t \\ -20+5t \end{pmatrix} ,$$

hvor $-10 \leqq t \leqq 10$.

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet R mellem de to banekurver.

Til hvilket tidspunkt befinder P sig i punktet R?

Med hvor stor tidsforskel passerer P og Q punktet R?

Afstanden d mellem P og Q er en funktion af tiden t.

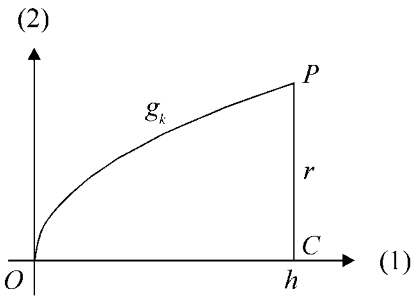
Bestem en forskrift for d, og bestem den værdi af t, hvor afstanden mellem P og Q er mindst.

Opgave 7b (ca. 15 point)

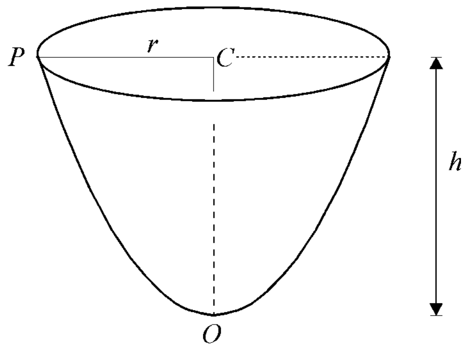
En virksomhed producerer skåle, hvis indvendige form fremkommer, når grafen for funktionen

$$g_k(x) = k \cdot \sqrt{x} \ , \quad 0 \leqq x \leqq h \quad \text{og} \quad k > 0 \ ,$$

drejes 360° omkring førsteaksen (figur 1). Rumfanget af den mængde vand, som skålen kan indeholde, betegnes med V (cm^3). På figur 2 ses den indvendige form af en sådan skål med radius r (cm) og højde h (cm).



Figur 1



Figur 2

Bestem r og V for en skål, hvor $k = 5$ og $h = 10$.

Beregn radius for en skål, hvor $V = 10\,000$ og $h = 20$.

Bestem for en vilkårlig skål rumfanget V udtrykt ved r og h.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 24. august 1998 kl. 9.00–13.00

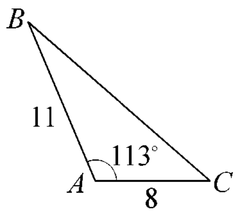
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1 . . . . ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3, 4, 5 og 6 . . . . ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a)



Beregn siden a i den viste trekant.

b) Beregn den eksakte værdi af afstanden fra punktet $P(2,-7)$ til linjen med ligningen $y=\frac{1}{2}x+3$.

c) Find differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x)=e^{x^2+3}$.

d) Løs uligheden

$$7{,}2\cdot 3^x < 10 \ .$$

e) Bestem en ligning for asymptoten til grafen for funktionen

$$f(x)=\frac{2x^2+3x+4}{x^2+1} \ .$$

Opgave 2 (ca. 15 point)

Ved en høst af skovfogedæbler viser det sig, at vægten af et æble kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi 83 gram og spredning 10 gram.

Bestem $P(X < 80)$, $P(X > 100)$ og $P(82 < X < 92)$.

Der udtages tilfældigt 10 æbler fra høsten af skovfogedæbler.

Beregn sandsynligheden for, at højst 2 af disse æbler vejer under 80 gram.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 4x \ ,$$

hvor a er et tal.

Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforhold for f, når $a = 4$.

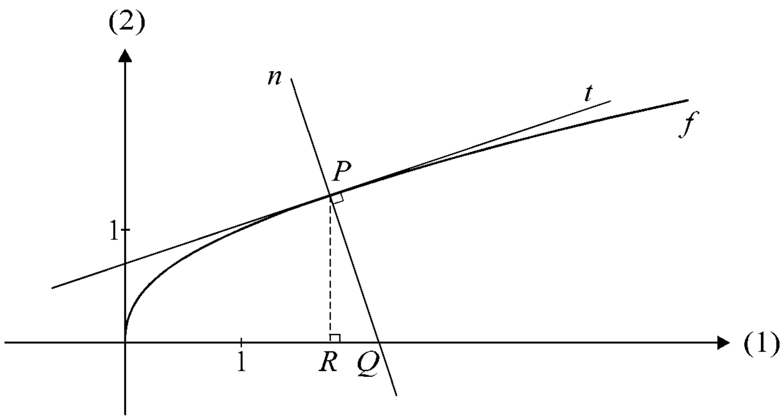
Bestem tallet a, således at $f(x)$ har et lokalt ekstremum i $x = 2$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

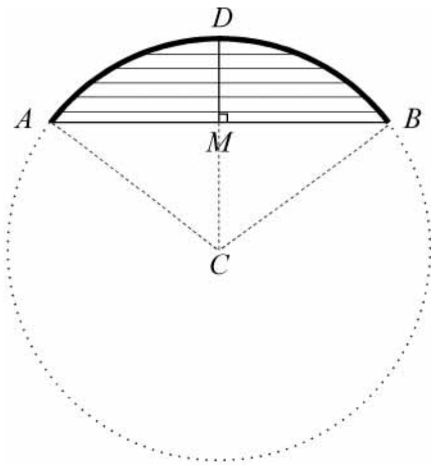
Funktionen f er givet ved $f(x) = \sqrt{x}$. For $x_0 > 0$ betegner $P(x_0, \sqrt{x_0})$ et punkt på grafen for f. En linje n går gennem punktet P og står vinkelret på tangenten t til grafen for f i P. Skæringspunktet mellem n og førsteaksen kaldes Q. Punktet R er den vinkelrette projektion af P på førsteaksen.

Beregn arealet af trekant RPQ i tilfældet $x_0 = 4$.

Vis, at der for ethvert positivt tal x_0 gælder, at arealet af trekant RPQ er $\frac{1}{4}\sqrt{x_0}$.



Opgave 5
(ca. 15 point)



På et potteskår er en del af pottens rand bevaret. Det antages, at potteskårets rand er en del af en cirkel. Cirkelbuen ADB på figuren illustrerer den bevarede del af randen. Korden AB er målt til 16,0 cm, og afstanden $|MD|$ fra kordens midtpunkt til randen er målt til 3,9 cm.

Bestem cirklens radius.

Beregn gradtallet for vinkel ACB.

Beregn arealet af det skraverede cirkelafsnit.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

Der gælder, at sammenhængen mellem støjintensiteten I (målt i watt/m^2) og støjniveauet L (målt i dB) fra en støjkilde er givet ved

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) ,$$

hvor $I_0 = 10^{-12}$ (watt/m^2) er den laveste intensitet, som det menneskelige øre kan høre.

Beregn støjintensiteten svarende til støjniveauet 72 dB og svarende til støjniveauet 78 dB.

En personbils samlede støjintensitet er summen af intensiteterne for motorstøj og dækstøj. Ved en hastighed på 70 km/time er en personbils motorstøjniveau 72 dB, og dækstøjniveauet er 78 dB.

Beregn personbilens støjniveau svarende til den samlede støjintensitet ved en hastighed på 70 km/time.

Kilde: Vejlaboratoriets Rapport 94, 1990.

Opgave 6b (ca. 15 point)

Tabellen viser verdens samlede årlige energiforbrug omregnet til olieforbrug i millioner tons over en periode på 25 år.

år	1970	1975	1980	1985	1990	1995
energiforbrug	4700	5600	6400	6900	7800	8200

Kilde: Politiken, 31/7 1996.

Beregn for femårsperioden 1970–75 den samlede procentvise stigning i energiforbruget.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning p i samme periode.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i perioden 1970–1995.

Beregn, hvor stort energiforbruget ville have været i 1995, hvis den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i hele perioden 1970–1995 havde været p.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1998 **98-8-1V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 3. december 1998 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 10 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point
opgave 7	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 10 point)

Punktet $P(1,5,7)$ ligger på en kugle, der har centrum i punktet $C(1,2,3)$.

Bestem en ligning for kuglen.

En linje m har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Bestem afstanden fra kuglens centrum til linjen m.

Opgave 2 (ca. 15 point)

I en orienteret plan er givet en vektor $\vec{a}$ med længden 4. En vektor $\vec{b}$ er bestemt ved

$$\vec{b}.= 2\vec{a}+\tfrac{1}{2}\widehat{\vec{a}}$$

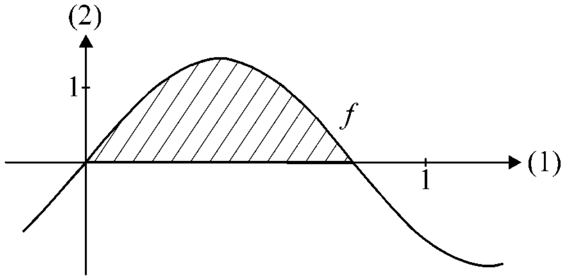
Beregn længden af $\vec{b}$.

Beregn arealet af det af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram.

Beregn længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Opgave 3
(ca. 15 point)

Figuren viser grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{2}\,\sin(4x)$.



Beregn den eksakte værdi af arealet af det skraverede område.

Beregn den eksakte værdi af rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når det skraverede område drejes 360° om koordinatsystemets førsteakse.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En linje m går gennem punktet $A(-2,-1,-7)$ og har vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som retningsvektor.

Bestem en parameterfremstilling for m.

Linjen m ligger i en plan α, der indeholder punktet $B(1,3,-2)$.

Bestem en ligning for planen α.

Linjen n er bestemt ved parameterfremstillingen

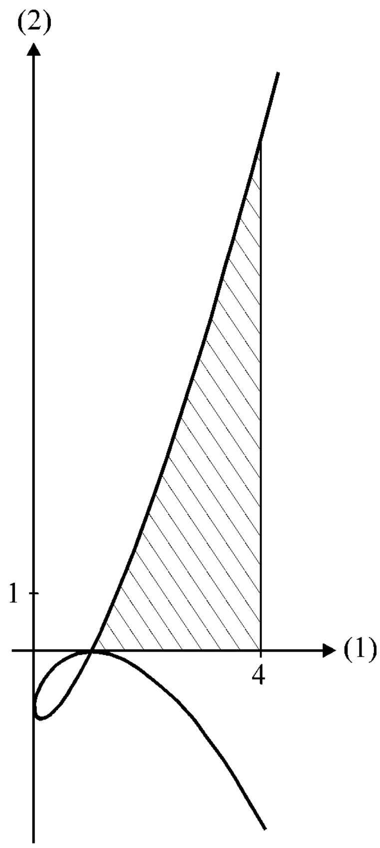
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Undersøg, om linjerne m og n skærer hinanden.

Opgave 5
(ca. 20 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig således, at der til tidspunktet t gælder

$$x = t^2$$
$$y = (t-1)\,(t+1)^2 \quad .$$



Bestem de tre tidspunkter, hvor P befinder sig på en af koordinatsystemets akser.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatakserne.

Banekurven har et dobbeltpunkt, det vil sige et punkt, hvori P befinder sig til to forskellige værdier af t.

Beregn gradtallet for vinklen mellem hastighedsvektorerne svarende til disse to værdier af t.

I første kvadrant afgrænser banekurven sammen med linjen $x = 4$ en punktmængde, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Opgave 6 (ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}15(23-y) \ , \quad y < 23 \ .$$

Antallet af individer i en population er en funktion N af tiden t. Funktionen N er løsning til følgende differentialligning:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}15(23-\ln N)N \ .$$

Bestem væksthastigheden for populationen til det tidspunkt, hvor $N = 50\,000$.

Bestem en forskrift for N, idet $N(0) = 15\,000$.

Opgave 7a (ca. 10 point)

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \ .$$

Bestem hver af de løsninger, hvis graf har linjen med ligningen $y = 4x - 1$ som tangent.

Opgave 7b (ca. 10 point)

Beregn den eksakte værdi af det tal c, for hvilket

$$\int_0^2 t \cdot e^t \, dt = c \cdot \int_0^2 e^t \, dt \ .$$

En funktion f med definitionsmængde $\mathbb{R}_+$ er givet ved

$$\int_0^x t \cdot e^t \, dt = f(x) \cdot \int_0^x e^t \, dt \ .$$

Bestem en forskrift for f.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1998 **98-8-2V**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Tirsdag den 8. december 1998 kl. 9.00–13.00

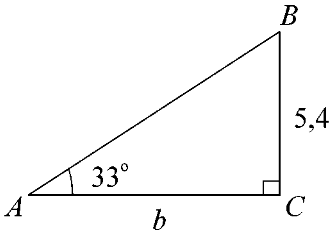
Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a)



Beregn siden b i den viste trekant.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$.

c) Løs ligningen $\sin x = 0{,}4817$, $x \in [0;2\pi]$.

d) Udfør divisionen $(x^2+4x+4):(2x+4)$.

e) Linjen l har ligningen $y = \frac{3}{4}x - 2$.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem punktet $P(3,-2)$, og som står vinkelret på l.

Opgave 2 (ca. 15 point)

For et vandværk er driftsomkostningerne D (målt i 1000 kr.) ved behandling af vand afhængig af den behandlede vandmængde x (målt i m^3/time). I skemaet er angivet nogle sammenhørende værdier af x og D.

Behandlet vandmængde x (m^3/time)	30	50	80	140	200
Driftsomkostninger D (1000 kr.)	55	91	143	248	350

Indtegn oplysningerne fra skemaet i et passende koordinatsystem, og gør herved rede for, at der med tilnærmelse gælder, at driftsomkostningerne D er en funktion af den behandlede vandmængde x af formen $D = bx^a$.

Bestem konstanterne a og b.

Beregn den procentvise stigning i driftsomkostningerne, når den behandlede vandmængde vokser med 20%.

Kilde: J. J. Linde-Jensen m.fl.: Vandforsyningsteknik, Teknisk Forlag, 1992.

Opgave 3 (ca. 15 point)

Et eksperiment består i, at en symmetrisk og en usymmetrisk mønt kastes samtidigt. For den usymmetriske mønt er sandsynligheden for plat 60%.
Med H_0, H_1 og H_2 betegnes følgende hændelser:

H_0: Ingen af mønterne viser plat.
H_1: Netop én af mønterne viser plat.
H_2: Begge mønter viser plat.

Beregn $P(H_0)$ og $P(H_1)$.

Det oplyses, at $P(H_2) = 30\%$. Eksperimentet udføres 10 gange.

Bestem sandsynligheden for, at hændelsen H_2 indtræffer netop 4 gange.

Opgave 4 (ca. 15 point)

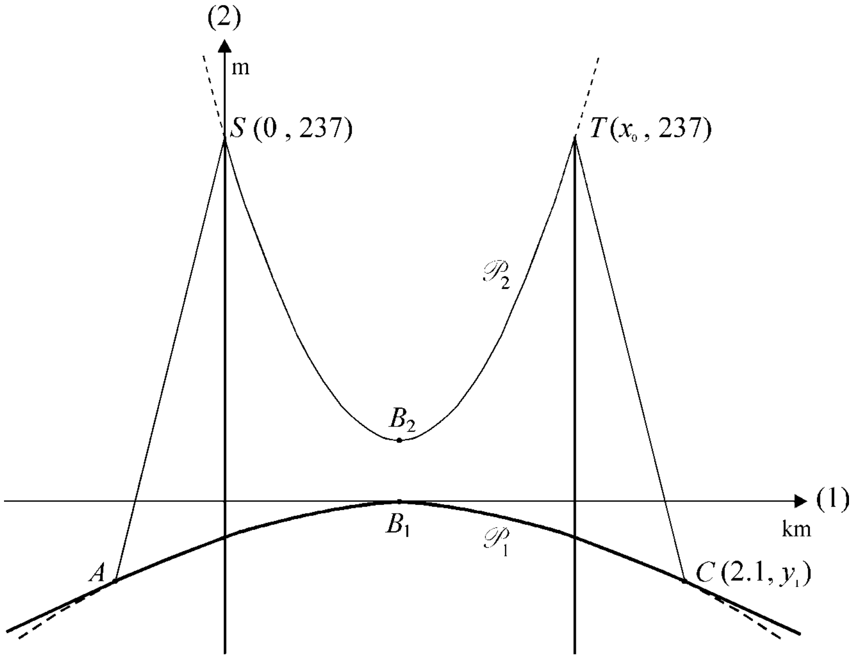
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^{0.3} - x^{2.8} \quad , \quad x \in [0.1\,;2] \ .$$

Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforhold for f, og bestem værdimængden for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinaten 1.

Opgave 5
(ca. 20 point)



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

På figuren ses en model af en hængebro indtegnet i et koordinatsystem. Den del af broens kørebane, der går fra A gennem B_1 til C, er en del af en parabel $\mathscr{P}_1$, mens den del af broens hovedkabel, der går fra S gennem B_2 til T, er en del af en parabel $\mathscr{P}_2$. Linjen gennem B_1 og B_2 er symmetriakse for begge parabler. Idet enheden på førsteaksen er km, og enheden på andenaksen er m, er parablen $\mathscr{P}_1$ givet ved ligningen

$$y = -\tfrac{5}{3}x^2 + \tfrac{8}{3}x - \tfrac{16}{15}\ .$$

Beregn koordinatsættet til toppunktet B_1.

Ved punktet C fortsætter kørebanen langs tangenten til parablen $\mathscr{P}_1$ i punktet C. Kørebanen når land i det punkt R på tangenten, som har førstekoordinat 5.1.

Beregn højdeforskellen mellem kørebanens højeste punkt på broen og det sted, hvor kørebanen når land.

Den lodrette afstand mellem de to parablers toppunkter B_1 og B_2 er 2.0 m.

Bestem en ligning for parablen $\mathscr{P}_2$.

Opgave 6a
(ca. 10 point)

Table 2-2
IMPORTANT PRICE INDEXES

	CPI
1960	29.6
1970	38.8
1980	82.4
1992	140.4

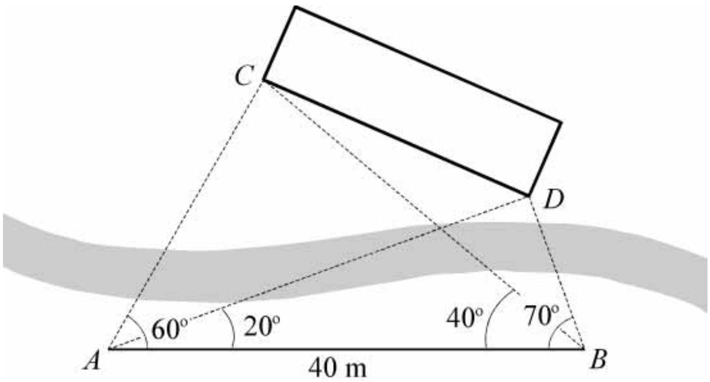
Tabellen viser nogle værdier for det amerikanske forbrugerprisindeks CPI (consumerprice index) i perioden 1960 til 1992.

Beregn den årlige gennemsnitlige procentvise vækst i CPI i perioden 1960−1992.

Beregn værdien af CPI i år 2000 under forudsætning af, at den årlige gennemsnitlige procentvise vækst i perioden 1992−2000 er den samme som i perioden 1960−1992.

Kilde: Rudiger Dornbush: Macroeconomics, Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology, 1994.

Opgave 6b
(ca. 10 point)



Nogle personer, der står på den ene side af en å, vil bestemme længden af facaden CD på et hus, der ligger på den anden side af åen (se figuren). De måler afstanden fra A til B samt fire vinkler. Måleresultaterne er

$$|AB| = 40 \text{ m}, \angle BAC = 60°, \angle BAD = 20°, \angle ABC = 40° \text{ og } \angle ABD = 70° \ .$$

Beregn $|BD|$, $|BC|$ og $|CD|$.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN JANUAR–FEBRUAR 1999 **98-8-3V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 28. januar 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3 .... ca. 15 point
opgave 4 .... ca. 10 point
hver af opgaverne 5, 6 og 7 .... ca. 15 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I en orienteret plan er der givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, om hvilke det oplyses, at

$$|\vec{a}| = 4 \quad \text{og} \quad \vec{b} = \hat{\vec{a}} - 3\vec{a} \ .$$

Beregn $|\vec{b}|$.

Beregn et gradtal for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn de værdier af tallet t, for hvilke vektorerne $\vec{a} + t\vec{b}$ og $\vec{a} - t\vec{b}$ er ortogonale.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Bestem en stamfunktion til hver af funktionerne

$$f(x) = 5\sin(4x+3) \ , \quad g(x) = x\sin(x+3) \quad \text{og} \quad h(x) = x\sin(x^2+3) \ .$$

Opgave 3 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er en plan α givet ved

$$\alpha\colon\ 3x + 12y - 4z + 77 = 0 \ .$$

Planen α er tangentplan til en kugle med centrum i punktet $C(-4,7,-5)$.

Bestem en ligning for kuglen.

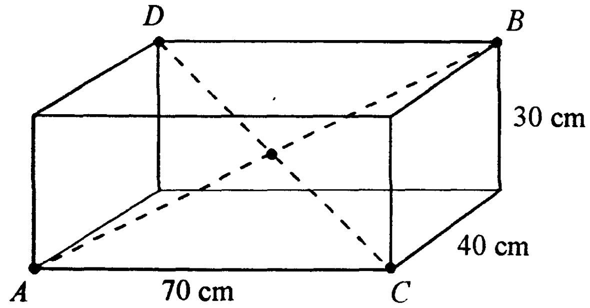
Kuglen har en anden tangentplan β, som er parallel med α.

Bestem en ligning for β.

Opgave 4 (ca. 10 point)

En kasse er 70 cm lang, 40 cm bred og 30 cm høj.

Bestem et gradtal for en af vinklerne mellem diagonalerne AB og CD.



Opgave 5 (ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen med begyndelsespunkt O bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, så der til tidspunktet t gælder

$$\begin{aligned} x &= 5\cos t \\ y &= 3\sin t \end{aligned} \quad , \ 0 \leqq t \leqq 2\pi \ .$$

Bestem til tidspunktet $t = \frac{\pi}{4}$ vinklen mellem $\overrightarrow{OP}$ og hastighedsvektoren i P.

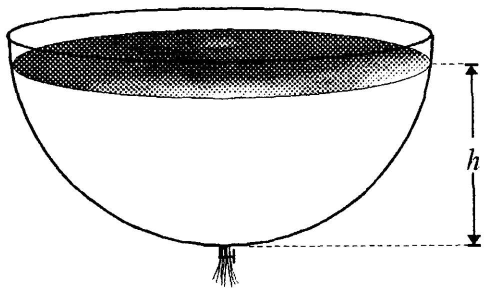
Vis, at arealet af det parallelogram, der udspændes af $\overrightarrow{OP}$ og hastighedsvektoren i P, er uafhængigt af t.

Bestem størsteværdi og mindsteværdi af farten af P, det vil sige størsteværdi og mindsteværdi af længden af hastighedsvektoren.

Opgave 6 (ca. 15 point)

Et halvkugleformet kar med radius 1 m kan åbnes i bunden. I en model for udstrømning af vand fra dette kar gælder følgende differentialligning

$$(2h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})\frac{dh}{dt} = -0{,}000443 \ ,$$



hvor højdeforskellen h mellem vandoverfladen og karrets bund måles i meter, og tiden t måles i sekunder.

Bestem tiden t som funktion af højden h, idet det oplyses, at karret er fyldt med vand til tidspunktet $t = 0$.

Hvor mange sekunder varer det, før karret er tømt?

Opgave 7a (ca. 15 point)

I en model for en bestemt type elpærers levetid angiver

$$\int_0^T \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}} dt$$

den brøkdel af elpærerne, der har en levetid på højst T timer.

Bestem den brøkdel af elpærerne, der har en levetid på højst 500 timer.

Bestem

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}} dt \ .$$

Bestem

$$\lim_{T\to\infty} \int_{500}^T \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}} dt \ .$$

Hvilken oplysning om elpærerne giver denne sidste grænseværdi?

Opgave 7b (ca. 15 point)

Om en funktion f oplyses det, at hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i ethvert punkt $P(x,\ f(x))$ er proportional med $(x+1)\cdot(f(x))^2$.

Opskriv en differentialligning, som $f(x)$ må tilfredsstille, idet proportionalitetsfaktoren kaldes k.

Bestem proportionalitetsfaktoren k, idet hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i $P(2,1)$ er 6.

Bestem forskrift og definitionsmængde for f.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Tirsdag den 2. februar 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
hver af opgaverne 2, 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 25 point)

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f(x)=x^2$ i punktet $P(-2{,}4)$.

b) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x)=x(2^x+1)$.

c) Linjen l har ligningen

$$y=-\tfrac{3}{4}x+1\ .$$

Bestem en ligning for den linje m, der går gennem punktet $P(1{,}4)$, og som er parallel med l.

d) En cirkel har ligningen $x^2+y^2+10x-12y=3$.

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

e) Bestem halveringskonstanten for funktionen $f(x)=3{,}4\cdot 0{,}87^x$.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Nedenstående tabel viser resultatet af en måling af sammenhørende værdier for bølgelængden x (målt i meter) og frekvensen y (målt i svingninger pr. sekund) for tonerne fra en bestemt lydgiver.

x	0,1	0,2	0,5	1,0	5,0	10
y	3500	1640	665	328	65	34

Indtegn oplysningerne fra tabellen i et passende koordinatsystem, og gør herved rede for, at der med tilnærmelse gælder, at frekvensen y er en funktion af bølgelængden x af formen

$$y = b \cdot x^a \ .$$

Bestem forskriften for denne funktion.

Beregn ved hjælp af den fundne forskrift den bølgelængde, der svarer til frekvensen 6000 (svingninger pr. sekund).

Benyt den fundne forskrift til at bestemme, hvor mange procent bølgelængden ændres, når frekvensen stiger med 30%.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En stokastisk variabel X kan antage værdierne 1, 2, 3, 4 og 5. Det oplyses, at alle værdierne antages med den samme sandsynlighed 0,2.

Bestem middelværdi og spredning for X.

En stokastisk variabel Y, der er binomialfordelt med sandsynlighedsparameter p og antalsparameter n, har middelværdi 36 og spredning 4,8.

Bestem parametrene p og n for Y.

En stokastisk variabel Z er normalfordelt med samme middelværdi og spredning som Y.

Bestem $P(30 \leqq Z \leqq 40)$.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Om en trekant ABC med arealet 1,90 oplyses det, at $b = 2{,}70$ og $c = 3{,}35$. Der er to muligheder for gradtallet for vinkel A.

Beregn disse to mulige gradtal for vinkel A.

Beregn for hver af de to mulige trekanter siden a og vinkel B.

Opgave 5 (ca. 20 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax \ ,$$

hvor a er et tal.

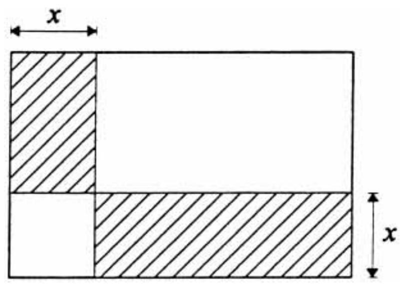
Bestem for $a = 0$ lokale ekstrema for f ved at benytte $f'(x)$, og tegn grafen for f.

Bestem de værdier af a, for hvilke den tilhørende funktion f er voksende i hele sin definitionsmængde.

Bestem de værdier af a, for hvilke den tilhørende funktion f har netop to nulpunkter.

Opgave 6a (ca. 10 point)

På et rektangulært stykke papir med længde 30 cm og bredde 20 cm tegnes, som vist på figuren, en vandret og en lodret linje.



Beregn x, så det samlede areal af de skraverede rektangler bliver størst muligt, og bestem dette største areal.

Opgave 6b (ca. 10 point)

Et pantebrev på 51 310 kr. har en årlig rente på 13%. De 51 310 kr. forrentes og afdrages med en fast årlig ydelse.

Bestem denne årlige ydelse, når gælden afvikles med 10 ydelser i alt.

Hvor mange år varer det, inden gælden er afviklet, hvis den årlige ydelse i stedet er 7000 kr.?

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1999

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Fredag den 14. maj 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 10 point
opgave 5	ca. 25 point
opgave 6	ca. 10 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er tre vektorer $\vec{v}$, $\vec{w}$ og $\vec{u}$ givet ved

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn gradtallet for vinklen mellem $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Beregn koordinatsættet til projektionen af $\vec{v}$ på $\vec{w}$.

Beregn tallet t, således at $\vec{u}$ er vinkelret på $\vec{v} + t\vec{w}$.

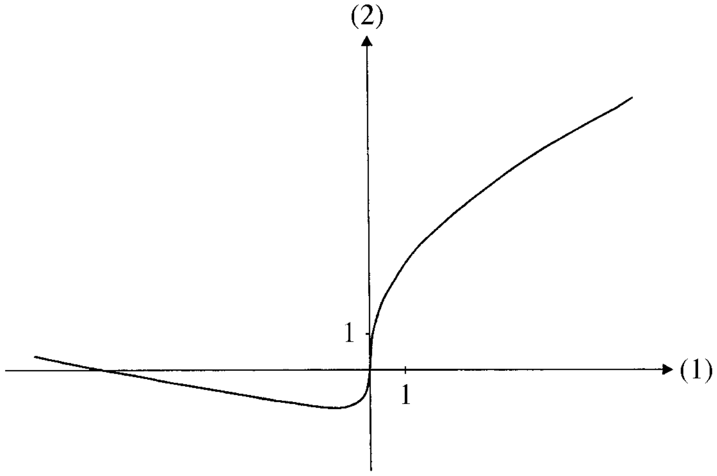
Opgave 2
(ca. 10 point)

En funktion f er givet ved $f(x) = -x^2 + 5x$. Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 3
(ca. 15 point)



I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$x = t^3$$
$$y = t^2 + 2t \ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurvens tangent er parallel med en af koordinatakserne.

Bestem en ligning for tangenten m til banekurven i det punkt, der svarer til, at $t = 1$.

På banekurven findes et andet punkt, hvori hastighedsvektoren er parallel med m.

Bestem koordinatsættet til dette punkt.

Opgave 4
(ca. 10 point)

Antallet af individer i en bestemt population beskrives ved en funktion P af tiden t, hvor t er angivet i år. Funktionen P er løsning til differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = (0{,}8 - 0{,}2t) \cdot P \ .$$

Bestem en forskrift for P, når det oplyses, at $P(0) = 1000$.

Bestem det tidspunkt, hvor populationen er størst, og bestem det største antal individer i populationen.

Opgave 5
(ca. 25 point)

I et koordinatsystem i rummet er to planer α og β givet ved ligningerne

$$\alpha: \quad 2x+y+2z=4$$
$$\beta: \quad 4x+3y-2z=2 \ .$$

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem planerne α og β.

Beregn afstanden fra punktet $P(-7,-8,-2)$ til planen α.

En plan γ går gennem punktet $Q(0,0,-1)$ og har normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Bestem en ligning for γ.

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen l mellem planerne α og β.

Gør rede for, at de tre planer α, β og γ skærer hinanden i netop ét punkt S, og bestem koordinatsættet til dette punkt.

En linje m i planen γ går gennem punktet S og er vinkelret på linjen l.

Bestem en parameterfremstilling for linjen m.

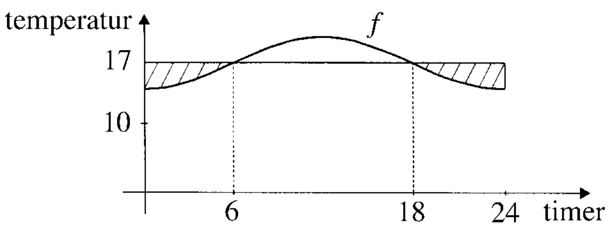
Opgave 6
(ca. 10 point)

Beregn ved hjælp af stamfunktioner integralet $\displaystyle\int_0^6 \sin\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{2}\right) dx$.

Udetemperaturen (°C) i et døgn er en funktion f af tiden x (antal timer efter midnat). For et bestemt døgn er f givet ved

$$f(x) = 17-3\sin\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

Grafen for f ses på figuren sammen med den linje, der har ligningen $y=17$.



Funktionen f anvendes ved udregning af det såkaldte graddagetal, som er et mål for den energi, der kræves til rumopvarmning. Graddagetallet for det pågældende døgn beregnes som $\frac{1}{24}$ af arealet af den skraverede punktmængde, idet temperaturer over 17°C ikke bidrager til graddagetallet.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner graddagetallet for det pågældende døgn.

Opgave 7a (ca. 15 point)

Bestem for $x > 0$ følgende integraler:

$$\int (x + \tfrac{1}{x})\,dx \;,\quad \int x \cdot \mathrm{e}^{x^2+1}\,dx \quad \text{og} \quad \int x \cdot \ln(x^2)\,dx \;.$$

Opgave 7b (ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$(1) \quad y'' = 9x \qquad \text{og} \qquad (2) \quad y'' = 9y \;.$$

Bestem den løsning f til (2), som opfylder

$$f(1) = f'(1) = 9 \;.$$

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1999 **99-8-2**

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 19. maj 1999 kl. 9.00–10.00

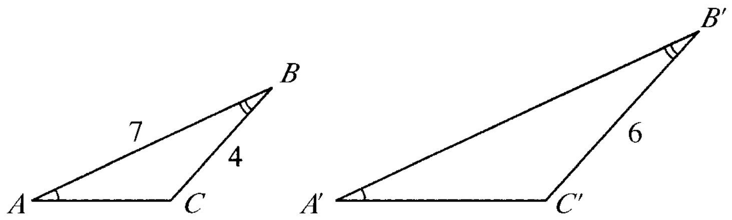
BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Reducér $(a-b)^2+(a-b)(a+b)-a^2$.

b)



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A'B'C'$. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem $|A'B'|$.

c) Bestem en ligning for den linje m, som går gennem punktet $P(2,-3)$, og som er parallel med linjen l med ligningen $y=4x+1$.

d) En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6 \ .$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

e) En stokastisk variabel X kan antage værdierne 0, 1, 2 og 3. Det oplyses, at $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{4}$. Det oplyses desuden, at $P(X \leqq 1) = \frac{7}{12}$.

Bestem $P(X=0)$ og $P(X=3)$.

f) Tegn grafen for funktionen f, hvor

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{for} \quad x \leqq 1 \\ -x + 2 & \text{for} \quad x > 1 \ . \end{cases}$$

Løs uligheden $f(x) > -3$.

g) En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \ .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $A(1,-1)$.

h) Løs ligningen

$$\log(x+1) + \log(x-2) = 1 \ .$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 19. maj 1999 kl. 9.00–13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

En margarinefabrik producerer margarine i halvkilopakker. Resultatet af en analyse af vandindholdet (målt i %) i pakkerne fra en bestemt dags produktion er angivet i skemaet.

Vandindhold i %	Procentdel pakker
13.0–14.0	13.9%
14.0–14.5	19.4%
14.5–15.0	25.0%
15.0–15.5	22.2%
15.5–16.0	13.9%
16.0–17.0	5.6%

Gør rede for, at vandindholdet i pakkerne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Margarinefabrikken har som mål, at vandindholdet i en pakke margarine ikke overstiger 15.8.

Bestem $P(X > 15.8)$.

Ved en ny tilrettelæggelse af produktionen kan pakkernes vandindhold beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel Y med samme spredning som X.

Bestem middelværdien for Y, når det oplyses, at $P(Y > 15.8) = 2.0\%$.

Kilde: P. Gerner Andersen og J. Risum: Introduktion til levnedsmidlers kvalitet, Teknisk Forlag, 1991.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x \quad , \quad x \in [-1;4] \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold, og angiv værdimængden for f.

Grafen for f har to tangenter, der begge har hældningskoefficient 3.

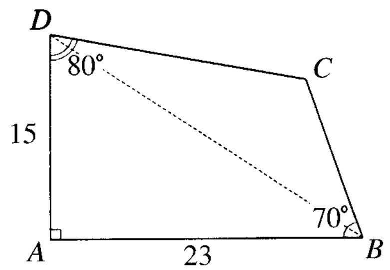
Bestem koordinatsættet til røringspunktet for hver af disse tangenter.

Opgave 4
(ca. 15 point)

Figuren viser en firkant $ABCD$. Nogle af målene er angivet på figuren.

Bestem $|BD|$ og de spidse vinkler i trekant ABD.

Bestem arealet af firkant $ABCD$.



Opgave 5
(ca. 15 point)

Ved nedbrydning af vandplanter kan procentdelen V af den tilbageværende biomasse beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion

$$V(t) \ = \ 100 \cdot e^{-kt} \ ,$$

hvor t er tiden angivet i døgn efter nedbrydningens start, og k er nedbrydningskonstanten. Nedbrydningskonstanten k er for nogle forskellige typer af vandplanter angivet i tabellen nedenfor.
Det fremgår af tabellen, at for fytoplankton er $k = 0{,}053$.

Hvor mange procent af biomassen af fytoplankton er der tilbage 10 døgn efter nedbrydningens start?

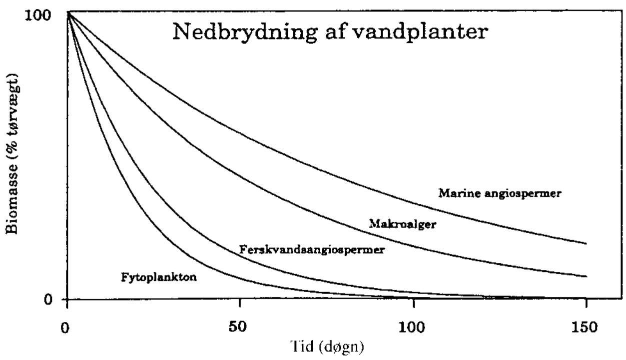
Bestem halveringstiden for nedbrydning af fytoplankton.

Hvor mange døgn går der fra starten af nedbrydningen af fytoplankton, til der er nedbrudt 70% af fytoplanktons biomasse?

For en anden type vandplante gælder, at

$$V(t) = 100 \cdot 0{,}9831^t \ .$$

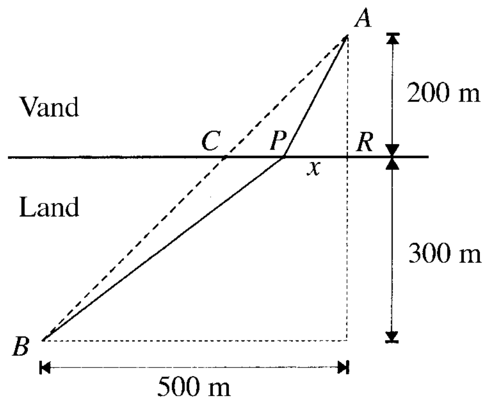
Bestem nedbrydningskonstanten for denne type vandplante.



Type	Nedbrydnings-konstant (pr. døgn)
Fytoplankton	0,053
Angiospermer – ferskvand – marine	 0,038 0,011
Makroalger	0,017

Kilde: Miljøforskning nr. 13, *juni* 1994.

Opgave 6a
(ca. 15 point)



En pige befinder sig i vandet i position A og skal nå frem til position B på land. I vand svømmer hun med farten 0,4 m/s, mens hun på land går med farten 1,4 m/s.

Beregn længden af strækningen AC i vandet og længden af strækningen CB på land, og beregn, hvor lang tid hun vil være om at tilbagelægge hver af de to strækninger.

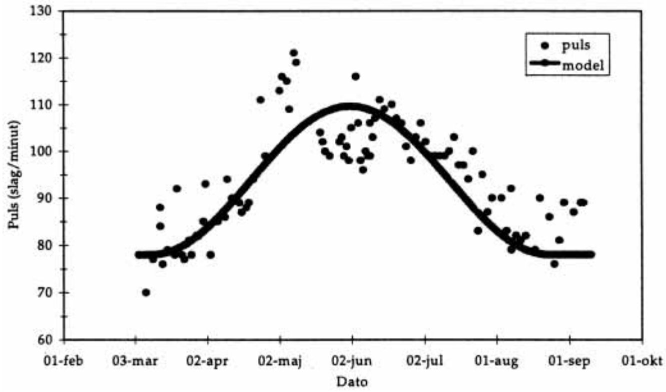
Pigen vælger at følge linjestykket AP i vandet og derefter linjestykket PB på land. Afstanden, målt i m, mellem punkterne P og R kaldes x.

Gør rede for, at tidsforbruget, målt i sekunder, for turen fra A over P til B kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{0{,}4} + \frac{\sqrt{(500-x)^2 + 300^2}}{1{,}4} \; .$$

Bestem ved hjælp af grafregneren det mindste tidsforbrug, når $x \in [0;200]$.

Opgave 6b
(ca. 15 point)



Sæsonvariation i aktivitetspuls for uforstyrrede dyr. Sinuskurven er den kurvefunktion, som bedst beskriver materialet. Data repræsenterer i alt 2.071 timers registrering i 96 forskellige døgn.

Kurven på figuren er en model for sæsonvariationen i aktivitetspulsen for råvildt. Det oplyses, at kurven er graf for funktionen P med forskriften

$$P(t) = 93{,}8 + 15{,}8 \cdot \sin\left(\frac{t-112}{166} \cdot 2\pi\right) \ , \quad 69 \leqq t \leqq 236 \ ,$$

hvor t er tiden angivet i døgn efter den 1. januar, og P er pulsen angivet i antal hjerteslag pr. minut.

Bestem $P(120)$.

Bestem den procentvise stigning i $P(t)$ i tidsrummet fra $t = 120$ til $t = 140$.

Bestem maksimum for P, og bestem den værdi af t, for hvilken maksimum antages.

Bestem de tidsrum, hvor pulsen ifølge modellen er mellem 90 slag pr. minut og 100 slag pr. minut.

Kilde: Råvildt og forstyrrelser. Faglig rapport fra DMU nr. 237, 1998.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 1999 **99-8-2-gl**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Onsdag den 19. maj 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 10 point
hver af opgaverne 5 og 6	ca. 15 point
opgave 7	ca. 10 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En cirkel har ligningen $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$.

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

b) En symmetrisk mønt kastes 15 gange.

Bestem sandsynligheden for, at mønten viser plat netop 10 gange.

c) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+2}$.

d) Løs ligningen

$$\sin x = 0{,}4 \ , \quad x \in [0;2\pi] \ .$$

e) Løs uligheden

$$x^2 - x - 2 \geqq 0 \ .$$

Opgave 2 (ca. 10 point)

En person indbetaler 3120 kr. hver måned i 30 måneder på en konto i en bank. Bankens rente er 0,50% pr. måned i hele perioden.

Beregn størrelsen af beløbet på kontoen umiddelbart efter den 30. indbetaling.

Banken reklamerer med, at der umiddelbart efter den 30. indbetaling står mindst 2000 kr. mere på kontoen, end der ville have gjort i en hvilken som helst anden bank. Grunden til denne forskel er, at bankens rente er større end andre bankers.

Bestem på dette grundlag den størst mulige månedlige rente i de øvrige banker.

Opgave 3 (ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x \ , \quad x \in [-1;4] \ .$$

Bestem funktionens monotoniforhold, og angiv værdimængden for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

Opgave 4 (ca. 10 point)

Vandindhold i %	Procentdel pakker
13.0–14.0	13.9%
14.0–14.5	19.4%
14.5–15.0	25.0%
15.0–15.5	22.2%
15.5–16.0	13.9%
16.0–17.0	5.6%

En margarinefabrik producerer margarine i halvkilopakker. Resultatet af en analyse af vandindholdet (målt i %) i pakkerne fra en bestemt dags produktion er angivet i skemaet.

Gør rede for, at vandindholdet i pakkerne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(X > 15.8)$.

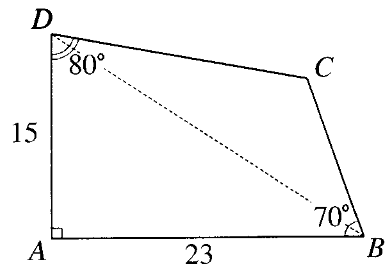
Kilde: P. Gerner Andersen og J. Risum: Introduktion til levnedsmidlers kvalitet, Teknisk Forlag, 1991.

Opgave 5 (ca. 15 point)

Figuren viser en firkant $ABCD$. Nogle af målene er angivet på figuren.

Bestem $|BD|$ og de spidse vinkler i trekant ABD.

Bestem arealet af firkant $ABCD$.



Opgave 6 (ca. 15 point)

Ved nedbrydning af vandplanter kan procentdelen V af den tilbageværende biomasse beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion

$$V(t) = 100 \cdot e^{-kt} ,$$

hvor t er tiden angivet i døgn efter nedbrydningens start, og k er nedbrydningskonstanten. Nedbrydningskonstanten k er for nogle forskellige typer af vandplanter angivet i tabellen nedenfor.
Det fremgår af tabellen, at for fytoplankton er $k = 0{,}053$.

Hvor mange procent af biomassen af fytoplankton er der tilbage 10 døgn efter nedbrydningens start?

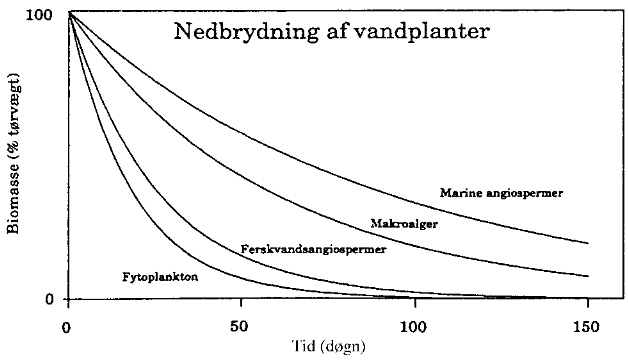
Bestem halveringstiden for nedbrydning af fytoplankton.

Hvor mange døgn går der fra starten af nedbrydningen af fytoplankton, til der er nedbrudt 70% af fytoplanktons biomasse?

For en anden type vandplante gælder, at

$$V(t) = 100 \cdot 0{,}9831^t .$$

Bestem nedbrydningskonstanten for denne type vandplante.

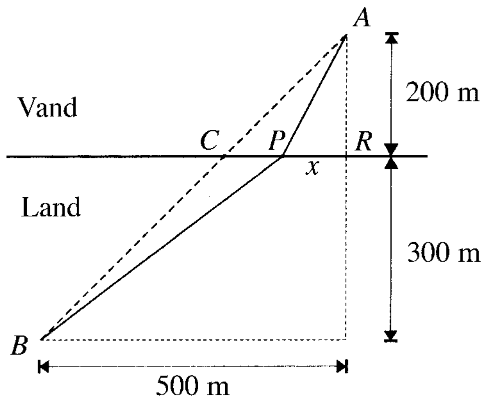


Type	Nedbrydnings-konstant (pr. døgn)
Fytoplankton	0,053
Angiospermer – ferskvand – marine	0,038 0,011
Makroalger	0,017

Kilde: Miljøforskning nr. 13, *juni* 1994.

Opgave 7a
(ca. 10 point)

En pige befinder sig i vandet i position A og skal nå frem til position B på land.



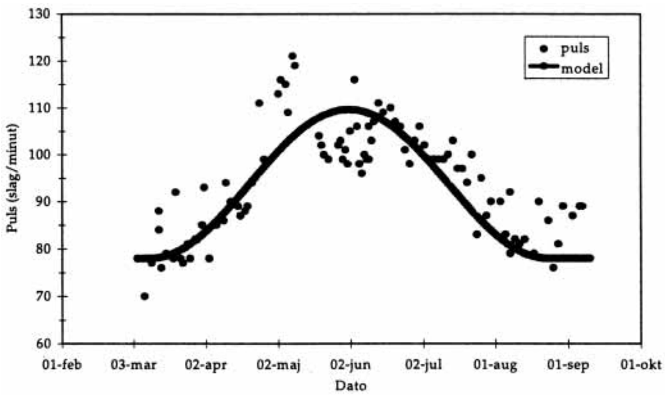
Beregn længden af strækningen AC og længden af strækningen CB.

Pigen vælger at følge linjestykket AP i vandet og derefter linjestykket PB på land. Afstanden, målt i m, mellem punkterne P og R kaldes x. Det oplyses, at tidsforbruget, målt i sekunder, for turen fra A over P til B kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{200^2 + x^2}}{0{,}4} + \frac{\sqrt{(500-x)^2 + 300^2}}{1{,}4} \,.$$

Bestem ved hjælp af grafregneren det mindste tidsforbrug, når $x \in [0;200]$.

Opgave 7b
(ca. 10 point)



Sæsonvariation i aktivitetspuls for uforstyrrede dyr. Sinuskurven er den kurvefunktion, som bedst beskriver materialet. Data repræsenterer i alt 2.071 timers registrering i 96 forskellige døgn.

Kurven på figuren er en model for sæsonvariationen i aktivitetspulsen for råvildt. Det oplyses, at kurven er graf for funktionen P med forskriften

$$P(t) = 93{,}8 + 15{,}8 \cdot \sin\left(\frac{t-112}{166} \cdot 2\pi\right) \,, \quad 69 \leqq t \leqq 236 \,,$$

hvor t er tiden angivet i døgn efter den 1. januar, og P er pulsen angivet i antal hjerteslag pr. minut.

Bestem $P(120)$.

Bestem den procentvise stigning i $P(t)$ i tidsrummet fra $t = 120$ til $t = 140$.

Bestem maksimum for P, og bestem den værdi af t, for hvilken maksimum antages.

Kilde: Råvildt og forstyrrelser. Faglig rapport fra DMU nr. 237, 1998.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 26. august 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
hver af opgaverne 2 og 3	ca. 10 point
opgave 4	ca. 25 point
opgave 5	ca. 10 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ oplyses, at

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Beregn gradtallet for vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn længden af vektor $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

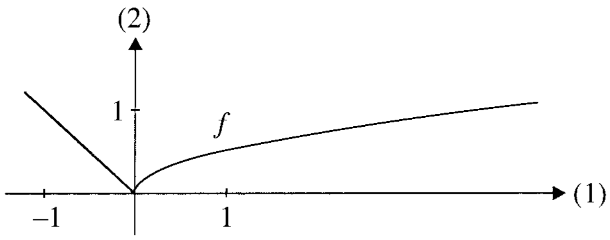
Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for} \quad x \leqq 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & \text{for} \quad x > 0 \ . \end{cases}$$

Grafen for f, førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = -1$ og $x = 5$ afgrænser en punktmængde M, der har et areal.



Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Bestem ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M drejes 360° om førsteaksen.

Opgave 3 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger punktet $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$x = \tfrac{1}{2}t^2 + t$$
$$y = t - 3 \ .$$

Bestem til tidspunktet $t = 2$ hastighedsvektoren $\vec{v}$ og farten $|\vec{v}|$.

I samme koordinatsystem bevæger et andet punkt $Q(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$x = t^2 + 2$$
$$y = t^2 - 6t \ .$$

Bestem de tidspunkter, hvor hastighedsvektoren i P står vinkelret på hastighedsvektoren i Q.

Opgave 4 (ca. 25 point)

I et koordinatsystem i rummet er der givet et punkt $P(5,-1,4)$ og en plan α med ligningen

$$\alpha: \quad 2x-2y+z+2=0 \ .$$

Beregn afstanden fra punktet P til planen α.

En linje l går gennem punktet P og har retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og α.

Beregn den spidse vinkel mellem l og α.

En plan β går gennem punkterne $A(0,0,4)$, $B(2,0,0)$ og $C(1,1,4)$.

Bestem en ligning for planen β.

Planerne α og β er begge tangentplaner til en kugle K. Kuglens centrum, dens røringspunkter med α og β og punktet P ligger på en ret linje.

Bestem en ligning for kuglen K.

Opgave 5 (ca. 10 point)

I et bestemt område er der en bestand af fugle. Antallet af fugle i bestanden, angivet i tusinder, beskrives i en model ved en funktion N af tiden t, angivet i år. Funktionen N er løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00051 \cdot N \cdot (195-N) \ .$$

Bestem en forskrift for N, når det oplyses, at $N(0)=65$.

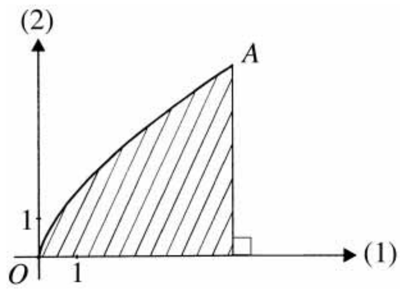
Benyt modellen til at bestemme antallet af fugle i bestanden til tidspunktet $t=8$.

Opgave 6 (ca. 15 point)

Bestem samtlige stamfunktioner til hver af funktionerne

$$f(x) = x+\cos x \ , \quad g(x) = x \cdot \cos x \quad \text{og} \quad h(x) = \sin x \cdot (\cos x)^3 \ .$$

Opgave 7a
(ca. 15 point)



Kurven OA på figuren er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= t^3 \\ y &= \tfrac{3}{2}t^2 \end{aligned} \quad , \quad t \in [0;\sqrt{3}] \ .$$

Beregn koordinatsættet til punktet A, bestemt ved $t = \sqrt{3}$.

Beregn den eksakte værdi af arealet af det skraverede område.

Længden L af buen OA kan beregnes som

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \ .$$

Beregn L ved hjælp af stamfunktioner.

Opgave 7b
(ca. 15 point)

En integralkurve til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y + 1}{e^y}$$

går gennem punktet $P(2,\ \ln 3)$.

Bestem afstanden fra koordinatsystemets begyndelsespunkt $O(0,0)$ til integralkurvens tangent i punktet P.

Integralkurven har et skæringspunkt S med førsteaksen.

Bestem koordinatsættet til S.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1999 **99-8-4**

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Mandag den 23. august 1999 kl. 9.00–10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Reducér $2a(3b-4a)+3b(2b-a)+a(2a-3b)$.

b) En linje l har ligningen $4x-2y=1$.

Bestem hældningskoefficienten for l.

Bestem en ligning for den linje m, der går gennem punktet $P(4,-1)$ og står vinkelret på l.

c) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 5,5 og spredning 1,5.

Bestem $P(3 \leqq X \leqq 6{,}5)$.

d) Reducér $\frac{3}{4}x-\frac{5}{12}x+\frac{1}{2}x$.

e) I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje m givet ved

$$\mathscr{P}:\ y = x^2 - 3x + 5$$
$$m:\ y = 2x - 1\ .$$

Beregn koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem m og $\mathscr{P}$.

f) En funktion f er givet ved $f(x) = x^{10}$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

g) Omskriv $25x^2 + 10x + 1$ til formen $(ax + b)^2$.

h) Løs ligningen $\log(20x - 5) - \log x = 1$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Mandag den 23. august 1999 kl. 9.00–13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 20 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{4x-4}{x^2+4}\ .$$

Bestem nulpunkter og fortegn for f.

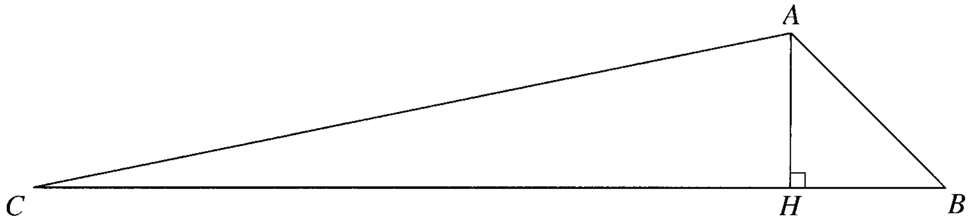
Bestem monotoniforhold for f, og angiv de lokale ekstremumssteder for f.

Grafen for f har netop én asymptote.

Bestem en ligning for denne asymptote.

Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, der er fælles for grafen for f og linjen med ligningen $y = x - 1$.

Opgave 3
(ca. 15 point)



I trekant ABC er AH højden fra A. Det oplyses, at $|BH| = |AH| = 4$, og at $|AC| = 20$.

Beregn de manglende sider og vinkler i trekant ABC.

Beregn arealet af trekant ABC.

En linje m, der er parallel med BC, deler trekant ABC i to figurer med lige store arealer.

Beregn afstanden mellem m og BC.

Opgave 4
(ca. 15 point)

Siden 1990 er det årlige udslip af CO_2 i Danmark blevet reduceret. I 1998 var CO_2-udslippet i Danmark 5.5% lavere end CO_2-udslippet i 1990.

Hvilken gennemsnitlig årlig procentvis reduktion r_1 svarer dette til?

Undersøg, om Danmark kan opnå, at CO_2-udslippet i 2012 er 17% lavere end CO_2-udslippet i 1990, hvis reduktionen af det årlige CO_2-udslip i Danmark fortsætter med at være r_1% pr. år.

I hvilket år vil CO_2-udslippet i Danmark være 21% lavere end CO_2-udslippet i 1990, hvis reduktionen af det årlige CO_2-udslip i Danmark fortsætter med at være r_1% pr. år?

I forbindelse med Kyoto-konventionen erklærede Danmark sig villig til at acceptere et krav om, at CO_2-udslippet i 2012 skal være 21% lavere end i 1990.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise reduktion i det årlige CO_2-udslip i perioden 1998–2012, der er nødvendig for at opfylde dette krav.

Kilde: Udskyd CO_2-målet, Weekendavisen, 11.–17. *september* 1998.

Opgave 5 (ca. 15 point)

For et bestemt spil angiver den stokastiske variabel X udbyttet i kroner pr. spil. Sandsynlighedsfordelingen for X fremgår af tabellen.

t	-5	0	10
$P(X=t)$	0.5	0.3	0.2

Beregn middelværdi og spredning for X.

En person deltager i 2 af disse spil. De to spil er uafhængige.

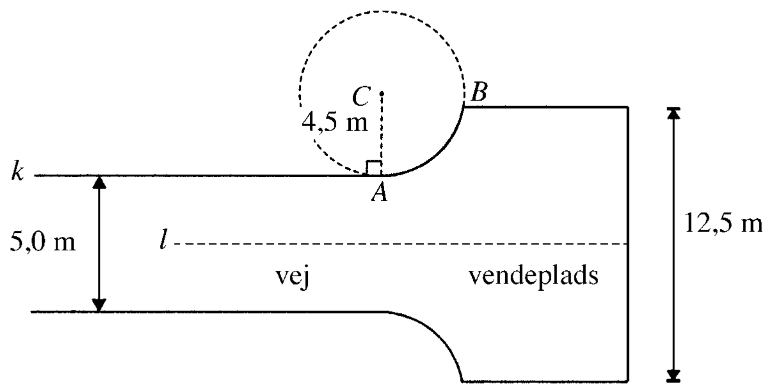
Hvad er sandsynligheden for, at udbyttet er 10 kr. i det første spil og 0 kr. i det andet spil?

Hvad er sandsynligheden for, at det samlede udbytte af de to spil er 20 kr?

Hvad er sandsynligheden for, at det samlede udbytte af de to spil er 5 kr?

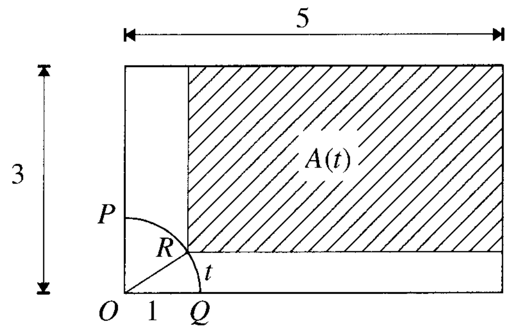
Opgave 6a (ca. 10 point)

For enden af en 5,0 m bred, blind vej skal der anlægges en 12,5 m bred vendeplads. Vendepladsen skal være symmetrisk om vejens midterlinje l. Figuren viser en skitse af vendepladsen. Kurven fra A til B er en del af en cirkel med centrum C og med radius 4,5 m. Linjen k tangerer cirklen i punktet A.



Beregn længden af cirkelbuen fra A til B.

Opgave 6b
(ca. 10 point)



I et rektangel med siderne 3 og 5 er der tegnet en cirkelbue QP med centrum i O og med radius 1. For ethvert $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ er punktet R på cirkelbuen QP bestemt ved, at $\angle QOR = t$ (målt i radianer).

Gør rede for, at arealet af det skraverede rektangel som funktion af t kan angives på formen

$$A(t) = (3 - \sin t)(5 - \cos t) \ , \quad t \in [0; \tfrac{\pi}{2}] \ .$$

Bestem ved hjælp af grafregneren mindsteværdien for A.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 1999 **99-8-4-gl**

MATEMATISK LINJE
OBLIGATORISK NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

Mandag den 23. august 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 6a og 6b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for vurderingen af besvarelsen:

opgave 1	ca. 25 point
opgave 2	ca. 10 point
hver af opgaverne 3 og 4	ca. 15 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En linje m har ligningen

$$y = \tfrac{2}{3}x + 4 \ .$$

Bestem en ligning for den linje n, der går gennem punktet $P(-1,3)$, og som står vinkelret på m.

b) I 5 år indsættes hvert år 4000 kr. på en konto. I hele perioden er den årlige rente 3.8%.

Hvor meget står der på kontoen umiddelbart efter den femte indbetaling?

c) En parabel er bestemt ved

$$y = x^2 - 3x + 5 \ .$$

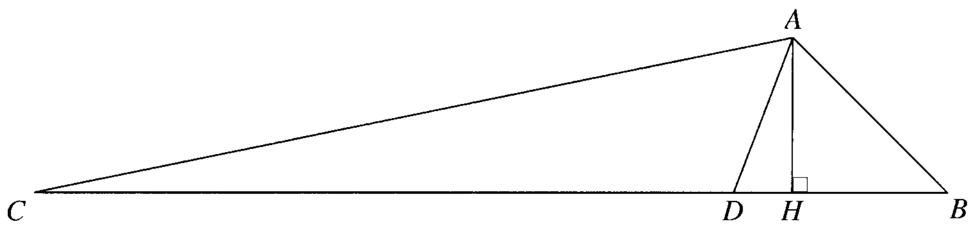
Bestem en ligning for parablens tangent i punktet $P(1,3)$.

d) Om en eksponentielt voksende funktion $f(x) = ba^x$ oplyses, at fordoblingskonstanten er 3.

Bestem a.

e) Bestem differentialkvotienten $f'(x)$ af $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$.

Opgave 2
(ca. 10 point)



I en trekant ABC er AH højden fra A. Det oplyses, at $|BH| = |AH| = 4$, og at $|AC| = 20$.

Beregn de manglende sider og vinkel A i trekant ABC.

I trekant ABC er AD vinkelhalveringslinje for vinkel A.

Beregn $|AD|$.

Opgave 3
(ca. 15 point)

Siden 1990 er det årlige udslip af CO_2 i Danmark blevet reduceret. I 1998 var CO_2-udslippet i Danmark 5.5% lavere end CO_2-udslippet i 1990.

Hvilken gennemsnitlig årlig procentvis reduktion r_1 svarer dette til?

Undersøg, om Danmark kan opnå, at CO_2-udslippet i 2012 er 17% lavere end CO_2-udslippet i 1990, hvis reduktionen af det årlige CO_2-udslip i Danmark fortsætter med at være r_1% pr. år.

I hvilket år vil CO_2-udslippet i Danmark være 21% lavere end CO_2-udslippet i 1990, hvis reduktionen af det årlige CO_2-udslip i Danmark fortsætter med at være r_1% pr. år?

I forbindelse med Kyoto-konventionen erklærede Danmark sig villig til at acceptere et krav om, at CO_2-udslippet i 2012 skal være 21% lavere end i 1990.

Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise reduktion i det årlige CO_2-udslip i perioden 1998–2012, der er nødvendig for at opfylde dette krav.

Kilde: Udskyd CO_2-målet, Weekendavisen, 11.–17. *september* 1998.

Opgave 4
(ca. 15 point)

En stokastisk variabel X er binomialfordelt med antalsparameter $n = 8$ og sandsynlighedsparameter $p = 0{,}4$.

Bestem middelværdi og spredning for X.

Bestem $P(X = 3)$.

Om en anden binomialfordelt stokastisk variabel Y oplyses det, at antalsparameteren er 8, samt at $P(Y = 0) = 0{,}2$.

Bestem sandsynlighedsparameteren for Y.

Opgave 5
(ca. 20 point)

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{ax - 4}{x^2 + a} \;,$$

hvor a er et tal.

For $a = -9$ har grafen for f tre asymptoter.

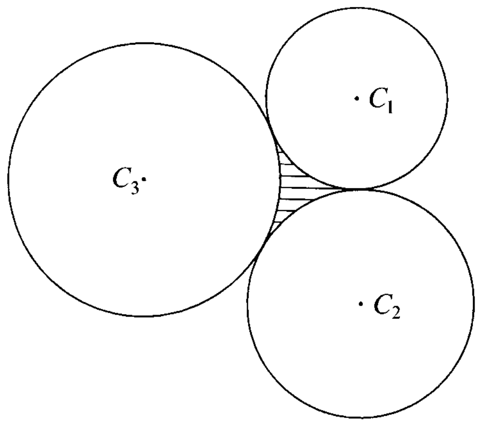
Bestem en ligning for hver af disse asymptoter.

Benyt $f'(x)$ til at bestemme monotoniforhold for f, når $a = 4$.

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter, der er fælles for grafen for f og linjen med ligningen $y = x - 1$, når $a = 4$.

Bestem a, så grafen for f har vandret tangent i punktet $P(4, f(4))$.

Opgave 6a
(ca. 15 point)



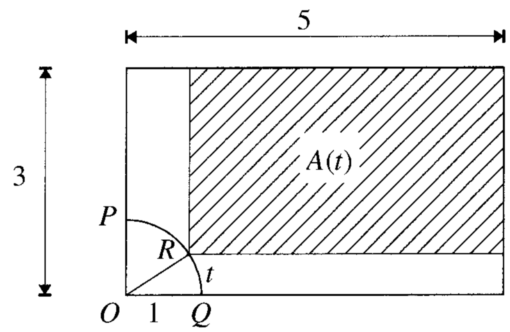
På ovenstående figur er indtegnet tre cirkler. De tre centre er henholdsvis C_1, C_2 og C_3, og de tre radier er henholdsvis 4, 5 og 6. Cirklerne har to og to en fælles tangent.

Beregn vinklerne i trekant $C_1C_2C_3$.

Beregn arealet af trekant $C_1C_2C_3$.

Beregn arealet af det skraverede område mellem cirklerne.

Opgave 6b
(ca. 15 point)



I et rektangel med siderne 3 og 5 er der tegnet en cirkelbue QP med centrum i O og med radius 1. For ethvert $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ er punktet R på cirkelbuen QP bestemt ved, at $\angle QOR = t$ (målt i radianer).

Gør rede for, at arealet af det skraverede rektangel som funktion af t kan angives på formen

$$A(t) = (3 - \sin t)(5 - \cos t) \ , \quad t \in [0; \tfrac{\pi}{2}] \ .$$

Ligningen $A'(t) = 0$ har netop én løsning.

Bestem $A'(t)$, og løs ved hjælp af grafregneren ligningen $A'(t) = 0$.

Bestem mindsteværdien for A.

Husk, at kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1999 **99-8-1V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 2. december 1999 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for besvarelsen:

opgave 1	ca. 15 point
opgave 2	ca. 10 point
opgave 3	ca. 25 point
hver af opgaverne 4 og 5	ca. 15 point
hver af opgaverne 6 og 7	ca. 10 point

Opgave 1 (ca. 15 point)

I en orienteret plan er givet en vektor $\vec{v}$ med længden 5. To andre vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved

$$\vec{a} = \vec{v} - 2\widehat{\vec{v}} \quad \text{og} \quad \vec{b} = 2\vec{v} + \tfrac{1}{2}\widehat{\vec{v}}\ .$$

Beregn længden af vektor $\vec{a}$.

Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 2 (ca. 10 point)

Bestem til differentialligningen

$$y'' = -9y$$

den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(\frac{\pi}{6},2)$, således at tangenten til grafen i P har hældningskoefficienten 1.

Opgave 3 (ca. 25 point)

To linjer m og n er givet ved

$$m\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad n\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Beregn koordinatsættet til skæringspunktet mellem m og xy-planen.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem m og xy-planen.

Beregn afstanden fra punktet $P(1,4,0)$ til linjen m.

Det oplyses, at m og n er vindskæve.

Beregn afstanden mellem m og n.

En plan α er givet ved ligningen

$$\alpha\colon\ 5x - 8y + z - 5 = 0 \ .$$

Bestem en ligning for kuglen med centrum i punktet $P(1,4,0)$ og med α som tangentplan.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Beregn ved hjælp af stamfunktioner den eksakte værdi af hvert af følgende integraler:

$$\int_1^2 (1+x^4)\,dx \ , \quad \int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^3}{1+x^4}\,dx \quad \text{og} \quad \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1+x^4}{x^3}\,dx \ .$$

Opgave 5 (ca. 15 point)

Bestem til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{2x} \ , \quad x > 0$$

den løsning f, for hvilken $f(1) = 0$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,0)$.

Opgave 6
(ca. 10 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1 + \ln x \quad .$$

Sammen med førsteaksen og linjerne med ligningerne $x = 1$ og $x = \mathrm{e}$ afgrænser grafen for f en punktmængde M, der har et areal.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner arealet af M.

Beregn ved hjælp af stamfunktioner rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen.

Opgave 7a
(ca. 10 point)

Antallet af individer i en population beskrives i en model ved en funktion f af tiden t, målt i døgn. Funktionen f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - 0{,}001y) \quad .$$

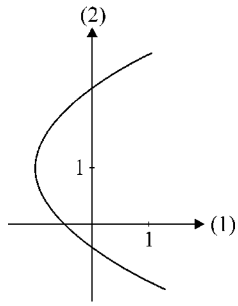
Benyt differentialligningen til at bestemme populationens væksthastighed til det tidspunkt, hvor populationens størrelse er 1500.

Bestem en forskrift for f, idet $f(0) = 1000$.

Opgave 7b
(ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$x = 0{,}5t^2 - 1$$
$$y = t + 1 \quad .$$



Beregn koordinatsættet til hvert af de punkter, hvori banekurven skærer en af koordinatakserne.

Beregn koordinatsættet til det punkt, hvori banekurvens tangent er parallel med andenaksen.

Beregn gradtallet for den spidse vinkel mellem koordinatsystemets førsteakse og banekurvens tangent i punktet svarende til $t = -1$.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1999 **99-8-2V**

MATEMATISK LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 7. december 1999 kl. 9.00–10.00

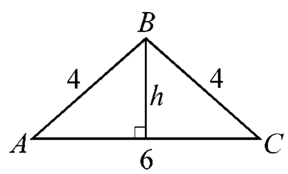
BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) I en trekant ABC er $|AB| = |BC| = 4$ og $|AC| = 6$.

Beregn længden af højden h.



b) Linjen l går gennem punktet $P(1,5)$ og står vinkelret på linjen med ligningen $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Bestem en ligning for l.

c) Reducér $2a(a-b) + (a+b)^2 - (a+b)(a-b)$.

d) Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses det, at $f(0) = 5$, og at vækstraten er 4%.

Bestem en forskrift for f.

e) Om en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi 15 oplyses det, at $P(X \leqq 12) = 0.35$.

Bestem $P(10 \leqq X \leqq 18)$.

f) En cirkel har ligningen $x^2 + y^2 + 8x - 4y = 5$.

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

g) En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^2 - 3x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

h) Løs ligningen $x(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$.

i) Tallet $\dfrac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2^3 \cdot 5^3}{3 \cdot 10^{-4}}$ kan skrives på formen $b \cdot 10^a$, hvor $b \in [1;10[$.

Bestem a og b.

j) Isolér r i formlen $x = r \cdot \sin t + b$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

STUDENTEREKSAMEN DECEMBER 1999 **99-8-2V**

MATEMATISK LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 7. december 1999 kl. 9.00–13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en parabel $\mathscr{P}$ og en linje l bestemt ved

$$\mathscr{P}:\ y=-\tfrac{1}{2}x^2+4x-1$$
$$l:\ y=x-1\ .$$

Beregn koordinatsættet til parablens toppunkt A.

Linjen l skærer parablen $\mathscr{P}$ i punkterne B og C, hvor B er punktet med den mindste førstekoordinat.

Beregn koordinatsættet til hvert af punkterne B og C.

Beregn afstanden fra A til l.

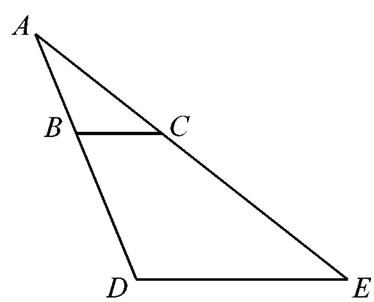
Beregn arealet af trekant ABC.

Opgave 3
(ca. 10 point)

I trekant ADE er B og C punkter på henholdsvis siden AD og siden AE, således at BC er parallel med DE. Det oplyses, at

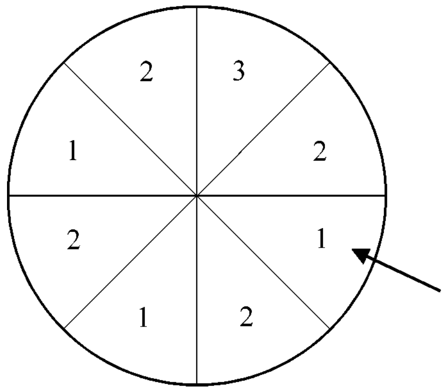
$$|DE|=4{,}0\ ,\quad |AE|=7{,}5\ ,$$
$$|AD|=5{,}0\quad \text{og}\quad |CE|=1{,}5\cdot|AC|\ .$$

Beregn siderne i trekant ABC samt $\angle DAE$.



Opgave 4
(ca. 15 point)

Et lykkehjul er inddelt i 8 felter, der hver er forsynet med et tal. Et eksperiment består i at sætte hjulet i gang og lade det standse af sig selv. Når hjulet standser, peger pilen på netop ét felt. Det oplyses, at alle felter har samme sandsynlighed for at standse ud for pilen.



Den stokastiske variabel X angiver tallet i det felt, der standser ud for pilen.

Udfyld en tabel som nedenstående over sandsynlighedsfordelingen for X.

t	1	2	3
$P(X=t)$	$\frac{3}{8}$		

Eksperimentet udføres 5 gange, og de enkelte udførelser af eksperimentet er indbyrdes uafhængige.

Bestem sandsynligheden for, at pilen netop 3 gange peger på et felt med tallet 1.

Bestem sandsynligheden for, at pilen alle 5 gange peger på et felt med tallet 1.

Bestem sandsynligheden for, at eksperimentet alle 5 gange resulterer i samme værdi for X.

Opgave 5
(ca. 20 point)

En familie af funktioner f_a er bestemt ved

$$f_a(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + a \ , \quad x \in [-1;3] \ .$$

Bestem $f_a(2)$ udtrykt ved a.

Løs ligningen $f_a{}'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f_a.

Bestem værdimængden for f_a udtrykt ved a.

Bestem de værdier af a, for hvilke linjen med ligningen $y = -5x + 3$ er tangent til grafen for f_a.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

Antallet af individer i en bestemt population kan beskrives ved en funktion N af tiden t. Når N angives i millioner, og t angives i år, er N bestemt ved

$$N(t) = \frac{12}{1 + 11\mathrm{e}^{-0{,}15t}} \ .$$

Bestem antallet af individer i populationen til tidspunktet $t = 0$.

Bestem det tidspunkt, hvor populationens størrelse er 5 millioner.

Beregn væksthastigheden til tidspunktet $t = 10$.

For en anden population kan antallet af individer beskrives ved en funktion M af t. Når M angives i millioner, er M bestemt ved

$$M(t) = 0{,}2 \cdot \mathrm{e}^{0{,}15t} \ .$$

Der er netop ét tidspunkt t, hvor de to populationer er lige store.

Bestem dette tidspunkt.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Så lang tid er du om at forbrænde en genstand

	Tid om at forbrænde 1 genstand	
Vægt	Mænd	Kvinder
50 kg	1 time og 36 minutter	2 timer 24 minutter
60 kg	1 time og 20 minutter	2 timer
70 kg	1 time og 9 minutter	1 time 43 minutter
80 kg	1 time	1 time 30 minutter
90 kg	53 minutter	1 time 20 minutter
100 kg	48 minutter	1 time 12 minutter

Af tabellen fremgår, at en mand, der vejer 70 kg, er 69 minutter om at forbrænde en genstand. En genstand svarer til alkoholindholdet i en almindelig øl.

Indtegn tabellens oplysninger vedrørende mænd i et passende koordinatsystem, og gør rede for, at der med tilnærmelse gælder, at den tid y_M (minutter), det tager for en mand at forbrænde en genstand, er omvendt proportional med mandens vægt x (kg).

Bestem en forskrift for y_M som funktion af x.

Benyt den fundne forskrift for y_M til at bestemme, hvor lang tid en mand på 62 kg er om at forbrænde en genstand.

Der gælder, at den tid y_K (minutter), det tager for en kvinde at forbrænde en genstand, er givet ved

$$y_K = 7200 \cdot x^{-1} \quad .$$

Bestem den vægt en kvinde skal have, for at den tid, det tager hende at forbrænde en genstand, er den samme som den tid, det tager en mand på 62 kg at forbrænde en genstand.

Kilde: Pjece fra Sundhedsstyrelsen: Fakta om alkohol, 1997.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

STUDENTEREKSAMEN JANUAR-FEBRUAR 2000 **99-8-3V**

MATEMATISK LINJE

HØJT NIVEAU
MATEMATIK

Torsdag den 27. januar 2000 kl. 9.00–13.00

Af opgaverne 7a og 7b må kun én afleveres til bedømmelse.

Følgende pointfordeling lægges til grund for besvarelsen:

hver af opgaverne 1, 2 og 3	ca. 15 point
opgave 4	ca. 10 point
opgave 5	ca. 20 point
opgave 6	ca. 10 point
opgave 7	ca. 15 point

Opgave 1
(ca. 15 point)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ gælder

$$|\vec{a}| = 3 \ , \quad |\vec{b}| = 2 \quad \text{og} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 5 \ .$$

Beregn vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

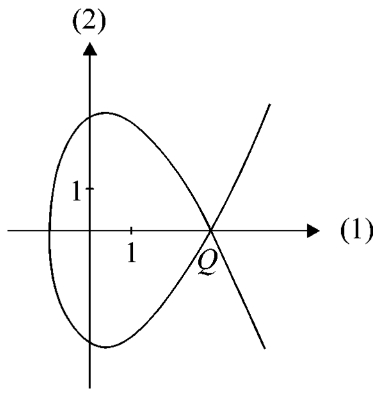
Beregn skalarproduktet $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-4\vec{b})$.

Bestem tallet t, så $\vec{a}$ er vinkelret på $10\vec{a}+t\vec{b}$.

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen bevæger et punkt $P(x,y)$ sig, således at der til tidspunktet t gælder

$$x = t^2 - 1$$
$$y = 4t - t^3 \ .$$



Bestem koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser.

Bestem de tidspunkter t, for hvilke banekurven har en tangent, der er parallel med en af koordinatsystemets akser.

Banekurven har et dobbeltpunkt Q, dvs. et punkt, der svarer til to forskellige værdier af t.

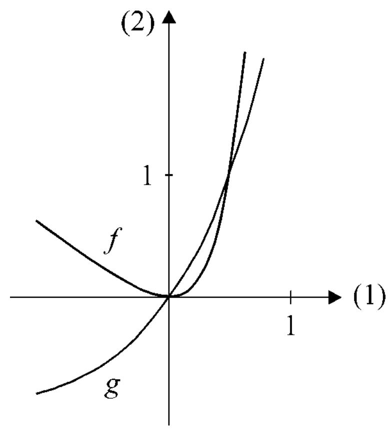
Beregn arealet af det parallelogram, der udspændes af hastighedsvektorerne svarende til disse to værdier af t.

Opgave 3
(ca. 15 point)

Beregn den eksakte værdi af hvert af integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx \ , \quad \int_0^1 (x+1)\sqrt{x^2+2x+4} \, dx \quad \text{og} \quad \int_1^{e} (4x+3)\ln x \, dx \ .$$

Opgave 4
(ca. 10 point)



Figuren viser graferne for to funktioner f og g, der er bestemt ved

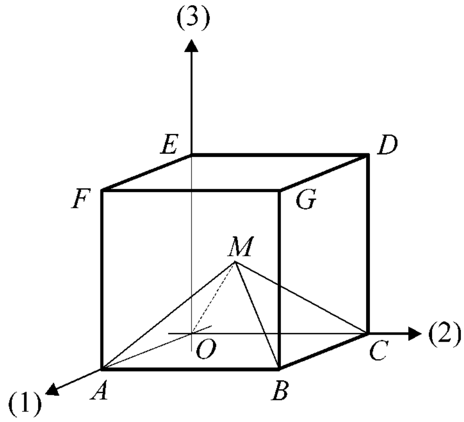
$$f(x) = (4^x - 1)^2 \quad \text{og} \quad g(x) = 4^x - 1 \ .$$

De to grafer afgrænser i første kvadrant et område, der har et areal.

Beregn den eksakte værdi af dette areal.

Opgave 5
(ca. 20 point)

Figuren viser en terning $OABCDEFG$ med kantlængden 4 indtegnet i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O. Endvidere ses skæringspunktet $M(2,2,2)$ mellem terningens diagonaler.



$A\,(4,0,0)$
$B\,(4,4,0)$
$C\,(0,4,0)$
$D\,(0,4,4)$
$E\,(0,0,4)$
$F\,(4,0,4)$
$G\,(4,4,4)$

Bestem en ligning for den kugle, der har centrum i M og går gennem terningens otte hjørner.

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, M og B.

Beregn arealet af trekant AMB.

Beregn den spidse vinkel mellem α og den plan, der indeholder punkterne B, M og C.

Punktet N er skæringspunktet mellem diagonalerne AG og FB i sidefladen $ABGF$.

Bestem koordinatsættet til projektionen N_α af punktet N på planen α.

Opgave 6
(ca. 10 point)

Ved en bestemt kemisk reaktion ændres koncentrationen af et stof. Koncentrationen z af stoffet, målt i mol/L, er en funktion af tiden t, målt i minutter efter reaktionens start. Funktionen z er løsning til differentialligningen

$$\frac{dz}{dt} = -kz^2 \ ,$$

hvor k er en konstant, målt i L/(mol·min).

Bestem en forskrift for z, når $k = 0.15$, og koncentrationen af stoffet til tidspunktet $t = 0$ er 0.10 mol/L.

Opgave 7a (ca. 15 point)

En funktion f er den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4y \ ,$$

der opfylder, at $f(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}$ og $f'(\frac{\pi}{8}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bestem en forskrift for f.

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = f(x) + \sin x \ .$$

Gør rede for, at g er løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4y + 3\sin x \ .$$

Opgave 7b (ca. 15 point)

Om en funktion f oplyses, at

$$f'(x) = 2 - 4e^{-2x} \quad \text{og} \quad f(0) = 5 \ .$$

Bestem en forskrift for f.

Om en funktion g oplyses, at $g'(x) = f'(x)$, og at den punktmængde, der afgrænses af graferne for f og g samt linjerne med ligningerne $x = -1$ og $x = 5$, har arealet 12.

Bestem en forskrift for hver af de to muligheder for g.

Husk, at kun én af opgaverne 7a og 7b må afleveres til bedømmelse.

STUDENTEREKSAMEN JANUAR-FEBRUAR 2000 **99-8-4V**

MATEMATISK LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 1. februar 2000 kl. 9.00–10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En linje l har hældningskoefficienten 2 og går gennem punktet $P(-3,1)$.
Bestem en ligning for linjen l.

b) En stokastisk variabel X kan antage værdierne -2, 1, 4 og 5. En del af sandsynlighedsfordelingen for X fremgår af tabellen.

t	-2	1	4	5
$P(X=t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	

Bestem $P(X=5)$, og beregn middelværdien for X.

c) Reducér udtrykket $(a+2b)(a-2b)-(a+b)^2+5b(b-3a)$.

d) En funktion f er bestemt ved $f(x)=x^3-2x^2+3x-1$.
Bestem $f'(2)$.

e) Linjen

$$l_k:\ kx + y = 10$$

er vinkelret på linjen

$$m:\ 5x + 3y = 9\ .$$

Beregn k.

f) Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses det, at $f(2) = 3$ og $f(3) = 9$. Bestem en forskrift for f.

g) Isolér x i formlen $y = b \cdot x^a$.

h) For hvilke $a \neq 0$ har ligningen $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ingen løsninger?

i) Forkort brøken

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 + 2xy + y^2}\ .$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

STUDENTEREKSAMEN JANUAR-FEBRUAR 2000 **99-8-4V**

MATEMATISK LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

SPROGLIG LINJE
HØJT NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Tirsdag den 1. februar 2000 kl. 9.00–13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 - 18x + y^2 - 10y + 26 = 0 \ .$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum C.

Gør rede for, at punktet $P(1,1)$ ligger på cirklen, og bestem en ligning for cirklens tangent t i punktet P.

Tangenten t skærer linjen med ligningen $x = 9$ i punktet A.

Bestem vinklerne i trekant PCA.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \ln x - 3x \ , \quad x \geqq 1 \ .$$

Bestem nulpunkter og fortegn for f.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(e^3,0)$.

Beregn den eksakte værdi af funktionens mindsteværdi.

Opgave 4 (ca. 15 point)

Et eksperiment består i, at en symmetrisk terning kastes 15 gange.

Bestem sandsynligheden for, at terningen mindst én gang ud af de 15 kast viser en sekser.

Bestem sandsynligheden for, at terningen netop 7 gange ud af de 15 kast viser en femmer eller en sekser.

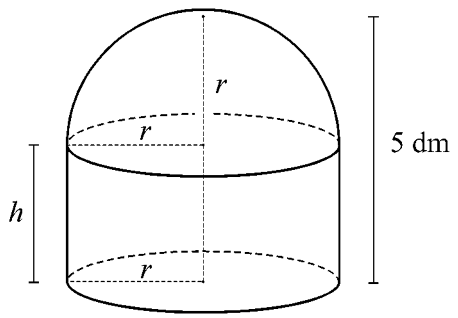
Med X betegnes den stokastiske variabel, som angiver det antal gange ud af de 15 kast, hvor terningen viser et øjental, der er mindre end eller lig med 4.

Bestem middelværdi μ og spredning σ for X.

Bestem $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Opgave 5 (ca. 15 point)

På figuren ses en beholder, der har form som en cylinder, hvorpå der er placeret en halvkugle. Halvkuglen har samme radius som cylinderens grundflade. Cylinderens højde, målt i dm, betegnes med h, mens grundfladens radius, målt i dm, betegnes med r. Beholderens højde skal være 5 dm.



Beregn beholderens rumfang, når $h = 2$.

I en bestemt type beholder skal højden h være mindst 2 dm.

Gør rede for, at rumfanget V (dm^3) af en sådan beholder kan skrives som

$$V = 5\pi r^2 - \tfrac{1}{3}\pi r^3 \ , \quad 0 < r \leqq 3 \ .$$

Bestem $r \in \,]0;3]$, så beholderens rumfang bliver så stort som muligt.

Opgave 6a (ca. 15 point)

En funktion g er bestemt ved

$$g(x) = 3 \cdot 1{,}2^x + 5 \ .$$

Løs ved beregning ligningen $g(x) = 11$.

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = b \cdot 1{,}2^x + c \ ,$$

hvor b og c er tal.

Beregn hvert af tallene b og c, når det oplyses, at punkterne $P(-5, 100)$ og $Q(20, 130)$ ligger på grafen for f.

Det oplyses, at graferne for f og g har netop ét skæringspunkt.

Bestem koordinatsættet til dette skæringspunkt.

Opgave 6b (ca. 15 point)

I et trapez $ABCD$ er AB parallel med DC og

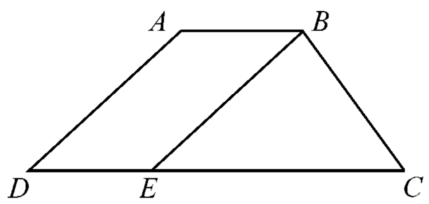
$$|AB| = 2{,}33 \ , \quad |BC| = 3{,}23 \ , \quad |CD| = 7{,}10 \quad \text{og} \quad |DA| = 3{,}90 \ .$$

På siden DC ligger punktet E, således at BE er parallel med AD.

Beregn vinklerne i trekant EBC.

Beregn vinklerne i trapez $ABCD$.

Beregn længden af BD.



Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse